二轮

金桃李三基书系

3+X 高考速效通

尹玉桂 主编

数学

专题归纳

易混辨析

范例点津

能力达标

X 导航

石油大学出版社

金桃李三基书系

3+X高考

速·效·通（二轮）

数　学

尹玉柱　主编

石油大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

3+X高考速·效·通.数学/尹玉柱主编.—2版.东营:石油大学出版社,2001.7
(金桃李三基书系)
ISBN 7-5636-1472-9

Ⅰ.3… Ⅱ.尹… Ⅲ.数学课-高中-升学参考资料
Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第042606号

3+X高考速·效·通.数学

尹玉柱　主编

总 策 划: 路庆良(电话　0546-8391797)
责任编辑: 郜云飞(电话　0546-8392565)

出 版 者: 石油大学出版社(山东　东营,邮编　257062)
网　　址: http://sunctr.hdpu.edu.cn/~upcpress
电子信箱: upcpress@mail.hdpu.edu.cn
印 刷 者: 山东沂南印刷总厂
发 行 者: 石油大学出版社(电话　0546-8392563,8391797)
开　　本: 787×1092　1/16　印张:16　字数:529千字
版　　次: 2001年9月第1版第2次印刷
定　　价: 16.80元

金桃李三基书系

3+X 高考速·效·通

金桃李三基书系

3+X高考速·效·通

（数　学）

编 者 名 单

主　编	尹玉柱			
编　者	徐　辉	张　颉	路庆利	胡廷国
	李洪光	陈瑞青	刘　伟	于善胜
	陈伟钢	安玉宝	谭玉帮	王景龙
	梁晓辉	张则玉	张世敏	张新敏
	仪　成	张合钦	任晓夫	李振威
	袁荣亮	李应杰	周显明	刘锡宝

前 言

本书是依据高中数学教材内容，贯彻教育部关于教育改革的最新精神，在精心研究近几年"考试说明"及近几年高考题（特别是 2000 年与 2001 年的高考题）的基础上，针对 2002 年的考生而编写的。在编写过程中，力求体现素质教育的理念，立足于落实"三基"，培养能力，提高素养，突出对创新意识及实践能力的培养。

本书共分两大部分。

第Ⅰ部分 单元复习 根据"考试说明"，把要考的数学内容归纳为 13 个单元，每单元均由"知识与能力"、"能力训练题"、"训练题参考答案"三大板块组成。其中"知识与能力"板块按本单元"知识网络"、"考点精析"、"高考要求及命题方向预测"、"范例研究"等四部分编写。"能力训练题"板块紧密结合高考要求，精心编写训练题组，以检测学生对本单元知识、技能、方法的掌握程度及灵活运用的能力。

第Ⅱ部分 实战演练 根据最新考试说明及近几年高考命题的特点，精心组织编写了四套综合模拟题，供学生进行实战演练时使用，从而进一步提高应考能力。

本书具有定位准确、格式新颖、实用性、创造性、导向性等特点，是高三学生备考的"良师益友"。

在全书的编写过程中，我们尽了最大的努力，但不当之处在所难免，真诚期望广大读者批评指正。

编 者

2001 年 8 月

《高考速·效·通》数学

目录

第Ⅰ部分 单元复习

第Ⅱ部分 实战演练

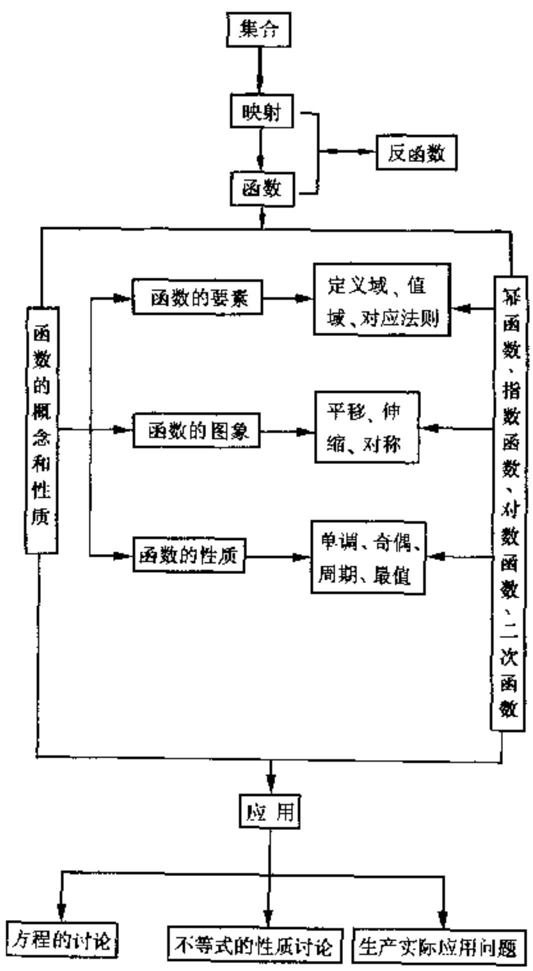
第I部分

单元复习

第一单元　幂函数、指数函数和对数函数

知识与能力

知识网络



考点精析

函数是高中数学的重要内容，近几年高考均对函数内容作重点考查．高考数学试题全面考查三基（基础知识、基本技能、基本思想和方法），又突出对能力的考查和对数学思想方法的考查．

对集合、映射的考查，主要是对概念、法则的理解以及基本运算的考查，以低档题为主．

对函数图象性质的考查，既有中低档题，又有大综合题，特别是应用题数学模型，这都很好地体现了函数在数学中的极其重要的地位．

函数思想是中学数学四大思想之一．运动变化思想是函数思想的灵魂，在函数部分乃至整个中学数学都有重要体现．分类讨论思想、数形结合思想、转化与化归思想在函数部分随处可见，要加以领会、总结．面向全局的整体观解题策略，在函数部分也有所体现，要深刻反思，培养素质，提高能力．

1．本单元的重点

掌握有关集合的基本概念及映射、函数与反函数的概念；掌握幂函数、指数函数和对数函数的概念、图象及其性质；掌握指数方程和对数方程的常用解法；运用有关函数的知识解决实际问题．

（1）反函数是一种特殊的映射．对于函数 $y=f(x)$ 来说，只有当定义域集合 A 与值域集合 C 之间的元素具有一一对应关系时，才存在反函数 $y=f^{-1}(x)$．原函数的定义域和值域分别是其反函数的值域和定义域．对函数与其反函数的关系一定要深刻理解．

【例1】 设 $f(x)=\dfrac{2x+1}{4x+3}$ $(x\in \mathbf{R}$，且 $x\neq -\dfrac{3}{4})$，则 $f^{-1}(2)=$______．

根据函数与反函数的关系求 $f^{-1}(2)$ 的值，就是求 $f(x)=2$ 时 x 的值，于是令 $f(x)=2$，解方程即可．

（2）指数函数和对数函数是中学教材中两个非常重要的函数，对其图象和性质要切实掌握，并能灵

活运用,特别是这两类函数图象的变换,在高考试题中常以选择题形式出现.

【例 2】 (1997 高考试题)将 $y=2^x$ 的图象经过怎样的变换后,再作关于直线 $y=x$ 对称的图象,可得到函数 $y=\log_2(x+1)$ 的图象. ( )

A. 先向左平行移动 1 个单位

B. 先向右平行移动 1 个单位

C. 先向上平行移动 1 个单位

D. 先向下平行移动 1 个单位

在图象的变换中,沿 x 轴方向移动要引起函数 $y=f(x)$ 中的 x 的变化;沿 y 轴方向移动要引起 $y=f(x)$ 中的 y 的变化;而关于直线 $y=x$ 对称,则需考虑其反函数 $y=f^{-1}(x)$.

(3) 指数方程、对数方程.应重视含参数的指数、对数方程的求解以及用数形结合的方法判断方程解的问题.

【例 3】 设 $p\in\mathbf{R}$,试讨论关于 x 的方程 $a^{3x}+2pa^{2x}+(p^2+1)a^x+p=0$ $(a>0, a\neq 1)$ 的实根的个数.

解 本题可用换元法设 $y=a^x$,将原方程变形为:

$y^3+2py^2+(p^2+1)y+p=0$.

即 $(y+p)(y^2+py+1)=0$ ①

∵ $y=a^x>0$ $(a>0, a\neq 1)$

∴ 原方程有实根等价于式①有正根.

方程 $y+p=0$ 有正根的条件是 $p<0$;

方程 $y^2+py+1=0$ 有正根的条件是:

$\begin{cases}\Delta=p^2-4\geqslant 0,\\ -p>0.\end{cases}$ 解得 $p\leqslant -2$.

综上可知:当 $p<-2$ 时,原方程有三个实根;

当 $p=-2$ 时,原方程有两个实根;

当 $-2<p<0$ 时,原方程有一个实根;

当 $p\geqslant 0$ 时,原方程无实根.

在求解含参数的指数、对数方程时,需综合应用指数函数与对数函数的性质、指数式与对数式的恒等变形、方程与不等式的同解变形等知识与方法.函数与方程、不等式相互制约、相辅相成,充分体现了三者的内在联系.

(4) 在应用函数的知识与方法解决数学问题和实际问题中,要从所熟悉的生活、生产和其他学科的实际问题出发,进行观察、比较、分析、综合、抽象、概括和必要的逻辑推理,建立数学模型,将实际问题转化为数学问题,再运用有关函数的知识加以解决,从而体现数学的社会化功能,激发学生的主体意识.

【例 4】 (2001 年文)设计一幅宣传画,要求画面面积为 4 840 cm^2,画面的宽与高的比为 $\lambda(\lambda<1)$,画面的上、下各留 8 cm 空白,左、右各留 5 cm 空白.怎样确定画面高与宽的尺寸,才能使宣传画所用纸张面积最小?

要解决这一实际问题,首先要确定关于面积 S 的目标函数.根据题意可设画面高为 x cm,则宽为 λx cm,于是有 $\lambda x^2=4\ 840$.

目标函数 $S=(x+16)(\lambda x+10)$

$=\lambda x^2+(16\lambda+10)x+160$.

再运用有关函数知识,求出当 S 最小时 x 的值即可.

2. 数学思想与数学方法

本单元涉及的数学思想与方法有函数方程思想、分类讨论思想、化归与转化思想、数形结合思想,分析法、综合法、反证法、配方法、换元法、待定系数法、比较法等.函数知识与中学数学的其他知识密切相关,体现了函数在高中数学中的重要地位.函数思想主要表现为函数的应用,一是借助有关初等函数的性质,解决有关求值、解(证)不等式、比较大小、解方程以及讨论参数的范围等.例如,求参数范围问题的常用方法——分离变量法,就是运用函数思想,通过分离变量,把求参数范围的问题化归为求函数的值域问题,从而使问题得以解决.二是通过建立函数关系式或构造函数,把所研究的问题转化为讨论函数的有关性质、图象等问题,达到化难为易、化繁为简的目的.例如,构造函数比较大小、证明不等式及建立函数模型解决有关最值问题的实际应用题等.

分类讨论是一种逻辑方法,也是一种数学思想.它具有鲜明的逻辑特点,能训练人的思维的条理性和概括性.

转化是一种重要的解题方法,其中化简是最基本、最重要的转化.化繁为简,化生为熟,把不规范问题转化为规范的、纯数学的问题,是解决所有较难问题的思路.函数部分经常遇到对函数化简之后再研究函数的性质和图象.转化包括等价转化和非等价转化,非等价转化必须对结果进行修正,如解方程中的验根即是如此.

数形结合思想的应用主要是借助函数的图象解决问题.运用数形结合思想解决问题时,首先要深刻理解条件及待研究问题的几何意义,力图在数形结合上寻找思路.典型的数形结合问题是二次方程根的分布理论的应用.

中学数学方法中的分析法、综合法、反证法、比较

法、配方法、换元法、待定系数法等在函数部分有广泛的应用，应引起我们的高度重视．

高考要求及命题方向预测

1．高考要求

近年来各级各类考试，尤其是在高考中，对本单元内容的考查主要体现在以下几个方面：

(1) 集合的概念和运算．

(2) 函数的概念与函数的定义域、值域和函数解析式．

(3) 函数性质．主要体现在对单调性、奇偶性和周期性等函数性质的考查．

(4) 反函数．要求会求反函数，并掌握反函数与原函数间的关系．

(5) 指数函数和对数函数．要求熟练掌握它们的性质与图象．

(6) 指数方程与对数方程．

函数是高中数学的重要内容，近几年高考均对函数内容作重点考查．

对集合、映射的考查，主要是对概念、法则的理解及基本运算的考查，以低档题为主．

对函数图象、性质的考查，既有中低档题，又有大综合题．

函数思想是中学数学四大思想之一．

另外，二次函数一直是函数的重点内容．定义在区间上的二次函数极值问题在整个极值问题中也占较大的比重．

2．命题方向预测

从高考试题看，有关函数的试题在每份试卷中都占较大的比例．代数函数在全国高考试题中每年占总分的 17% 左右，超过本单元在教材中所占课时的比例，在全卷中所占比例最大．函数知识是高中数学最重要的内容，又是学习高等数学的基础，注重初等数学中与高等数学相衔接的内容是高考数学命题的特点．从试卷上分析，对函数知识与函数思想的考查往往与不等式、数列、三角、解析几何知识的考查结合起来，不论选择题、填空题还是解答题，有关函数的综合题大多难度较大，这就要求考生不但要掌握好基础知识、基本概念，还要具备较强的逻辑推理能力和分析问题能力

本单元命题的主要题型、命题趋势与考查程度是：

(1) 集合的概念和运算．近年来考查集合知识多以选择题形式出现．试题体现了集合在中学数学中的基础性与工具作用，难度不大．要求概念清楚，会正确表示集合．

(2) 函数的概念与函数的定义域、值域和函数解析式．预计将来会重视在应用问题中对函数解析式与定义域的考查，要求考生根据题意建立数学模型，写出函数解析式．应用问题是高考的热点，要求考生会把实际问题转化为数学问题．

(3) 函数性质．对函数的考查从试题上看，更集中地体现在对函数性质的考查，主要是奇偶性与单调性的考查．要求考生会利用单调性比较大小，求函数的最值与解不等式，并要求会用定义证明函数的单调性．从 2001 年高考试题来看，对函数周期性问题的考查要求也越来越高．

【例 1】 (2001 年文)设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，其图象关于直线 $x=1$ 对称，对任意 $x_1,x_2\in[0,\frac{1}{2}]$ 都有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$．证明：$f(x)$ 是周期函数．

分析　要证明 $f(x)$ 是周期函数，需利用定义，对于任意 x，存在不为零的常数 T，使得 $f(x+T)=f(x)$ 成立．

解　依题设 $y=f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称，

故 $f(x)=f(1+1-x)$，

即 $f(x)=f(2-x)$，$x\in\mathbf{R}$．

又由 $f(x)$ 是偶函数知 $f(-x)=f(x)$，$x\in\mathbf{R}$，

$\therefore\ f(-x)=f(2-x)$，$x\in\mathbf{R}$，

将上式中 $-x$ 以 x 代换，得

$f(x)=f(x+2)$，$x\in\mathbf{R}$．

这表明 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的周期函数，且 2 是它的一个周期．不难看出，尽管教材中周期性问题是在三角函数内容中出现的，但高考要考查知识的内在联系，因而一般函数的周期性问题也成为将来高考的重点内容之一．

(4) 反函数．可能在反函数的求法，反函数的定义域、值域与原函数定义域、值域的关系以及它们之间的图象关系这些方面命题，以选择、填空题型的中低档题为主．

(5) 幂函数、指数函数和对数函数．应熟练掌握它们的性质与图象．除了了解基本函数的图象外，还会在图象的平移变换、对称变换等问题上命制选择题．

(6) 指数方程与对数方程．这类题目会考查用数形结合的思想及分类讨论的思想，解含字母参数的问题．

(7) 一次函数和二次函数，这些内容会结合一些最值问题以综合题形式出现，应予以重视.

(8) 函数问题以几何问题为背景是高考命题的新趋向，这样将解析几何与函数、方程、不等式联系在一起，加强了知识的内在联系，体现掌握知识的整体性和综合性.

解析几何中，直线与圆锥曲线的综合问题，常常用代数的知识和方法去解决，如用韦达定理求表示两点间的距离，用根的判别式判定直线与圆锥曲线的位置关系，用函数、不等式的知识求某些量的范围等.

【例2】 (1) 已知 A 点在圆 $C:x^2+(y-2)^2=\frac{1}{3}$ 上运动，B 点在椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上运动，求 $|AB|$ 的最大值；

(2) $u、v\in\mathbf{R}$，且 $|u|\leqslant\sqrt{2}$，$v>0$，求 $(u-v)^2+(\sqrt{2-u^2}-\frac{9}{v})^2$ 的最小值.

分析 (1) 要求 $|AB|$ 的最大值，可转化为求 $|CB|$ 的最大值. C 为圆心，B 点在椭圆上，故可用两点间距离公式转化为只含有一个变量的极值问题，借助于函数知识求解.

(2) 要求解一个代数问题，可联想两点间距离公式，问题可转化为求两点 $(u,\sqrt{2-u^2})$，与 $(v,\frac{9}{v})$ 的距离的最小值，故可用解析几何方法求解.

解 (1) 设 $B(x_1,y_1)$，则 $|CB|^2=x_1^2+(y_1-2)^2=x_1^2+y_1^2-4y_1+4=-3(y_1+\frac{2}{3})^2+\frac{28}{3}$，$y\in[-1,1]$.

当 $y_1=-\frac{2}{3}$ 时，$|CB|$ 的最大值为 $\frac{2}{3}\sqrt{21}$，故 $|AB|$ 的最大值为 $\frac{2\sqrt{21}+\sqrt{3}}{3}$.

(2) 设点 $M(u,\sqrt{2-u^2})$，$N(v,\frac{9}{v})$，点 M 可看成是半圆 $x^2+y^2=2\ (y\geqslant0)$ 上的点，点 N 可看成是双曲线 $xy=9\ (x>0)$ 上的点，则其最小值为 8.

说明：本题体现了数形结合的思维方法.

范例研究

【例1】 实数集 A 满足下列条件

① 任两个不同元素之和都是 A 的元素；

② 任两个不同元素之积都是 A 的元素；

③ 任一个元素的 n 次幂都是 A 的元素，$n\in\mathbf{N}$.

这样的有限集 A 有　　(　　)

A. 无穷多个　　B. 2 个

C. 3 个　　D. 4 个

解析 本题表面看实数集 A 满足三个条件，而实际上是四个，要注意条件③与"有限集"的结合，再加"实数"这一限制条件，首先可获得基本元素：0，-1，1，由此可知 $A=\{0,1\}$ 或 $\{0,1,-1\}$，故选 B.

本题若把实数集 A 改为复数集，并删去条件①，结论将怎样？请读者思考.

评述 审题是解题的第一步，是解题的前提. 要注意从整体上把握题目的条件与结论，注意条件与结论之间的联系，注意用辩证的观点解决问题.

【例2】 已知全集 $A=\{x|x^2+(m+2)x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$，若 $A\cap\{正实数\}=\varnothing$，求实数 m 的取值范围.

解析 由题意知，A 为方程 $x^2+(m+2)x+1=0$ 在 $\mathbf{R}$ 上的解集.

当 $\Delta<0$，即 $-4<m<0$ 时，$A=\varnothing$，显然符合题意.

当 $\Delta\geqslant0$，即 $m\geqslant0$ 或 $m\leqslant-4$ 时，

$\because x_1x_2=1>0$，

$\therefore$ 令 $x_1+x_2<0$，得 $m\geqslant0$.

综上知 $m>-4$.

评述 根据条件建立关于 m 的不等式是求解本题的关键.

【例3】 已知集合 $P=\{(x,y)|(x+2)^2+(y-3)^2\leqslant4\}$，$Q=\left\{(x,y)|(x+1)^2+(y-m)^2<\frac{1}{4}\right\}$，且 $P\cap Q=Q$，求实数 m 的取值范围.

解析 集合 P 表示以 $(-2,3)$ 为圆心，以 2 为半径的圆围成的区域（包括圆周）. 集合 Q 表示以 $(-1,m)$ 为圆心，以 $\frac{1}{2}$ 为半径的圆的内部. 由 $P\cap Q=Q$，结合两圆的位置关系得：

$$(-1+2)^2+(m-3)^2\leqslant\left(2-\frac{1}{2}\right)^2.$$

解之得：$3-\frac{\sqrt{5}}{2}\leqslant m\leqslant3+\frac{\sqrt{5}}{2}$.

【例4】 映射 $f:A\to B$ 中，A，B 是以自然数为元素的集合，A 中元素 n 在 B 中的象是 2^n+n. 在映射 f 下，求象 20 的原象.

解析 由题意，问题化归为解方程 $2^n+n=20$. 而这类方程的求解不在掌握之列，但有两点可以促成问题解决. 一是 n 为自然数，而象 20 数值较小；二是函数 $f(n)=2^n+n$ 为增函数. 考查验证，易知原象为 4.

评述 映射是近代数学的重要基本概念，也是函数定义的基础．要理解映射概念，特别要把握好象与原象的存在性与惟一性．

【例5】 对于适合$|p|\leqslant 2$的任一实数，定义集合$A=\{x\mid x^2+px+1>2x+p\}$，求所有这样的集合$A$的交集．

解析 由$|p|\leqslant 2$知$-2\leqslant p\leqslant 2$．

而由$x^2+px+1>2x+p$得

$[x-(1-p)](x-1)>0$．

当$-2\leqslant p<0$时，$1<1-p\leqslant 3$，

此时$A=\{x\mid x>1-p$或$x<1\}$．

当$0\leqslant p\leqslant 2$时，$-1\leqslant 1-p\leqslant 1$，

此时$A=\{x\mid x<1-p$或$x>1\}$．

结合数轴知，所求集合为$\{x\mid x<-1$或$x>3\}$．

本题还可化归为关于p的不等式$(x-1)p+x^2-2x+1>0$恒成立时，求解集合A．

令$f(p)=(x-1)p+x^2-2x+1$．

$f(p)>0$在$p\in[-2,2]$上恒成立．

$\therefore \begin{cases} f(-2)>0, \\ f(2)>0. \end{cases}$

即$\begin{cases} x^2-4x+3>0, \\ x^2-1>0. \end{cases}$

得$\begin{cases} x>3 \text{ 或 } x<1, \\ x>1 \text{ 或 } x<-1. \end{cases}$

$\therefore x>3$或$x<-1$．

即$A=\{x\mid x>3$或$x<-1\}$．

评述 第二种方法化归思路不容易想到，但解题较易．

【例6】 用长为L的铁丝弯成下部为矩形，上部为半圆形框架，如图1-1，若矩形底边长为$2x$，求此框架围成图形的面积y与x的函数关系$y=f(x)$，并求出它的定义域．

解析 易知图形的面积可分为两部分求解．

$\because AB=2x$，$\overset{\frown}{CD}=\pi x$，

$\therefore AD=\frac{1}{2}(L-2x-\pi x)$．

$\therefore y=2x\cdot\frac{1}{2}(L-2x-\pi x)+\frac{1}{2}\pi x^2$

$=-\frac{\pi+4}{2}x^2+Lx$．

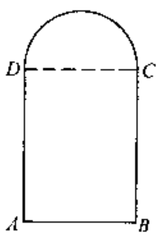


图 1-1

$\because \begin{cases} x>0, \\ \frac{L-2x-\pi x}{2}>0, \end{cases}$

$\therefore 0<x<\frac{L}{2+\pi}$．

故所求解析式为$y=-\frac{\pi+4}{2}x^2+Lx$，定义域为$\left(0,\frac{L}{2+\pi}\right)$．

评述 实际问题的目标函数的定义域既要求有实际意义，又要求有数学特征．如在实际生活中，本题中的x不能无限趋近于0．而在数学上则让其趋近于这一值．

【例7】 已知$f(x+1)$的定义域为$[-2,0)$，求函数$F(x)=f(1-x)+f(1-x^2)$的定义域．

解析 首先由$x\in[-2,0)$知，$x+1\in[-1,1)$，

令$t=x+1$，则$f(t)$的定义域为$[-1,1)$，

令$\begin{cases} -1\leqslant 1-x<1, \\ -1\leqslant 1-x^2<1, \end{cases}$

即$\begin{cases} 0<x\leqslant 2, \\ -\sqrt{2}\leqslant x<0 \text{ 或 } 0<x\leqslant\sqrt{2}, \end{cases}$

$\therefore 0<x\leqslant\sqrt{2}$．

即$F(x)$的定义域为$(0,\sqrt{2}]$．

评述 注意$f(x)$与$f[g(x)]$定义域的互求方法：

已知$f(x)$的定义域求$f[g(x)]$的定义域主要用解不等式(组)法．

已知$f[g(x)]$的定义域求$f(x)$的定义域用求值域的方法．

【例8】 已知函数$y=\sqrt{mx^2-6mx+m+8}$的定义域为$\mathbf{R}$，求实数m的取值范围．

解析 首先$m=0$时，显然适合题意．$m\neq 0$时，需有

$\begin{cases} m>0, \\ \Delta=(-6m)^2-4m(m+8)\leqslant 0, \end{cases}$

解得$0<m\leqslant 1$，

$\therefore m\in(0,1]$．

评述 要注意对首项系数m为正、负、零的讨论；注意$\Delta>0$还是$\Delta<0$，等号是否成立等．

【例9】 求函数$y=x+\sqrt{x-1}$的值域．

解析 函数定义域为$x\geqslant 1$，函数在$[1,+\infty)$上单调递增．易求得函数值域为$[1,+\infty)$．

或设$\sqrt{x-1}=t$，则$t\geqslant 0$，$x=t^2+1$，

$\therefore y=t^2+t+1(t\geqslant 0)$．

易求值域为$[1,+\infty)$．

评述 对$y=f(x)\pm\sqrt{g(x)}$(注：$f(x)$，$g(x)$均为x的一次式)型函数的值域的一般求法为换元法，

即设 $\sqrt{g(x)}=t$，把函数转化为二次函数求解，要注意 t 的范围．若函数具有单调性，当然用单调性求解较易．

本题还可考虑用判别式法和几何法（设 $x=t$，$y=\sqrt{t-1}$）求解．

【例 10】 求函数 $y=\frac{\sin x}{2-\cos x}$ 的值域．

解析 （1）此类三角函数的值域，可借助三角函数的有界性求解，将函数变形为 $\sin x-y\cos x=2y$，即 $\sqrt{y^2+1}\sin(x+\varphi)=2y$，令 $\sqrt{y^2+1}\geqslant|2y|$，得 $-\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant y\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$．

（2）由于 $y=-\frac{\sin x}{2-\cos x}=\frac{0-(-\sin x)}{2-\cos x}$，记 $A(2,0)$，$P(\cos x,-\sin x)$，则点 P 的轨迹为单位圆，此时 $y=k_{AP}$，结合图形，易得 $y\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$．

（3）设 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$，则 $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，

$\therefore y=\frac{2t}{3t^2+1}$．

当 $t=0$ 时，$y=0$；当 $t\neq0$ 时，$y=\frac{2}{3t+\frac{1}{t}}$．

$\because 3t+\frac{1}{t}\geqslant2\sqrt{3}$ 或 $3t+\frac{1}{t}\leqslant-2\sqrt{3}$，

$\therefore y\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)\cup\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$．

综上所述得 $y\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$．

评述 一题多解可以培养发散思维能力，而发散思维又是创造性思维的重要依托，因此要加强一题多解训练．

【例 11】 在测量某物理量的过程中，因仪器和观察的误差，使得 n 次测量分别得到 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 共 n 个值．我们规定所测量物理量的最佳近似值 a 是这样一个量：与其他近似值比较，a 与各数据的差的平方和最小．依此规定，求 a 的值．

解析 记函数 $y=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\cdots+(x-a_n)^2=nx^2-2(a_1+a_2+\cdots+a_n)x+a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$，$a$ 即 y 取最小值时的 x 的值，故 $a=\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$．

评述 本题原为 1994 年高考题（填空题），当时是一道新颖的难题．解本题的关键是正确理解题意，建立目标函数．

【例 12】 函数 $f(x)=\frac{ax+b}{x^2+1}$ 的值域为 $[-1,4]$，求实数 a,b 的值．

解析 由 $y=\frac{ax+b}{x^2-1}$ 得

$yx^2-ax+y-b=0$．

易知 $y=0$ 时，只需 $a\neq0$ 及 $x=-\frac{b}{a}$ 即可．

当 $y\neq0$ 时，

令 $\Delta=a^2-4y(y-b)\geqslant0$，

即 $4y^2-4by-a^2\leqslant0$．

由题意知，$-1,4$ 是方程 $4y^2-4by-a^2=0$ 的解．

由此可求得 $a=\pm4$，$b=3$．

评述 已知值域（极值、极限等）求参数，往往要走求值域（极值、极限等）的道路．

【例 13】 判断下列函数的奇偶性：

（1）$f(x)=\begin{cases}0 & (x\text{ 为无理数}),\\ 1 & (x\text{ 为有理数});\end{cases}$

（2）$f(x)=\frac{1-\sin x-\cos x}{1+\cos x+\sin x}$；

（3）$f(x)=\arccos x-\frac{\pi}{2}$；

（4）$f(x)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-1}$．

解析 （1）当 x 是有理数时，$-x$ 也是有理数，$f(-x)=1=f(x)$．

同理，当 x 是无理数时，$f(-x)=0=f(x)$．

故 $f(x)$ 为偶函数．

（2）首先对 $f(x)$ 进行化简，这是解题常识，

$$f(x)=\frac{1+\sin x-\cos x}{1+\cos x-\sin x}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}{2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}=\operatorname{tg}\frac{x}{2},$$

$\because f(-x)=-f(x)$，

故 $f(x)$ 为奇函数．

这是典型的错误判断，主要原因是忽视了定义域．因为在变形过程中，未知数的范围产生了变化，而这种变化又恰好影响了奇偶性．

事实上，由 $1+\cos x+\sin x\neq0$ 知 $x\neq(2k+1)\pi$，$x\neq2k\pi-\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，结合图象或数轴可以发现 $x=\frac{\pi}{2}$，而 $x\neq-\frac{\pi}{2}$，即定义域不关于原点对称，故不具有奇偶性，所以 $f(x)$ 是非奇非偶函数．

（3）$\because f(-x)=\arccos(-x)-\frac{\pi}{2}$

$$=(\pi-\arccos x)-\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{\pi}{2}-\arccos x$$

$= -f(x)$,

$\therefore f(x)$为奇函数.

也可由 $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$,知函数 $f(x)=-\arcsin x$ 为奇函数.

(4) 易知 $f(x)$为偶函数.但因 $f(x)$的定义域为$\{-1,1\}$,进而知$f(x)=0$.

故 $f(x)$既是奇函数又是偶函数.

评述 (1) 变形是解题的前提,要切实注意非恒等变形带来的后果.这里再次指出定义域是构成函数的三要素之一,研究函数的任何问题都要注意定义域.

(2) 判断函数的奇偶性,不要轻易地下结论;对较难变形判断的,可研究 $f(x)\pm f(-x)$的值是否为 0, $\frac{f(x)}{f(-x)}$的值是 1 还是 -1,然后再做出判断.如(2)不是奇函数,而问题(4)既是奇函数又是偶函数.

【例 14】 定义在$[-2,2]$上的偶函数 $g(x)$,当 $x\geqslant 0$ 时,$g(x)$单调递减,若 $g(1-m)<g(m)$,求实数 m 的取值范围.

解析 $\because g(1-m)<g(m)$, $g(x)$为偶函数,

$\therefore g(|1-m|)<g(|m|)$.

又 $g(x)$在$[0,2]$上单调递减,

$\therefore |m|<|1-m|\leqslant 2$.

解之得 $-1\leqslant m<\frac{1}{2}$.

故 $m\in\left[-1,\frac{1}{2}\right)$.

评述 此类题目比较常见,常用的处理方法是:先通过移项,借助奇偶性化归为同一单调区间上两函数值的大小;再借助单调性,结合定义域化归为不等式(组)求解.

【例 15】 定义在 **R** 上的奇函数 $f(x)$满足 $f(x)=f(x+4)$,且 $f(3)=0$,试问方程 $f(x)=0$ 在区间$(0,10)$上至少有几个解?

解析 由周期 $T=4$ 知 $x=3$, $x=7$ 是 $f(x)=0$ 的解.

由奇偶性知 $f(-3)=0$,结合周期性知 $x=1,5,9$ 是 $f(x)=0$ 的根.

由奇偶性知 $f(0)=0$,从而 $x=4,8$ 也是 $f(x)=0$ 的根.

对 $f(x)=f(x+4)$用赋值法.令 $x=-2$,则

$f(-2)=f(2)$,

$\therefore f(2)=0$,从而 $f(6)=0$.

故至少有 9 个解.

评述 本题条件多,隐含条件更多,不易正确理解题意.

【例 16】 证明函数 $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$在 **R** 上递增.

解析 先变形 $f(x)=1-\frac{2}{2^x+1}$,设 $x_1<x_2$,则

$$\begin{aligned}f(x_2)-f(x_1)&=\left(1-\frac{2}{2^{x_2}+1}\right)-\left(1-\frac{2}{2^{x_1}+1}\right)\\&=\frac{2}{2^{x_1}+1}-\frac{2}{2^{x_2}+1}\\&=\frac{2(2^{x_2}-2^{x_1})}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}\\&=\frac{2\cdot 2^{x_1}(2^{x_2-x_1}-1)}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}.\end{aligned}$$

$\because 2^{x_2-x_1}>1$,

$\therefore f(x_2)-f(x_1)>0$.

$\therefore f(x)$为增函数.

评述 证明单调性的常用方法是利用单调性的定义.

本题在化归到$\frac{2(2^{x_2}-2^{x_1})}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}$时,禁用指数函数 $y=2^x$ 的单调性直接得出 $2^{x_2}-2^{x_1}>0$.而是通过化归,用幂的性质(注意不是幂函数的性质)获解.

【例 17】 已知函数 $f(x)$对任意 $x,y\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$,且 $x>0$ 时,$f(x)<0$, $f(1)=-2$.

(1) 求证 $f(x)$为奇函数;

(2) 求 $f(x)$在$[-3,3]$上的最大值和最小值.

解析 (1) 令 $x=y=0$,知 $f(0)=0$;再令 $y=-x$,则 $f(0)=f(x)+f(-x)=0$,

$\therefore f(x)$为奇函数.

(2) 任取 $x_1<x_2$,则 $x_2-x_1>0$.

$$\begin{aligned}\therefore f(x_2-x_1)&=f[x_2+(-x_1)]\\&=f(x_2)+f(-x_1)\\&=f(x_2)-f(x_1)<0.\end{aligned}$$

$\therefore f(x)$为减函数.

而 $f(3)=f(2+1)=f(2)+f(1)=3f(1)=-6$,

$f(-3)=-f(3)=6$,

$\therefore f(x)_{\max}=f(-3)=6$, $f(x)_{\min}=f(3)=-6$.

评述 求值域时,要首先想到利用函数的单调性与奇偶性.

【例 18】 设函数 $f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的增函数,a 和 b 是实数.

(1) 求证:如果 $a+b\geqslant 0$,那么 $f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$;

(2) 判断(1)的逆命题是否正确,并证明你的结论.

解析 (1) $\because f(x)$为增函数,$a\geqslant -b$,

$\therefore f(a)\geqslant f(-b)$.

同理 $f(b)\geqslant f(-a)$.

$\therefore f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$.

(2) 猜想逆命题成立,即若命题 $f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$,则 $a+b\geqslant 0$.

反证法证明如下:

若不成立,则可能有 $a+b<0$.

此时 $a<-b$, $b<-a$.

$\because f(x)$为增函数,

$\therefore f(a)<f(-b)$, $f(b)<f(-a)$.

$\therefore$ 必有 $f(a)+f(b)<f(-a)+f(-b)$.

这与已知 $f(a)+f(b)\geqslant f(-a)+f(-b)$ 相矛盾,故假设错误,必有 $a+b\geqslant 0$.

评述 单调性是解不等式、证明不等式和比较大小的重要依据.

【例 19】 如图 1-2,液体从一圆锥形漏斗注入一圆柱形桶中,开始时漏斗盛满液体.经过 3 min 注完.已知圆柱形桶中液面上升的速度是一个常数,H 是圆锥形漏斗中液面下落的距离,则 H 与下落时间 t(min)的函数关系用图象表示只可能是 ( )

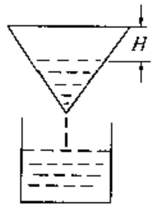
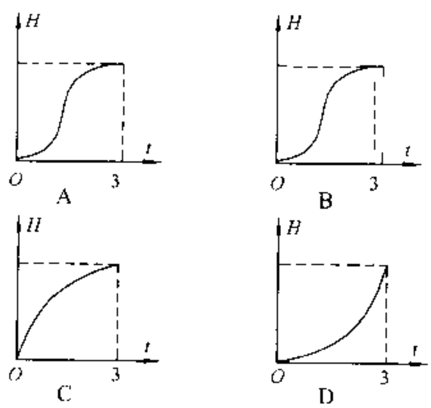


图 1-2



解析 解答本题要抓住两点:一是液面匀速上升;二是变量为 H. H 随 t 的快慢变化,是先慢后快,从而选 D.

本题也可用特殊值法:$t=\frac{3}{2}$ min, H 未达一半而选 D.

【例 20】 把函数 $y=2x^2-2x$ 的图象向右平移 2 个单位,再向下平移 3 个单位,求所得图象对应的函数.

解析 向右平移 2 个单位后得到

$y=2(x-2)^2-2(x-2)=2x^2-10x+12$.

再向下平移 3 个单位,得 $y=2x^2-10x+9$.

评述 $y=f(x)$向右平移 a 个单位得 $y=f(x-a)$;

$y=f(x)$向左平移 a 个单位得 $y=f(x+a)$;

$y=f(x)$向上平移 b 个单位得 $y=f(x)+b$;

$y=f(x)$向下平移 b 个单位得 $y=f(x)-b$.

将 $f(x)$图象上各点横坐标变为原来的 $\frac{1}{\omega}$(纵坐标不变),得到 $f(\omega x)$的图象;

将 $f(x)$图象上各点纵坐标变为原来的 a 倍(横坐标不变),得到 $af(x)$的图象.

【例 21】 如图 1-3,若函数 $y=mx$ 与函数 $y=\frac{|x|-1}{|x-1|}$的图象无公共点,求实数 m 的取值范围.

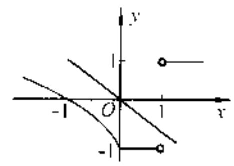


图 1-3

解析 $y=\frac{|x|-1}{|x-1|}$

$$=\begin{cases}1+\frac{2}{x-1}, & (x<0)\\ -1, & (0\leqslant x<1)\\ 1. & (x>1)\end{cases}$$

数形结合得:$-1\leqslant m<-3+2\sqrt{2}$.

评述 用数形结合法做解答题要注意两点:一是要正确地画出图形;二是要有必要的解题步骤(语言叙述).

若题目改为"方程 $mx=\frac{|x|-1}{|x-1|}$有解,求 m 的范围",是否仍可使用此法?

【例 22】 已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的图象如图 1-4,则 ( )

A. $b\in(-\infty,0)$

B. $b\in(0,1)$

C. $b\in(1,2)$

D. $b\in(2,+\infty)$

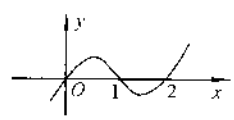


图 1-4

解析 结合图形对解析式进行变形得

$f(x)=ax(x-1)(x-2)$.

易得 $b=-3a$.

取 x_0 为一"小正数",发现 $a>0$,从而 $b<0$.

故选 A.