国家工科数学课程教学基地教学参考书

高等数学复习指南

电子科技大学应用数学系 编

$$\oint F(x)dx$$

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n)$$

电子科技大学出版社
UESTC PUBLISHING HOUSE

高等数学
复习指南

电子科技大学应用数学系　编

电子科技大学出版社

内容简介

本书是根据国家教委颁发的《高等工业学校高等数学课程教学基本要求》并参照《全国工学、经济学硕士MBA数学研究生人学考试数学考试大纲》编写的．本书特色是：紧扣大纲，突出重点；加强基础，重视综合；总结题型，启迪思路；注重应用，提高能力．

本书共分十一单元，每个单元分为四个部分：基本要求；内容提要；典型例题；单元检测题．每一单元后面分别介绍了在微积分发展史上做出重大贡献的十一位中外数学家．附录里还有电子科技大学三套高等数学期末考试试题及三套高等数学竞赛试题及解答．

本书内容全面，例题典型，分析透彻，深入浅出，叙述清晰，便于自学，是学习高等数学的得力助手．本书可供工科本科学生、专科学生、报考研究生者、自学考试参加者以及成人教育工科各类学生参考．

高等数学复习指南

电子科技大学应用数学系　编

出　　版：电子科技大学出版社　(成都建设北路二段四号邮编：610054)
责任编辑：黄礼玲
发　　行：电子科技大学出版社
印　　刷：成都市墨池教育印刷总厂印刷
开　　本：787×1092　1/16　印张 20.75　字数 502 千字
版　　次：1998 年 8 月第一版
印　　次：2000 年 6 月第三次印刷
书　　号：ISBN 7-81043-992-8/O·60
印　　数：8001—13500 册
定　　价：21.50 元

前　言

本书根据国家教委颁发的《高等工业学校高等数学课程教学基本要求》并参照《全国工学、经济学硕士MBA研究生入学考试高等数学考试大纲》编写的．旨在帮助读者在学习高等数学时，进一步深入理解基本概念，掌握基本理论和基本方法，提高分析问题和解决问题和能力，为学习后继课程打下坚实的基础．本书编写的指导思想是：紧扣大纲，突出重点；加强基础，重视综合；总结题型，启迪思路；注重应用，提高能力．

本书根据教学内容分为十一个单元，每个单元分为四个部分：（1）基本要求；（2）内容提要；（3）典型例题；（4）单元检测题．每一单元后面分别介绍了在微积分发展史上做出了重大贡献的十一位中外数学家，希望对读者有所启发和帮助．

为了帮助读者检查自己的知识掌握情况，除每单元附有检测题外，在附录里还有三套电子科技大学高等数学期末考试试题及解答，希望读者先做题后看解答．

电子科技大学每年九月举办的全校高等数学竞赛，吸引了不少优秀学生参加，竞赛试题不脱离“基本要求”，主要考查掌握知识的灵活性及综合应用数学知识解决实际问题的能力．试题有较大的参考价值，特在附录里刊载三套电子科技大学高等数学竞赛试题及解答．

本书内容全面，例题典型，分析透彻，深入浅出，叙述清晰，便于自学，是读者学习高等数学的得力助手．本书可供普通高校、成人教育、高教自考等各类本、专科学生以及报考研究生的读者参考．

本书由谢云荪主编．各单元执笔者是：陈良均（第一单元）；彭年斌（第二单元）；傅英定（第三单元）；赵汇渝（第四单元）；向学勤（第五单元）；王毅（第六单元）；曾勇（第七单元）；杨烨（第八单元）；李昌宜（第九单元）；杨光明（第十单元）；蒲和平（第十一单元）．其他内容由谢云荪、刘金水选编．

限于编者水平，难免有不妥之处，敬请批评指正．

编　者

1998年6月

目　　录

附录

第一单元　函数　极限　连续

一、基本要求

1. 理解函数的概念.

2. 了解函数奇偶性、单调性、周期性和有界性.

3. 理解复合函数的概念，了解反函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形.

5. 会建立简单实际问题中的函数关系式.

6. 理解极限的概念(对极限的 ε-N、ε-δ 定义可在学习过程中逐步加深理解，对于给出 ε 求 N 或 δ 不作过高要求).

7. 掌握极限四则运算法则.

8. 了解两个极限存在准则(夹逼准则和单调有界准则)，会用两个重要极限求极限.

9. 了解无穷小、无穷大，以及无穷小的阶的概念. 会用等价无穷小求极限.

10. 理解函数在一点连续的概念.

11. 了解间断点的概念，并会判别间断点的类型.

12. 了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质(介值定理和最大、最小值定理).

二、内容提要

(一)函数

1. 函数的概念及其表示法

(1)定义　设 $\overline{X}$ 和 $\overline{Y}$ 为两个非空实数集，若存在某一对应规律(或法则)f，使得对于 $\overline{X}$ 中任意一个数 x，$\overline{Y}$ 中都有唯一确定的实数 y 与它对应，则称 f 为定义在 $\overline{X}$ 上的函数，记为 $f: \overline{X}\to \overline{Y}$ 或简记为 $y=f(x)$.

函数是高等数学研究的基本对象. 在函数的定义中，定义域和对应法则是函数概念的两个要素.

(2)在函数记号 $y=f(x)$中，记号 $f(\quad)$表示自变量 x 与因变量 y 之间的对应法则，此对应法则 $f(\quad)$与自变量、因变量用什么字母表示无关，且不限于表示某一个数学表达式，也可以表示几个数学表达式(如分段函数)，甚至还可以表示一个几何图形或一张数据表格.

2. 函数的几种简单性态

(1)奇偶性　$f(x)$的定义域 D_f 是关于原点对称，若对$\forall\ x\in D_f$，有$f(-x)=-f(x)$，称

$f(x)$为奇函数；若对$\forall\ x\in D_f$，有 $f(-x)=f(x)$，称 $f(x)$为偶函数．

奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称．

(2)单调性　对$\forall\ x_1,x_2\in(a,b)\subset D_f$，当 $x_1<x_2$，有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称函数 $y=f(x)$在(a,b)内单调增加（或单调减少）．

(3)周期性　$f(x)$在 $D_f=(-\infty,+\infty)$定义，若存在常数 $T\neq 0$，对$\forall\ x$，有$f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$为周期函数，T 为 $f(x)$的周期．通常所说的周期是指最小正周期．

(4)有界性　若存在正数 M，对$\forall\ x\in X\subset D_f$，恒有$|f(x)|\leqslant M$，称 $f(x)$在 X 上有界．

3．基本初等函数、复合函数和初等函数

(1)基本初等函数　常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数．

(2)复合函数　$y=f(u)$的定义域 D_f，$u=\varphi(x)$的定义域 D_φ，值域 Z_φ，若 $Z_\varphi\cap D_f\neq\Phi$，则可定义 D_φ 的一个子集到 Z_f 的函数：$y=f[\varphi(x)]$，称为由 $y=f(u)$和 $u=\varphi(x)$复合而成的复合函数．y 是因变量，x 是自变量，u 是中间变量．注意分段函数的复合函数．

(3)初等函数　由基本初等函数通过有限次四则运算和有限次复合运算得到，且能用一个式子表示的函数，称为初等函数．

（二）极限的概念、性质和运算

(1)定义

①数列的极限

设有数列$\{x_n\}$和常数 A，如果对于任意给定的正数 ε，总存在正整数 N，使得满足 $n>N$ 的一切 n，都有$|x_n-A|<\varepsilon$ 成立，则称 A 是数列$\{x_n\}$的极限，记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$．这时也称$\{x_n\}$收敛于 A．如果$\{x_n\}$没有极限，则称$\{x_n\}$是发散的．数列$\{x_n\}$是否收敛以及收敛时收敛到何值与$\{x_n\}$的前面有限项无关．

②函数的极限

设函数 $f(x)$在 x_0 的某空心邻域有定义，A 为一常数．如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在正数 δ，使得满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 的一切 x，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，则称 A 为 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时的极限，记为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$．

设函数 $f(x)$在$(a,+\infty)$和$(-\infty,-a)(a>0)$内有定义，A 为一常数．如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在一个正数 X，使得满足$|x|>X$ 的一切 x，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，则称 A 为 $f(x)$当 x 趋于无穷大时的极限，记为$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$．

还有单侧极限的概念，左极限$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$，当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$，亦可记作 $f(x_0-0)=A$．右极限$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$，当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$，亦可记作 $f(x_0+0)=A$．显然，极限存在$\Leftrightarrow$左、右极限存在且相等．此结论常用来证明分段函数在分段点处极限的存在性．

需要指出的是，由于自变量的变化状态及其相应的函数的变化趋势的不同，因此函数的极限有多种形式，但不论自变量的变化状态，还是因变量的变化趋势，主要有两类．

自变量的变化状态有：

1° $x\to\infty$,包括 $x\to-\infty, x\to+\infty, x\to\infty$;

2° $x\to x_0$,包括 $x\to x_0^-, x\to x_0^+, x\to x_0$.

因变量的变化趋势有:

1° $f(x)\to A$;

2° $f(x)\to\infty$,包括 $f(x)\to-\infty, f(x)\to+\infty, f(x)\to\infty$.

若把它们加以组合,共有 24 种形式,读者在复习时可列表整理.

(2)无穷小量

如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$,则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时为无穷小量,简称为无穷小.

①无穷小的运算

有限个无穷小的代数和仍是无穷小.

有界函数与无穷小的乘积仍是无穷小. 由此可以推出:常数与无穷小的乘积为无穷小;有限个无穷小的乘积为无穷小.

②函数、极限与无穷小的关系

$\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$.(其中 A 为常数,$\lim\alpha(x)=0$)

③无穷小与无穷大的关系

在自变量的同一变化过程中,若 $f(x)$ 是无穷大,则$\dfrac{1}{f(x)}$是无穷小;若 $f(x)$ 是无穷小,且 $f(x)\neq 0$,则$\dfrac{1}{f(x)}$是无穷大.

(3)极限的四则运算

若$\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$. 则

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B, \qquad \lim[f(x)g(x)]=A\cdot B.$$

此性质可以推广到任意有限个函数的情形.

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}\ (B\neq 0)$$

(4)极限的性质

①唯一性

若函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的极限存在,则极限唯一.

②保号性

若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$ (或 $A<0$),则存在 $\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有 $f(x)>0$ (或 $f(x)<0$).

设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A, \lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$,若 $A<B$,则存在 $\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,$f(x)<g(x)$.

若存在 x_0 的某个空心邻域,有 $f(x)\leqslant g(x)$,且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A, \lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$,则 $A\leqslant B$.

③有界性

若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则存在 $\delta>0$ 及 $M>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有$|f(x)|\leqslant M$.

(5)极限存在准则及两个重要极限

① 夹逼准则

若在 x_0 的某个空心邻域内，有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，则

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$$

②单调有界准则

若数列$\{x_n\}$单调且有界，则数列$\{x_n\}$必有极限.

1° 若$\{x_n\}$为单调增加数列，且$\exists\ M$，对$\forall\ n$，有 $x_n\leqslant M$，则极限$\lim\limits_{x\to\infty}x_n$ 存在；

2° 若$\{x_n\}$为单调减少数列，且$\exists\ m$，对$\forall\ n$，有 $x_n\geqslant m$，则极限$\lim\limits_{x\to\infty}x_n$ 存在.

③两个重要极限

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$ 或$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$，可以推广到：

$$\lim_{x\to x_0}[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e(\text{其中}\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0,\alpha(x)\neq 0)$$

更一般地：$\lim\limits_{x\to x_0}[1+f(x)]^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)}$（其中，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$），或 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-1]g(x)}$，其中$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$.

(6)无穷小的比较及代换定理

设$\lim\alpha(x)=0$，$\lim\beta(x)=0(\beta(x)\neq 0)$.

1° 如果$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$ 则称在该趋向下，$\alpha(x)$是比$\beta(x)$高阶的无穷小，记为 $\alpha(x)=o(\beta(x))$.

如果$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$，则称在该趋向下，$\alpha(x)$是比$\beta(x)$低阶的无穷小.

如果$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C(C\neq 0)$，则称在该趋向下，$\alpha(x)$与$\beta(x)$为同阶无穷小. 特别地，若 $C=1$，即$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，则称在该趋向下，$\alpha(x)$与$\beta(x)$为等价无穷小，记作 $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

2° 设 $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$，$\beta(x)\sim\beta_1(x)$，若$\lim f(x)=A$（或∞），则

$$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$$

若$\lim\dfrac{\alpha_1(x)f(x)}{\beta_1(x)}=A$（或$\infty$），则

$$\lim\frac{\alpha(x)f(x)}{\beta(x)}=\lim\frac{\alpha_1(x)f(x)}{\beta_1(x)}$$

3° 设 $\alpha(x)$，$\beta(x)$是 $x\to x_0$ 的无穷小，若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k}=C\neq 0$（$C$ 为常数，$k>0$），则称 $x\to x_0$时，$\alpha(x)$是$\beta(x)$的 k 阶无穷小量.

4° 一些常用的等价无穷小

当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$；$\mathrm{tg}x\sim x$；$\arcsin x\sim x$；$\mathrm{arctg}x\sim x$；$\ln(1+x)\sim x$；$e^x-1\sim x$；$a^x-1\sim x\cdot\ln a(a>0,a\neq 1)$；$\log_a(1+x)\sim\dfrac{x}{\ln a}(a>0)$；$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$.

当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$；当 $x\to 0$ 时，$\mathrm{tg}x-\sin x\sim\dfrac{1}{2}x^3$.

（三）函数的连续性

(1)函数 $y=f(x)$在 $x=x_0$ 连续的等价定义：设函数 $f(x)$在 x_0 的某一邻域内有定义.

1° $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$，则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续．

2° $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续．

3° 如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续．

$f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续时，具有局部保号性，即若 $f(x_0)>0$（或 <0），则 $\exists\ \delta>0$，使得对 $\forall\ x\in N(x_0,\delta)$ 有 $f(x)>0$（或 <0）．

(2)若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一点都连续，称 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续；若 $f(x)$ 在 (a,b) 连续，且在端点 a 和 b 处分别右连续和左连续，即 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$，$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$，则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续．

(3)函数的间断点

若 $f(x)$ 在点 x_0 不连续，称 x_0 是 $f(x)$ 的间断点．间断点一般分为两类．

1° 第一类间断点，$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 均存在的间断点，又分为跳跃型和可去型两种：

跳跃型间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$； 可去型间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$．

对可去型间断点，可以补充（当 $f(x)$ 在 x_0 没有定义时）或者改变（当 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$ 时）$f(x)$ 在 x_0 的函数值，定义新函数

$$\varphi(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq x_0 \\ \lim\limits_{x\to x_0}f(x), & x=x_0 \end{cases}$$

则 $\varphi(x)$ 在 x_0 连续．

2° 第二类间断点，凡是不属于第一类间断点的间断点．常见的有无穷型（若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 中至少有一个是无穷大）和振荡型（若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 中至少有一个无穷次振荡不存在）两种．

(4)闭区间上连续函数的性质

1° 最值存在定理 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则必存在 $\xi_1,\xi_2\in[a,b]$，使对一切 $x\in[a,b$ 都有

$$f(\xi_1)\leqslant f(x)\leqslant f(\xi_2)$$

即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 必有最小值 $f(\xi_1)$ 和最大值 $f(\xi_2)$．

2° 有界性定理 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有界，即存在正数 M，使对 $\forall\ x\in[a,b]$ 有 $|f(x)|\leqslant M$．

3° 介值定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，且 $f(a)\neq f(b)$，若 μ 是 $f(a)$，$f(b)$ 之间任何一个数，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=\mu$．

推论 1 若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 连续，m、M 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 的最小值、最大值，$(m<M)$ 则对任意 $\mu\in(m,M)$，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=\mu$．

推论 2 零值定理：若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$

推论 3　若单调函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则存在唯一的 $\xi\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=0$.

三、典型例题

例 1　求函数 $f(x)=\dfrac{1}{\lg(x+4)}+\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$ 的定义域.

解　对 $\dfrac{1}{\lg(x+4)}$，有 $x+4>0$，且 $x+4\neq 1$；对 $\sqrt{x^2-x-6}$，有 $x^2-x-6\geqslant 0$.

对 $\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$，有 $\left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1$.

$$\text{联立}\quad\begin{cases}x+4>0\\x+4\neq 1\\x^2-x-6\geqslant 0\\\left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>-4\\x\neq -3\\x\geqslant 3, x\leqslant -2\\-3\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$$

故 $f(x)$ 的定义域 $D_f=(-3,-2]\cup[3,4]$.

注　求函数的定义域，如果是实际问题建立的函数，由实际意义来确定定义域. 如果函数由解析式子给出，通常是指自然定义域. 其原则是：

(1)分式函数的分母不能等于零；

(2)开偶次方，被开方式 $\geqslant 0$；

(3)对数函数的底大于零且 $\neq 1$，真数 >0；

(4)arcsin(　)，arccos(　)，括号部分的绝对值小于等于 1.

例 2　设 $\varphi(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\x, & x>0\end{cases}$，　$\psi(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\-x^2, & x>0\end{cases}$，　求 $\varphi[\varphi(x)]$，$\varphi[\psi(x)]$，$\psi[\varphi(x)]$，$\psi[\psi(x)]$.

分析　两个或两个以上的函数能构成复合函数，必须后面函数的值域是相应前面函数定义域的子集. 对于分段函数，由于在其定义域的不同子集上，用不同的解析式表示，所以在复合时，应区别对待.

解　(1) $\varphi[\varphi(x)]$ 当 $x\leqslant 0$ 时，$\varphi(x)=0$，故 $\varphi[\varphi(x)]=0$. 当 $x>0$ 时，$\varphi(x)=x>0$，故 $\varphi[\varphi(x)]=x$. 因此

$$\varphi[\varphi(x)]=\begin{cases}0, x\leqslant 0\\x, x>0\end{cases}=\varphi(x)$$

(2) $\varphi[\psi(x)]$ 当 $x\leqslant 0$ 时，$\psi(x)=0$. 故 $\varphi[\psi(x)]=0$. 当 $x>0$ 时，$\psi(x)=-x^2<0$. 故 $\varphi[\psi(x)]=0$. 则　$\varphi[\psi(x)]=0$.

(3) $\psi[\varphi(x)]$ 当 $x\leqslant 0$ 时，$\varphi(x)=0$. 故 $\psi[\varphi(x)]=0$. 当 $x>0$ 时，$\varphi(x)=x>0$，故 $\psi[\varphi(x)]=-x^2$. 则

$$\psi[\varphi(x)]=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\-x^2, & x>0\end{cases}=\psi(x)$$

(4) $\psi[\psi(x)]$ 当 $x\leqslant 0$ 时，$\psi(x)=0$，故 $\psi[\psi(x)]=0$.

当 $x>0$ 时，$\psi(x)=-x^2<0$，故 $\psi[\psi(x)]=0$. 则 $\psi[\psi(x)]=0$.

注 求复合函数的解析表达式，通常是从内层到外层，逐层复合.

例 3 (1)已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$. 求 $\varphi(x)$ 并指出它的定义域.

(2)已知 $f(x)=\sin x$，$f[\varphi(x)]=1-x^2$，求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

分析 此题已知函数 $f(x)$ 及复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的表达式，求中间变量 $u=\varphi(x)$ 的解析表达式. 注意函数的对应关系与所用字母表示的无关性.

解 (1)由于 $f[\varphi(x)]=e^{\varphi^2(x)}=1-x$，$\varphi^2(x)=\ln(1-x)$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$ 故 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$. 下面再求 $\varphi(x)$ 的定义域

$$\begin{cases}\ln(1-x)\geqslant 0\\ 1-x>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}1-x\geqslant 1\\ 1-x>0\end{cases}$$

故 $x\leqslant 0$ 为 $\varphi(x)$ 的定义域.

另解 $y=f(x)=e^{x^2}$，取 $x>0$，$x=\sqrt{\ln y}$ 得反函数关系 $y=f^{-1}(x)=\sqrt{\ln x}$. 又 $f[\varphi(x)]=1-x$，故 $\varphi(x)=f^{-1}(1-x)=\sqrt{\ln(1-x)}$. 以下求定义域同上.

(2)$f[\varphi(x)]=\sin\varphi(x)=1-x^2$，故 $\varphi(x)=\arcsin(1-x^2)$. 由 $|1-x^2|\leqslant 1$，故 $-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$.

例 4 求函数 $y=\begin{cases}x^2-1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x^2, & -1\leqslant x<0\end{cases}$ 的反函数.

分析 求函数的反函数，可将 x 解出为 y 的函数，再将 x 与 y 的位置互换即可. 对于分段函数的情形，必须分段处理.

解 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，有 $-1\leqslant y=x^2-1\leqslant 0$，解得 $x=\sqrt{1+y}$.

当 $-1\leqslant x<0$ 时，有 $0<y=x^2\leqslant 1$，解得 $x=-\sqrt{y}$. 因此反函数为

$$x=\varphi(y)=\begin{cases}\sqrt{1+y}, & -1\leqslant y\leqslant 0\\ -\sqrt{y}, & 0<y\leqslant 1\end{cases}$$

习惯上写成

$$y=\varphi(x)=\begin{cases}\sqrt{1+x}, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ -\sqrt{x}, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$$

例 5 已知函数 $f(x)$，$x\in R^1$ 满足方程

$$z=\sqrt{y}+f(\sqrt[3]{x}-1)$$

且当 $y=1$ 时，$z=x$，试求 $f(x)$.

解 将 $y=1$，$z=x$ 代入 $z=\sqrt{y}+f(\sqrt[3]{x}-1)$ 得

$$x=1+f(\sqrt[3]{x}-1) \qquad f(\sqrt[3]{x}-1)=x-1$$

令 $\sqrt[3]{x}-1=t$，$x=(t+1)^3$. 故

$$f(t)=(t+1)^3-1=t^3+3t^2+3t \quad \text{即} \quad f(x)=x^3+3x^2+3x$$

例 6 设 $f(0)=0$，且 $x\neq 0$ 时 $f(x)$ 满足

$$af(x)+bf(\frac{1}{x})=\frac{c}{x}\ (a,b,c\ \text{为常数}，|a|\neq|b|)$$

证明 $f(x)$ 为奇函数.

分析 考虑函数的奇偶性，通常可以按下述步骤进行：(1)定义域 D_f 是否关于原点对称；(2)考虑 $|f(-x)|=|f(x)|$ 是否成立，不成立时不具奇偶性；成立时再考虑 $f(-x)=$

$-f(x)$或$f(-x)=f(x)$是否成立. 本题可先求$f(x)$的表达式.

解 当$x\neq 0$时,令$x=\frac{1}{t}$,得

$$af(\frac{1}{t})+bf(t)=ct$$

联立 $\begin{cases} af(\frac{1}{x})+bf(x)=cx \\ af(x)+bf(\frac{1}{x})=\frac{c}{x} \end{cases}$ 解出 $f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}(\frac{ac}{x}-bcx).\ x\neq 0$

因此 $f(-x)=\frac{1}{a^2-b^2}[(\frac{ac}{-x}-bc(-x)]=-\frac{1}{a^2-b^2}(\frac{ac}{x}-bcx)=-f(x)$

又$f(0)=0$,故$f(x)$为奇函数.

注 得出$f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}(\frac{ac}{x}-bcx)$后,可以直接由两个不同奇函数的和、差仍为奇函数得证.

例7 定义域是关于原点对称的区间I内的任一函数,可表示成一个奇函数$G(x)$与一个偶函数$H(x)$之和,且这种表示法是唯一的.

分析 $G(x)$是奇函数,$H(x)$是偶函数. 即对 $\forall x\in I,G(-x)=-G(x),H(-x)=H(x)$. 于是

$$f(x)=G(x)+H(x) \qquad f(-x)=-G(x)+H(x)$$

两式相加得 $H(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$

两式相减得 $G(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$

且这种表示法是唯一的.

例8 函数$y=f(x)$定义在$(-\infty,+\infty)$,其图形既关于$x=a$对称,又关于$x=b$对称$(b>a)$,证明:$y=f(x)$为周期函数,并求出其周期.

分析 $f(x)$的图形关于$x=a$对称,用解析式如何表述是解本题的关键. 即对$\forall x\in(-\infty,+\infty)$,$f(x)$在$x$与$2a-x$的函数值相等。

证 对$\forall x\in(-\infty,+\infty)$,由已知有

$$\begin{cases} f(x)=f(2a-x) & (1) \\ f(x)=f(2b-x) & (2) \end{cases}$$

在式(2)中用$2a-x$代x,得到$f(2a-x)=f[2b-(2a-x)]$,即

$$f(2a-x)=f(2b-2a+x) \qquad (3)$$

再由式(1)、式(3)得$f(x)=f(x+2b-2a)$对$\forall x$成立. 根据周期函数的定义,$f(x)$是周期函数,$2b-2a$是$f(x)$的周期.

注 此题说明函数的简单性态间的相互关系,周期性与对称性(包括奇偶性)间的关系.

请读者思考:若将例8中"关于$x=a$对称"换为"关于点(a,y_0)对称",$f(x)$也是周期函数,请求出周期.

例9 如图1-1所示,$oABC$是一个正方形,o是坐标原点,A、B、C的坐标如图所示. 另有一直线$x+y=t$,求正方形与平面区域$x+y\leqslant t$公共部分的面积$S(t)$.

分析 建立函数关系式要利用题中的等量关系(几何、物理、经济等实际问题的条件),同时注意定义域.

解 当 $t<0$ 时,$x+y\leqslant t$ 所表示的平面区域与正方形$oABC$ 没有公共部分,于是 $S(t)=0$;

当 $0\leqslant t<1$ 时,$x+y\leqslant t$ 与正方形 $oABC$ 的公共部分为一直角三角形,于是 $S(t)=\frac{1}{2}t^2$;

当 $1\leqslant t<2$ 时,$x+y\leqslant t$ 与正方形 $oABC$ 的公共部分为一五边形,其面积为正方形面积减去一个三角形面积,于是 $S(t)=1-\frac{(2-t)^2}{2}$;

当 $t\geqslant 2$ 时,$x+y\leqslant t$ 与正方形 $oABC$ 的公共部分就是正方形 $oABC$. 于是 $S(t)=1$.

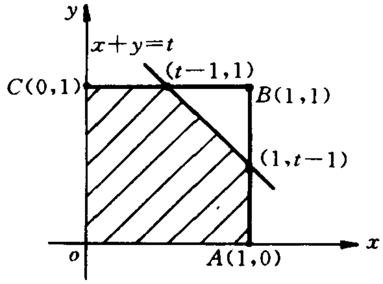

图 1-1

综上所述

$$S(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ \frac{t^2}{2}, & 0\leqslant t<1 \\ 1-\frac{1}{2}(2-t)^2, & 1\leqslant t<2 \\ 1 & t\geqslant 2 \end{cases}$$

例 10 证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

分析 $\forall\ \varepsilon>0$,欲使 $|\sqrt[n]{n}-1|=\sqrt[n]{n}-1<\varepsilon$ 即 $\sqrt[n]{n}<1+\varepsilon$, $\frac{1}{n}\ln n<\ln(1+\varepsilon)$,当 $n\geqslant 2$ 时,有 $\frac{1}{n}\ln 2<\ln(1+\varepsilon)$,得 $n>\frac{\ln 2}{\ln(1+\varepsilon)}$,于是可取 $N=\left[\frac{\ln 2}{\ln(1+\varepsilon)}\right]$.

读者考虑,如果按上述分析的办法取 N,是否可以? 如果有问题,出在哪一步?

用定义证明极限中,最容易错的是不知如何"适当"放大,放大中应遵循什么?

由 $|x_n-A|<\varepsilon$,这里可将 $|x_n-A|$"适当"放大,解出 $n>\varphi(\varepsilon)$,取 $N=[\varphi(\varepsilon)]$即可.

上述分析中,当 $n\geqslant 2$ 时,有 $\frac{1}{n}\ln 2<\ln(1+\varepsilon)$,但是否一定有 $\frac{1}{n}\ln n<\ln(1+\varepsilon)$呢? 不一定! 上述分析中不是"适当"放大,而是缩小了.

正确的做法很多,下面仅介绍两种.

解一 令 $\sqrt[n]{n}=1+\lambda_n(\lambda_n>0)$. 由二项式定理

$$n=(\sqrt[n]{n})^n=(1+\lambda_n)^n=1+n\lambda_n+\frac{n(n-1)}{2!}\lambda_n{}^2+\cdots+\lambda_n{}^n>\frac{n(n-1)}{2!}\lambda_n{}^2$$

有
$$\lambda_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

对 $\forall\ \varepsilon>0$,由 $|\sqrt[n]{n}-1|=\lambda_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}<\varepsilon$, $\frac{2}{n-1}<\varepsilon^2$,得 $n>\frac{2}{\varepsilon^2}+1$,取 $N=\left[\frac{2}{\varepsilon^2}+1\right]$即可.

注 令 $\sqrt[n]{n}=1+\lambda_n$ 是关键! 实质是 $\sqrt[n]{n}\to 1(n\to\infty)$则 $\sqrt[n]{n}$ 可表示成极限值 1 加上一个无穷小 λ_n.

解二 由 $$\left(1+\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n=1+n\sqrt{\frac{2}{n}}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{2}{n}+\cdots+\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n>n$$

有 $1+\sqrt{\frac{2}{n}}>\sqrt[n]{n}$，$\sqrt[n]{n}-1<\sqrt{\frac{2}{n}}<\varepsilon. n>\frac{2}{\varepsilon^2}$ 取 $N=[\frac{2}{\varepsilon^2}]$，$\forall\ \varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{2}{\varepsilon^2}\right]$ 即可得，当 $n>N$ 有 $|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

注 用"ε-N"语言证明极限存在，若对 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N$，则 N 不唯一. 解一和解二中的 N 就不相同.

例 11 利用函数的连续性求极限(直接代入法)：

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{8\cos^2x-2\cos x-1}{2\cos^2x+\cos x-1}$； (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}[\cos\ln(1+x)-\cos\ln x]$.

解 由连续函数的定义求极限时，函数符号"f"可以与极限符号"lim"交换次序，即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)=f(\lim\limits_{x\to x_0}x)$ 更一般地，$f(\quad)$ 为连续函数，有

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)]$$

解这类问题时，通常需要适当变形，消去零因子(约分，分子分母有理化，因式分解，三角函数和差化积等).

(1) 原式 $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{(4\cos x+1)(2\cos x-1)}{(\cos x+1)(2\cos x-1)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{4\cos x+1}{\cos x+1}=\dfrac{4\times\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}+1}=2.$

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\left\{-2\sin\dfrac{\ln[(1+x)x]}{2}\sin\dfrac{\ln\frac{1+x}{x}}{2}\right\}=0.$

(其中 $|-2\sin\dfrac{\ln[(1+x)x]}{2}|\leqslant 2$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\dfrac{\ln\frac{1+x}{x}}{2}=\sin\dfrac{\ln 1}{2}=0.$)

例 12 利用数列求和公式和基本极限求极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n})}{(n+1)+2(n+2)+\cdots+n(n+n)}$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})(|x|<1)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2a^n+3(-b)^n}{2a^{n+1}+3(-b)^{n+1}}$(其中 $a>b>0$).

解 (1) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n})}{n(1+2+\cdots+n)+(1^2+2^2+\cdots+n^2)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(\dfrac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}\right)}{\dfrac{n\cdot n(n+1)}{2}+\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}=\frac{12}{5}.$$

(2) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x}{1-x}(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}=\dfrac{1}{1-x}(|x|<1).$

(3) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+3(\frac{-b}{a})^n}{2a+3(\frac{-b}{a})^n(-b)}=\dfrac{2}{2a}=\dfrac{1}{a}$ ($\because |\frac{-b}{a}|<1$).

注 1° 常用的数列求和公式有

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2};$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}=\frac{a(1-q^n)}{1-q},(q\neq1).$$

2° 常用的基本极限有

$$\lim_{n\to\infty}q^n=\begin{cases}0, & |q|<1\\ 1, & q=1\\ 不存在, & q=-1\\ \infty, & |q|>1\end{cases};\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0);\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

例 13 用夹逼法求$\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$.

分析 记 $x_n=(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$，显然$(3\cdot1^n)^{\frac{1}{n}}<x_n<(3\cdot3^n)^{\frac{1}{n}}$. 但左边的极限为 1，右边极限为 3，不能用夹逼准则. 夹逼准则的关键是夹此数列的两个数列必须有相同的极限，这也是构造两个数列的困难所在.

解 记$x_n=(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$，显然有不等式

$$3=(3^n)^{\frac{1}{n}}<x_n<(3\cdot3^n)^{\frac{1}{n}}=3^{\frac{1}{n}}\cdot3$$

而$\lim\limits_{n\to\infty}3^{\frac{1}{n}}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}3^{\frac{1}{n}}\cdot3=3$. 故

$$\lim_{n\to\infty}x_n=3 \quad 即 \quad \lim_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=3$$

例 14 (1)$a_1=\dfrac{c}{2}$，$a_{n+1}=\dfrac{c}{2}+\dfrac{a_n^{\ 2}}{2}$ $(n=2,3,\cdots)$ $(0\leqslant c\leqslant1)$，求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

(2)设 $x_1>0$，且 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}(x_n+\dfrac{a}{x_n})(n=1,2,\cdots,a>0)$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

分析 要证明$\{a_n\}$收敛，利用单调有界数列极限存在准则，由 a_{n+1}的结构及 $a_1=\dfrac{c}{2}$，可以猜测$\{a_n\}$是单调增加的.

证 (1)由已知，对$\forall\ n$，$a_n\geqslant0$. 易知 $a_2-a_1=\dfrac{1}{2}a_1^{\ 2}\geqslant0$. 若 $a_k-a_{k-1}\geqslant0$，考查

$$a_{k+1}-a_k=(\frac{c}{2}+\frac{a_k^2}{2})-(\frac{c}{2}+\frac{a_{k-1}^2}{2})=\frac{1}{2}(a_k+a_{k-1})(a_k-a_{k-1})\geqslant0$$

从而由数学归纳法知，对$\forall\ n$ 有 $a_{n+1}-a_n\geqslant0$，即$\{a_n\}$是单调增加的.

又 $0\leqslant c\leqslant1$，$0\leqslant a_1=\dfrac{c}{2}\leqslant1$，若对 k 有 $0\leqslant a_k\leqslant1$，则 $0\leqslant a_k^{\ 2}\leqslant1$. 考查

$$a_{k+1}=\frac{c}{2}+\frac{a_k^{\ 2}}{2}\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

$\{a_n\}$有上界. 因此$\{a_n\}$极限存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. 对 $a_{n+1}=\dfrac{c}{2}+\dfrac{a_n^{\ 2}}{2}$，取极限 $a=\dfrac{c}{2}+\dfrac{a^2}{2}$，解之得 $a=1\pm\sqrt{1-c}$. 因为 $0\leqslant a_n\leqslant1$，有 $0\leqslant a\leqslant1$，故舍去 $a=1+\sqrt{1-c}$. 则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1-\sqrt{1-c}$.

(2) 因为 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}(x_n+\dfrac{a}{x_n})\geqslant\sqrt{x_n\cdot\dfrac{a}{x_n}}=\sqrt{a}$，所以$\{x_n\}$有下界$\sqrt{a}$，即从 $n=2$ 开