

高等学校教学用书

高等数学教程

第五卷 第一分册

B. И. 斯米尔诺夫著

高等教育出版社

51.612
659
5-1:2

高等学校教学用书



高等数学教程

第五卷 第一分册

В. И. 斯米尔诺夫著

宋 正 译

21529/19

高等教育出版社

51.612
659
5-2=1

高等学校教学用书



高等数学教程

第五卷 第二分册

B. И. 斯米尔諾夫著
宋 正 譯

210529/19

高等数学教程出版社

本書系根据苏联国立技术理論書籍出版社 (Государственное издательство технико-теоретической литературы) 出版的斯米尔諾夫院士 (В. И. Смирнов) 著的“高等数学教程”(Курс высшей математики) 第五卷 1947 年版譯出的。原書曾于 1948 年荣获斯大林二等獎金。

本書中譯本分二册出版。第一分册介紹各种积分概念, 特别是斯提勒杰斯积分及勒貝格-斯提勒杰斯积分, 并且处理了多变数的情形。第二分册則是希勒伯特空間及其它空間的理論的介紹。由于原書出版后, 前四卷已經过修訂, 因此本書引用前四卷的地方, 可能与本社所出版各卷新版譯本不尽相符, 請讀者注意。

本書讀者对象是高等学校数学、物理等專業的高年級学生, 青年教师。

高等数学教程

第五卷 第一分册

В. И. 斯米尔諾夫著

宋正譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺 7 号
(北京市书刊出版业营业許可證出字第 054 号)

商务印书館上海厂印刷 新华书店发行

統一書号 13010·548 开本 850×1168 1/32 印張 9 5/16
字數 222,000 印張 1—15,000 定价(4) 1.10
1959 年 2 月第 1 版 1959 年 2 月上海第 1 次印刷

本書系根据苏联国立技术理論書籍出版社 (Государственное издательство технико-теоретической литературы) 出版的、斯米尔諾夫 (В. И. Смирнов) 著“高等数学教程”(Курс высшей математики) 第五卷 1947 年版譯出的。

本書(第五卷)中譯本暫分二分冊出版。

高等数学教程

第五卷 第二分冊

В. И. 斯米尔諾夫著

宋正譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺 7 号

(北京市书刊出版业营业登记证出字第 054 号)

商务印书馆上海厂印刷 新华书店发行

统一书号 13010·578 开本 850×1168 1/32 印张 9 10/16
字数 230,000 插数 1+16,606 定价(4) 半 1.10

1959 年 8 月第 1 版 1959 年 3 月上卷第 1 次印刷

原 序

在数学物理学的現代理論系統中,实变数函数論与一般的运算子論都有重大的意义。本書基本上就是討論这些問題的。从实变数函数論中,我只選擇了对于上述各种学科有用的材料。运算子論的研究是建立于希勒柏特空間的抽象理論的基础上。本書中,实变数函数論的基本內容乃是勒貝格-斯提勒杰斯积分論及完全加法的集合函数論。在第一章中討論古典的斯提勒杰斯积分論,而以小体字討論更一般的斯提勒杰斯积分的概念,后者乃是建立于相应上下达尔布积分相等的条件上。在第二章中討論实变数函数的度量理論及勒貝格-斯提勒杰斯积分論的基础。我从欧几里得空間中的一般測度論出發,然后定义可測函数及勒貝格-斯提勒杰斯积分的概念。在第三章中討論完全加法的集合函数論,闡明相关于一一定的分布函数的絕對連續性概念,并討論黑林格尔积分論。在同一章中,以絕對連續的完全加法集合函数的积分表示法为基础,介紹一变量以及多变数的函数的导数的概念。所介紹的偏导数的推广概念乃是与 C. И. 索伯列夫最近关于中值函数理論相联系的。在第三章末尾,很簡短地討論一下关于在抽象空間中建立測度論及积分論的可能性,并論述积分的一般定义的基础——这定义是依照 A. И. 廓勒莫郭洛夫的。在第四章中討論希勒柏特空間的抽象理論,首先就有界自共轭运算子的情形研究。第五章論述与希勒柏特空間不同的空間理論的初步。

編写本書时除專門論文以外我曾使用了很多專書。我且举出几种最基本的来。在第一章中曾使用了 B. И. 格利汶科的“斯提

勒杰斯积分”及 И. И. 那湯松的“实变数函数論基础”两書。关于第二及第三章,曾使用了薩克斯的“积分論”及瓦雷·布三的“勒貝格积分,集合函数,拜尔类”等書。

在論希勒柏特空間論時曾引用了斯通“希勒柏特空間中的綫性变换及其在解析方面的应用”,及 A. И. 蒲列斯涅尔在“数学科学的进展”期刊第九卷中的論文,以及 H. И. 阿希叶杰尔論雅可比矩陣的論文。

我对 C. M. 罗金斯基表示深深的謝意,因为他曾看过本書的全部手稿,并給予我很多宝貴的意見,这些意見在最后出版时都应用了。

一九四六年二月十二日

目 录

第一章 斯提勒杰斯积分

1. 集合及其权(1)
2. 斯提勒杰斯积分及其基本性質(4)
3. 达尔布和(8)
4. 連續函数的斯提勒杰斯积分(13)
5. 广义斯提勒杰斯积分(16)
6. 跃度函数(19)
7. 物理的解释(23)
8. 固变函数(24)
9. 固变的积分函数(31)
10. 斯提勒杰斯积分的存在(33)
11. 斯提勒杰斯积分号下取極限(36)
12. 黑利定理(37)
13. 选取原理(42)
14. 选取原理(續)(44)
15. 連續函数的空間(45)
16. C 中的綫性运算符(49)
17. 区間函数(52)
18. 基本斯提勒杰斯积分(54)
19. 基本斯提勒杰斯积分的性質(57)
20. 基本斯提勒杰斯积分的存在(60)
21. 一般斯提勒杰斯积分(61)
22. 平面上的区間函数(64)
23. 化到点函数(67)
24. 平面上的斯提勒杰斯积分(70)
25. 平面上的基本与一般积分(75)
26. 平面上的固变函数(75)
27. 傅立叶-斯提勒杰斯积分(78)
28. 反演公式(81)
29. 折合定理(88)
30. 柯西-斯提勒杰斯积分(85)

第二章 集合函数与勒貝格积分

- §1. 集合函数与测度論(90)
 31. 集合的运算(90)
 32. 点集合(93)
 33. 閉集合与开集合的性質(95)
 34. 初等圖形(98)
 35. 外测度及其性質(102)
 36. 可測集合(104)
 37. 可測集合(續)(113)
 38. 可測性的鑒定法(115)
 39. 集合体(117)
 40. 与坐标軸的选择无关(119)
 41. 体 B (120)
 42. 一个变数的情形(122)
- §2. 可測函数(123)
 43. 可測函数的定义(123)
 44. 可測函数的性質(127)
 45. 可測函数的極限(129)
 46. 性質 C (133)
 47. 片段定值函数(133)
 48. 类 B (136)
- §3. 勒貝格积分(137)
 49. 有界函数的积分(137)
 50. 积分的性質(141)
 51. 无界非負函数的积分(146)
 52. 积分的性質(150)
 53. 任意符号的函数(153)
 54. 复数值的可和函数(158)
 55. 积分号下取極限(159)
 56. 函数类 L_2 (164)
 57. 依中值收斂(166)
 58. 希勒伯特函数空間(170)
 59. 正交函数組(172)
 60. 空間 l_2 (178)
 61. L_2 中的綫性簇(181)
 62. 封閉組的例

- (185) 63. 赫勒德与闵可夫斯基不等式(186) 64. 无穷测度集合上的积分(191) 65. 无穷测度集合上的类 L_2 (195) 66. 圈变的积分函数(197) 67. 特殊情形(200) 68. 重积分的约简(202) 69. 特征函数的情形(205) 70. 傅必尼定理(208) 71. 积分次序的改变(213)
附录(215)

第三章 集合函数。绝对连续性。积分概念的推广

72. 集合的加法函数(217) 73. 特异函数(221) 74. 一个变数的情形(224) 75. 绝对连续的集合函数(229) 76. 例(236) 77. 多变数的绝对连续函数(239) 78. 偏导函数概念的推广(241) 79. 中值函数(245) 80. 中值函数(续)(250) 81. 辅助命题(254) 82. 辅助命题(续)(260) 83. 基本定理(265) 84. 黑林格尔积分(269) 85. 一个变数的情形(273) 86. 黑林格尔积分的性质(277) 87. 集合函数的扩展(281) 88. 抽象空间(282) 89. 积分的定义(283) 90. 积分概念的推广(285) 91. 微分同值性(288)

五卷第二分册目录

第四章 希勒伯特空間論

§1. 有界运算符論(298)

92. 第一組公理(298) 93. 第二組公理(294) 94. 極限. 完备性公理(296) 95. 正交組. 可分性(299) 96. 子空間. 投影(302) 97. 泛函(305) 98. 綫性运算符(308) 99. 双綫性泛函及二次泛函(313) 100. 自共軛运算符的界(315) 101. 逆运算符(318) 102. 运算符的譜(322) 103. 自共軛运算符的譜(324) 104. 运算符序列(327) 105. 投影运算符(328) 106. 子空間的运算(331) 107. 投影的性質(334) 108. 主單位元分解. 斯提勒杰斯积分(340) 109. 自共軛运算符的譜函数(346) 110. 自共軛运算符的連續函数(348) 111. 豫解运算符(350) 112. 豫解运算符的性質及反演公式(353) 113. 固有值与固有元(354) 114. 純点譜(356) 115. 連續的簡單譜(357) 116. 不变子空間(363) 117. 連續譜的一般情形(366) 118. 混合譜的情形(368) 119. 微分解(369) 120. 乘. 自变数的运算(373) 121. 么范运算符(376) 122. 么范运算符的譜分解(379) 123. 自共軛运算符的函数(381) 124. 交換运算符(385) 125. 全連續运算符(387) 126. 全連續运算符(續)(392) 127. 弱收斂(397) 128. 运算符的絕對范数(401) 129. 譜的凝点(404) 130. 譜改換成純点譜(406) 131. 正常运算符(408) 132. 輔助命题(411) 133. 运算符的幂級数(414) 134. 譜函数(416)

§2. 空間 l_2 及 L_2 (419)

135. 空間 l_2 (419) 136. 有界运算符(422) 137. 么范矩陣及投影矩陣(426) 138. 自共軛运算符(428) 139. 連續譜的情形(431) 140. 雅可比矩陣(435) 141. 微分解(438) 142. 全連續映像的矩陣(440) 143. 例(443) 144. 空間 L_2 (446) 145. 共軛运算符(448) 146. 全連續映像(450) 147. 譜函数(455) 148. 有界运算符(456) 149. 傅立叶映像(458) 150. 乘法运算(464) 151. 依从于差的核(466) 152. 空間 $L_{2,m}$ (470) 153. L_2 中的弱收斂(471)

§3. 无界运算符(474)

154. 基本概念(474) 155. 自共軛运算符(477) 156. 自共軛运算符的連續函数(483) 157. 豫解式(484) 158. 点譜(487) 159. 不变子空間(489) 160. 混合譜的情形(493) 161. 自共軛运算符的函数(495) 162.

乘法运算符(497) 163. 微分运算符(499) 164. 純点譜的情形(503)
 165. 积分运算符(507) 166. 对称运算符的封閉(511) 167. 閉对称运
 算子的扩展(512) 168. 亏指数(516) 169. 共轭运算符(519) 170. 極
 大运算符(522) 171. 例(523) 172. 輔助命題(526) 173. 二阶綫性运
 算子(530) 174. 一端为正則点时的情形(533) 175. 对一般情形的补充
 (537) 176. 亏指数为(2, 2)的情形(538) 177. 例(539) 178. 无穷矩
 陣(547) 179. 雅科比矩陣(549) 180. 矩陣及运算符(554) 181. C 矩
 陣的么范相抵(557) 182. 譜函数的存在(561)

第五章 一般空間

183. 賦范空間。例(565) 184. 共轭空間。弱收斂(567) 185. 綫性
 运算符(570) 186. 空間 $C_p^{(p)}$ 及 $H_p^{(p)}$ (570) 187. $C_p^{(p)}$ 与 $H_p^{(p)}$ 間的联系
 (573) 188. 空間 $C^{(p)}$ 及其上的泛函(578) 189. $C^{(p)}$ 及 $U^{(p)}$ 中的运算符
 (580) 190. 泛函序列(584) 191. 在 L_p 中的列紧性(588)

第一章 斯提勒杰斯积分

1. 集合及其权 应用数学分析学于近代自然科学时,各种积分概念都起着很大的作用,在第一、二两章中,我们将研究较以前所论更一般形式的积分论。在讨论第一种积分方程论时,已经使用过勒贝格积分。在本节中先介绍一些集合论的初步知识。这些知识是以前[IV;78]在勒贝格积分概念之前所述的补充。

设有两个由某种物体(元)形成的集合 A_1 及 A_2 。所谓两集合有相同的权,是指在 A_1 的诸元与 A_2 的诸元之间有一一对应的关系,就是说,有一对应关系,对于每一属于 A_1 的元,必有一属于 A_2 的确定元与它相应,而反之,对于 A_2 的每一元,必有一个属于 A_1 的元,而且只有一个这样的元与它相应。无穷集合(即包含无穷多个元的集合)叫做可计的或可数的,是指它与全部正整数所成的集合有相同的权,也就是说,这集合的诸元可以用正整数标志出来: $a_1, a_2, a_3, \dots$ 。两个可数集合必有相同的权。现在叙述一下可数集合的某些性质。考察可数集合的一个子集合,设后者由 $a_{p_1}, a_{p_2}, \dots$ 等构成,其中 $p_1, p_2, \dots$ 是一个正整数的增序列。这新集合的元也可以用正整数标志出来。每个元的标号就是 p 的足标。如此,可数集合的无穷部分仍是可数集合。现在考察两个可数集合:由诸元 $a_1, a_2, a_3, \dots$ 组成的 $A(a_1, a_2, a_3, \dots)$,及由诸元 $b_1, b_2, b_3, \dots$ 组成的 $B(b_1, b_2, b_3, \dots)$;作二者之和,即把属于上面两个集合的一切元合成一个集合 C 。如此而得的新集合 C 通常叫做集合 A 及 B 的和。这新集合仍是可数的。事实上,只须把 C 中的诸元依下面次序排列: $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$, 就可以看出其可数性。对

于有穷多个可数无穷集合之和,相似的推理也适用,就是說,有穷多个可数集合之和仍是可数集合。現在考察集合之数目也是无穷的情形。設有可数多个可数集合。这些集合的元可以用两个整数来标志: $a_p^{(q)}$ 。上标号表示这元所屬的集合标号,而下标号表示这元在包含它的集合中所具有的标号。不难把这一切元 $a_p^{(q)}$ 用正整数标志出来。取上下标号都是 1 的元做第一个元: $a_1^{(1)}$ 。此后取上下标号之和为 3 的諸元,并把它們依其上标号增加的順序排列下来: $a_2^{(1)}, a_1^{(2)}$, 于是得到諸集合之和中的第二元与第三元。再取上下标号之和为 4 的諸元,并把它們依其上标号增加的順序排列下来: $a_3^{(1)}, a_2^{(2)}, a_1^{(3)}$ 。这就給出了諸集合的和中的第四元、第五元及第六元。繼續作下去,可以看出可数多个可数集合的和仍是可数集合。如果和中某些項不是可数集合,而是有穷集合,則上面命題仍然有效。

設有某无穷集合 A 。由其中取某一元,并附以标号 1。所余剩的集合仍是无穷的。由它再取出一元,并附以标号 2。繼續下去,可知由任一无穷集合必可提出一个可数集合。經過如此提取后所余的集合可能是空的,就是說,它可能不含任一元,也可能是有穷的,也可能是无穷的。我們証明,如果所余集合是无穷的,那末它与原来集合有相同的权,就是說,下面的命題是正确的: 如果由无穷集合 A 中提取出可数集合 P 来,而余下的是一无穷集合 B ,那末集合 A 及 B 有相同的权。由无穷集合 B 重新取出某一可数集合 Q ,并設 C 是所余集合。如此原来的集合 A 分解成三个集合 $A = P + Q + C$, 而其中的集合 C 可能是空的,也可能是无穷的,而 P 及 Q 都是可数集合。在第二次提取之前, $A = P + B$ 。不难在 A 及 B 的諸元間建立一一对应关系。事实上, $A = P + Q + C$, $B = Q + C$ 。可数集合之和 $P + Q$ 仍是可数集合,所以在 $P + Q$ 及 Q 的諸元之間可以建立一一对应。集合 C 中的每一元与它自己对

应。如此可以在 A 及 B 的諸元間建立一一对应。由所証的命題直接可得：如果对于无穷集合增添一可数集合，则所得的新集合与原来的集合是有相同权的。在上述关于减去或增添可数集合的命題中，如果把可数集合换成有穷集合，则命題依然有效。証明与上面完全一样。

以前曾証明过，属于某一区間 $[a, b]$ 的一切有理数的集合是可数集合，一切有理数的集合也是可数集合。其証明与証明“可数多个可数集合之和仍是可数”这一命題完全一样。分数的分子起着上标号的作用，分母起着下标号的作用，而首先只要考察正分数。現在举一个不可数集合之例。考察凡属于区間 $[0, 1]$ 的实数。除零以外，其中每个数可以表成无尽十进小数，其整数部分是零，而反之，凡如此的十进小数一定与上述区間中的一个实数相应。我們不使用有尽小数，因为这种有尽小数与那些以 9 为周期的无尽小数表示同样数，例如 $0.37 = 0.36999\cdots$ 。我們証明上述实数的集合是不可数的。用归謬法証明。設上述一切十进小数，包括代表区間左端的小数 $0.00\cdots$ ，是可数的并附好标号。依下述方式作一个新的十进小数，其整数部分是零。取某一与第一个十进小数的第一位数不同的数字做第一位数，取某一与第二个十进小数的第二位数不同的数字做第二位数，等等。作新的十进小数时我們不使用 0 做位数，于是所得的无尽十进小数与原有的一切十进小数相异。如此与它相应的实数沒有包含在上面那可数集合之中，这与所設区間 $[0, 1]$ 中一切实数已附好标号这一事实相冲突。如此証明了：属于区間 $[0, 1]$ 的一切实数是不可数的。我們說这集合具有連續統的权。不难看出，属于任意一个有穷区間 $[a, b]$ 的一切实数的集合与属于区間 $[0, 1]$ 的一切实数的集合具有同样的权。公式 $y = \frac{x-a}{b-a}$ 就建立了这两集合諸元間的一一对应关系。当 x 遍历区間 $[a, b]$ 时，变数 y 就遍历区間 $[0, 1]$ 。如果引用公式

$y = \operatorname{tg} \left(\pi x - \frac{\pi}{2} \right)$, 那末当变数 x 在区間 $[0, 1]$ 内部变化时, 变数 y 遍历一切实数的集合, 就是說由一切实数所組成的集合也具有連續統的权。如果不把区間的端点算在集合之中, 那末其权并不改变, 因为对于无穷集合增添或减去一个有穷集合并不改变其权。

在下面, 我們常用記号 $[a, b]$ 表示閉集合, 而不包含端点的开集則用記号 (a, b) 表示。如果左端不算入, 而右端算进去, 我們用記号 $(a, b]$ 表示, 同样可規定記号 $[a, b)$ 的意义。这里的数 a 及 b 也可以取无穷值: $a = -\infty$, $b = +\infty$, 就是說所論的区間可以在左边或在右边是无穷的。例如閉区間 $[-\infty, +\infty]$ 包含两个无穷远点。与这相应, 函数 $f(x)$ 也可以在 $x = -\infty$ 及 $x = +\infty$ 处定义, 例如, 可以引用記号 $f(-\infty)$ 。在 $x = -\infty$ 处的連續性与条件 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = f(-\infty)$ 同效。同样可以处理 $x \rightarrow +\infty$ 的情形。

此外, 也可以应用通常的表示法 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = f(-\infty + 0)$ 及 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(+\infty - 0)$ 。

还应注意, 在閉区間 $[-\infty, +\infty]$ 中有穷而且連續的函数 $f(x)$ 一定在这区間中一致連續。

2. 斯提勒杰斯积分及其基本性質 回忆一下黎曼积分的定义, 这种积分在前几卷中是常用的。設 $[a, b]$ 是一个有穷区間, 而 $f(x)$ 是定义于这区間上的有界函数。把这区間分割成部分: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, 在每一部分区間 $[x_{k-1}, x_k]$ 上取某一点 ξ_k , 并作出积的和:

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) (x_k - x_{k-1}). \quad (1)$$

如果无限地把区間分細, 并随意地取点 ξ_k 时, 上写的和有确定的極限 A , 那末这極限值称做 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上的积分。設 δ 是諸差 $x_k - x_{k-1}$ 中的最大者。无限地細分区間 $[a, b]$ 成部分与 $\delta \rightarrow 0$ 同义; 而所謂在 (1) 中之和有确定極限 A 存在, 与下面所說的同

义: 对于任意預定的正数 ε , 存在一正数 η , 使当 $\delta \leq \eta$ 时,

$$\left| A - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| \leq \varepsilon.$$

我們可以用同样方式建立更一般的积分观念。这是由荷兰数学家斯提勒杰斯在 1894 年研究連分数时首先介紹的, 其后得到很寬广的發展, 在純粹数学問題与精密自然科学問題中都有应用。設在有穷区間 $[a, b]$ 上給出两个函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 来, 并設二者在这区間之上每一点处都取有穷值。今不用和 (1), 而代之以和

$$\sigma = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})]. \quad (2)$$

如果无限地細分区間, 并随意地取点 ξ_k 时, 上写的和趋向于确定的有穷極限, 那末我們說函数 $f(x)$ 在区間 $[a, b]$ 上依 $g(x)$ 是可积分的, 并写成

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \lim \sum_{k=1}^n f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})].$$

在黎曼积分中 $g(x)$ 的任务由 x 担当。显然現在介紹的新积分有很多类似黎曼积分的性質, 而这些性質的証明也与对于黎曼积分的証明完全相同。現在枚举这些性質, 并設下列各式中的一切积分都存在:

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b \sum_{k=1}^p a_k f_k(x) dg(x) &= \sum_{k=1}^p a_k \int_a^b f_k(x) dg(x) \\ \int_a^b f(x) d \sum_{k=1}^p a_k g_k(x) &= \sum_{k=1}^p a_k \int_a^b f(x) dg_k(x) \\ \int_a^b f(x) dg(x) &= \int_a^c f(x) dg(x) + \int_c^b f(x) dg(x) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (a_k \text{ 都是} \\ \text{常数}). \end{array} \quad (3)$$

此外还有一个極显然的公式:

$$\int_a^b dg(x) = g(b) - g(a). \quad (4)$$

在 (3) 的前两式中, 由右面的积分的存在可推知左面积分存在。

現在詳細地推出分部积分式。設函数 $g(x)$ 依 $f(x)$ 的积分存在, 我們証明 $f(x)$ 依 $g(x)$ 的积分存在。取和 (2), 把含相同点的函数 $g(x)$ 值的項归并, 得

$$\sigma = - \sum_{k=1}^{n-1} g(x_k) [f(\xi_{k+1}) - f(\xi_k)] + g(b)f(\xi_n) - g(a)f(\xi_1)。$$

加上差值

$$\left[f(x)g(x) \right]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a),$$

并减去它, 可写成

$$\begin{aligned} \sigma = & \left[f(x)g(x) \right]_a^b - \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} g(x_k) [f(\xi_{k+1}) - f(\xi_k)] + \right. \\ & \left. + g(a)[f(\xi_1) - f(a)] + g(b)[f(b) - f(\xi_n)] \right\}。 \quad (5) \end{aligned}$$

在花括弧中者恰是 $g(x)$ 依 $f(x)$ 的积分之黎曼-斯提勒杰斯和 (2)。依所知条件, $g(x)$ 依 $f(x)$ 的积分存在, 这就是說当无限細分区间时, 花括弧中之和趋向于这积分值。如此, 依 (5), 和 σ 有一極限值, 也就是說, $f(x)$ 依 $g(x)$ 的积分存在, 并且可以写成

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \left[f(x)g(x) \right]_a^b - \int_a^b g(x)df(x) \quad (6)$$

或

$$\int_a^b f(x)dg(x) + \int_a^b g(x)df(x) = \left[f(x)g(x) \right]_a^b, \quad (7)$$

而在这式中, 由两积分中之一存在可推得第二个存在。

斯提勒杰斯积分有两种特殊情形, 現在提一下。設区間 $[a, b]$ 分割成有穷多的部分: $a = c_0 < c_1 < \dots < c_{p-1} < c_p = b$, 并且在每个部分区間 (c_{k-1}, c_k) 中函数 $g(x)$ 的值是常数 g_k 。如此在位于区間 $[a, b]$ 中每一点 c_k 处, 函数 $g(x)$ 有一跃度 $s_k = g_{k+1} - g_k$ 。可能在区間两端也有跃度: 在左端是 $s_0 = g_1 - g(a)$, 而在右端是 $s_p =$