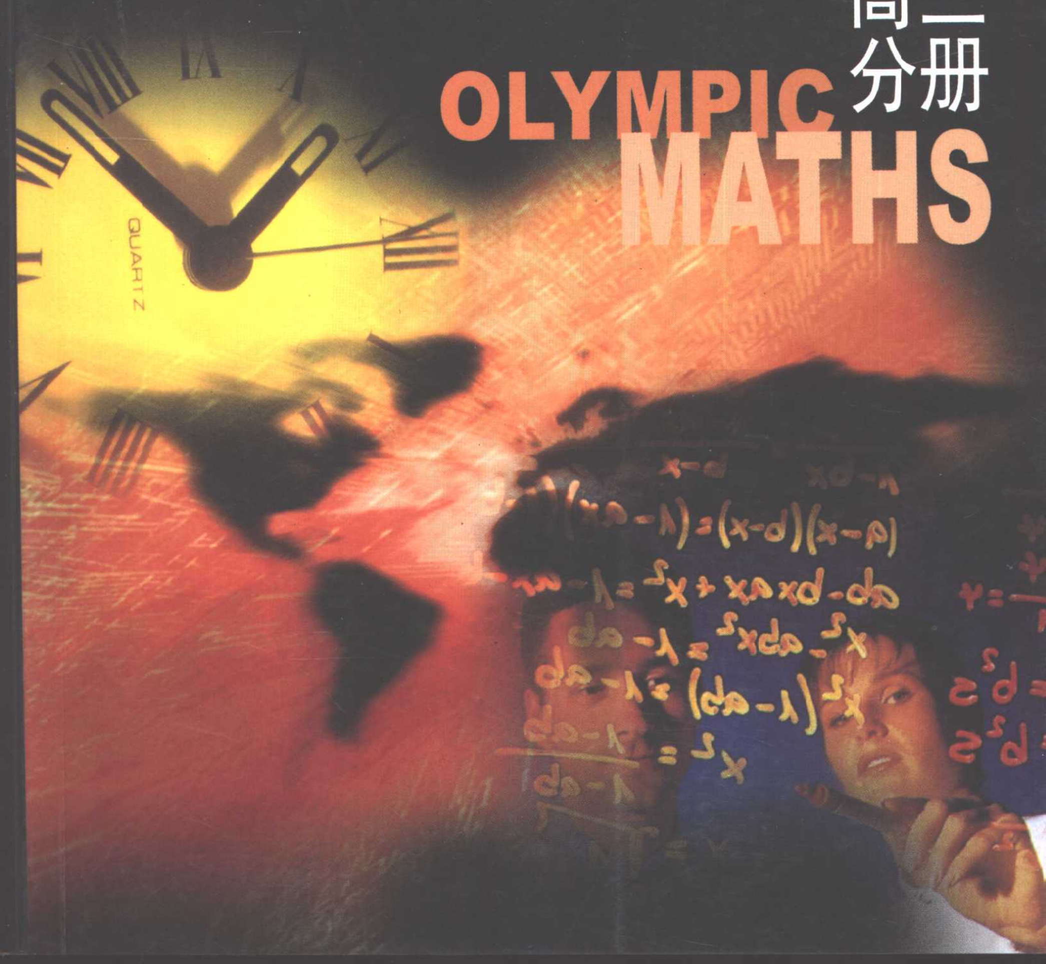
# 奥林匹克数学

钱展望 朱华伟／编著

湖北教育出版社

高三分册

OLYMPIC MATHS



金 牌 教 练 教 你 学

# 奥林匹克数学

## 高三分册 MATHS

钱展望 朱华伟 编著

湖北教育出版社

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

奥林匹克数学．高三分册/钱展望,朱华伟主编．—武汉：湖北教育出版社,2002
(奥林匹克数学系列丛书)
ISBN 7-5351-3145-X

Ⅰ.奥… Ⅱ.①钱…②朱… Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 011147 号

出版 发行:湖北教育出版社　武汉市青年路 277 号
网址:http://www.hbedup.com　邮编:430015 传真:027-83619605
邮购电话:027-83669149

经 销:新 华 书 店
印 刷:湖北新华印务有限公司　(430034·武汉市解放大道 145 号)
开 本:850mm×1168mm 1/32　11.75 印张
版 次:2002 年 3 月第 1 版　2002 年 3 月第 1 次印刷
字 数:290 千字　印数:1-5 000

ISBN 7-5351-3145-X/G·2551　定价:14.00 元

# 前言

数学是人类理性文明高度的结晶，数学文化是人类文明的重要组成部分。中国和其他文明古国都曾为古代的数学文化做出过不可磨灭的贡献。数学对近代及现代科学技术与生产力的迅速发展起了重要的推动作用。过去三百年中，物理学中的自然界的基本规律都是用数学表述的。近代科学技术新纪元的开辟者牛顿曾将他毕生最重要的著作命名为《自然哲学的数学原理》。20世纪最伟大的科学家爱因斯坦在他的自述文章中也一再谈到数学对他的成长和对他毕生成就的根本影响。随着科学技术的发展，电子计算机的发明和发展，数学不仅是整个自然科学的基础，同时也是工程科学和技术、信息科学和技术、经济科学、管理科学乃至某些人文科学必不可少的工具。提高人才的数学素质已成为一项迫在眉睫的重要任务。

世界上第一次真正有组织的数学竞赛始于匈牙利数学竞赛(1894年)。一个多世纪的数学奥林匹克活动的实践和研究证明，科学合理地举办各级数学奥林匹克活动，对于传播数学思想方法，激发学生学习数学的兴趣，培养学生的创新精神，提高学生的数学素养、思维能力、促进数学教师素质的提高和数学教育改革，发展和选拔优秀人才等都是十分有益的。

如何更为科学、合理、有效地开展数学奥林匹克培训活动，是我们数学教育工作者所面临的一个重要课题。建设科学、实用的培训教材则是这一课题取得进展的一大关键，是提高教学效益、提高教学质量的基本保证。作为一种尝试，本套书以笔者多年亲自培训数学奥林匹克选手积累的经验为基础，以众多的国内外数学奥林匹克文献为源泉，根据现行中学数学教学大纲，按年级分为初一分册、初二分册、初三分册、高一分册、高二分册、高三分册、方法与研究分册进行编写。它融奥林匹克数学的理论、方法与应用为一体，

充分考虑到日常课堂学习、各级数学竞赛的不同要求，以知识点为主线，尽量做到与课堂教学同步，由浅入深，由课内到课外逐步引申扩充，十分便利学生自学。

数学离不开解题。问题是数学的心脏，数学奥林匹克是解题的竞赛。要提高解题能力，练习是必不可少的。在本套书中，还专门为初一至高三各年级配备了训练题集，用作自我测试与评估。本套书所选例、习题中，既有传统的佳题，又有国内外近几年涌现的佳题，还有作者根据自己的教学实践编撰的新题，其中有相当一部分对帮助参加中、高考学生解答中、高考试卷中对能力要求较高的问题大有帮助，相信读者通过对这些问题的研讨、解答，会受益匪浅。

有必要指出的是，本书还有助于帮助读者破除对数学奥林匹克的神秘感，发现开发自己身上存在的巨大潜能，以增进自信，从而进一步大胆主动地去领略数学风采，探索数学世界奥秘。

本套书可供中等及中等以上程度的学生自学用，也可作为数学奥林匹克活动的指导参考书。

钱展望　朱华伟

2002年1月

**钱展望** 中学数学特级教师，湖北省数学学会理事，武汉市中学数学教研会副会长，中国数学奥林匹克高级教练，全国教育系统劳动模范，全国“五一”劳动奖章获得者，武汉市首届教育界十位名师之一，享受国务院政府特殊津贴。

多年来坚持因材施教，积极探索发展学生个性特长、优化学生思维品质的中学数学教育新路，成绩斐然，所辅导的武钢三中学生中，周彤等多人在国际数学奥林匹克中获金牌，先后有十数人入选国际中学生数学奥林匹克中国代表队。参与撰写了《中国著名特级教师教学思想录》（国家教委负责组织、柳斌主编，获第三届国家图书奖），论文《数学教学中优化学生思维品质的做法》、《关于数学教学的启发思考》，分别获得武汉市首届和第三届教育科研优秀成果一等奖，前者在中国教育学会成立十周年优秀论文评选中获奖，此外还撰写有《数学奥林匹克》高中知识篇、小学提高篇（北京大学出版社），主编《走向成功》高一数学、高二数学等书。

**朱华伟** 博士研究生，特级教师，美国洛杉矶加州州立大学访问学者，中国数学奥林匹克高级教练，湖北省十大杰出青年，首届湖北青年五四奖章获得者，湖北省有突出贡献的中青年专家，湖北省教育科研学术带头人，享受国务院政府特殊津贴，《华罗庚少年数学》编委，《中学数学》编委。

1993年任第33届国际数学奥林匹克中国队教练，1994年任全国高中数学联赛命题组成员，1996年任汉城国际数学竞赛中国队主教练，取得团体冠军和两枚金牌、一枚银牌、一枚铜牌的佳绩，连续任第四届、第五届、第六届、第七届全国华罗庚金杯赛武汉队主教练，获全国华罗庚金杯赛金牌教练奖和伯乐奖，2001年任第42届国际数学奥林匹克中国队教练。

发表论文40余篇，翻译、编著图书40余本，论文《数学奥林匹克对选手的能力要求》被评为全国中学数学期刊优秀论文，专著《奥林匹克数学教程》获武汉市教育学会优秀专著一等奖，在国家数学竞赛世界联盟第三次会议上交流。VCD教学录像《特级教师指导学习》获全国教育电视节目特别奖。

ISBN 7-5351-3145-X

9 787535 131454 >

定 价：14.00 元

# 目 录

# 第一讲　抽屉原理

## 知 识 点 和 方 法 述 要

1. **原理 1**　把 $n+1$ 个物体以任意方式全部放入 $n$ 个抽屉中,一定存在一个抽屉,它里面有两个或更多个物体.

**原理 2**　把 $mn+1$ 个物体以任意方式全部放入 $n$ 个抽屉中,一定存在一个抽屉,它里面有 $m+1$ 个或更多个物体.

**原理 3**　把 $m_1+m_2+\cdots+m_n+1$ 个物体以任意方式全部放入 $n$ 个抽屉里,那么或在第一个抽屉里至少放入 $m_1+1$ 个物体,或在第二个抽屉里至少放入 $m_2+1$ 个物体……或在第 $n$ 个抽屉里至少放入 $m_n+1$ 个物体.

当 $m_1=m_2=\cdots=m_n$ 时,原理 3 即原理 2,而更特殊些,$m_1=m_2=\cdots=m_n=1$ 时,即原理 1. 以上统称抽屉原理.

2. 存在性问题是数学研究中常遇到的问题. 一般地说,所谓"存在"指的是"至少有一个",仅须指明"存在",并不需要确切指出是哪一个,也不要确定通过什么办法把这个存在的物体找出来,更没有"惟一"的含义. 抽屉原理虽然简单、浅显,却正是解决存在性问题的强有力工具.

运用抽屉原理有两个主要环节:认识到运用抽屉原理的必要;制造抽屉.

## 例 题 精 讲

**例 1**　在前 91 个自然数中任取 10 个数. 求证:其中存在两个数,它们相互的比值在 $\left[\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right]$ 内.

**分析** 把同一抽屉内两数的相互比值限制在$\left[\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right]$内,作为逐步构造抽屉的出发点.

显然,“1”只能单独占一个抽屉 $A_1$;

2 可与 3 合在一起放在同一抽屉 $A_2$ 内;

继续分析下去,出现:

$$A_3=\{4,5,6\},$$
$$A_4=\{7,8,9,10\},$$
$$A_5=\{11,12,13,14,15,16\},$$
$$A_6=\{17,18,\cdots,25\},$$
$$A_7=\{26,27,\cdots,39\},$$
$$A_8=\{40,41,\cdots,60\},$$
$$A_9=\{61,62,\cdots,91\}.$$

把 $A_1,A_2,\cdots,A_9$ 作为抽屉,则上述同一抽屉内的数彼此两两之比均在$\left[\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right]$内.

现恰有 $A_1,A_2,\cdots,A_9$ 共 9 个抽屉,任取 10 个数,必有两数出于同一抽屉,故命题成立.

**例 2** 在前 200 个自然数中任取 101 个数,求证:一定存在两个数,其中一个是另一个的整数倍.

**分析** 根据给出的数据可作些估测:

(Ⅰ)整数倍指 $2^k$ 倍($k\in\mathrm{N}$);

(Ⅱ)把这 200 个自然数置放在 100 个抽屉内.

进一步制造抽屉:

$$A_1=\{1\times2^0,1\times2^1,1\times2^2,\cdots,1\times2^7\},$$
$$A_2=\{3\times2^0,3\times2^1,3\times2^2,\cdots,3\times2^6\},$$
$$A_3=\{5\times2^0,5\times2^1,5\times2^2,\cdots,5\times2^5\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_{99}=\{197\},$$

$$A_{100} = \{199\}.$$

如果把前 200 个自然数所构成集合记为 $A$,那么

$$A_i \cap A_j = \phi (1 \leqslant i < j \leqslant 100),$$

$$\bigcup_{i=1}^{100} A_i = A.$$

根据抽屉原理,取出的 101 个自然数必有两个位于同一抽屉内(自然这两个数不属于单元素集),其中一个必为另一个的整数倍.

**例 3** 平面上任意给定六个点(它们之中无三点共线),试证明:总能找到三点,使得这三点为顶点的三角形的内角中有不超过 $30°$ 的角.

**分析** 记六个点为 $A,B,C,D,E,F$.取过其中两点的直线 $l$,如图 1-1,使其余四点在 $l$ 同侧(这一点是可以办到的).这样一来,可使我们处于有利位置.

考虑运用抽屉原理.

若 $\angle BAF \leqslant 120°$ 则 $\angle BAC$, $\angle CAD$, $\angle DAE$, $\angle EAF$ 中必有一个角不超过 $30°$.若 $\angle BAF > 120°$,则转而直接考察 $\triangle BAF$: $\angle ABF + \angle AFB < 60°$,根据抽屉原理,其中必有一个角不超过 $30°$.

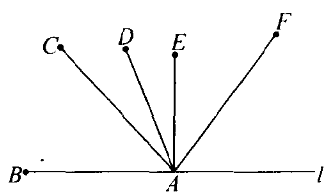


图 1-1

**注** 本例两次运用抽屉原理,所制造"抽屉"也不同,只是后者情形十分简单.运用原理如果一次不能达到最终目的,可考虑再次重复使用,或者调整考察角度,重新制造"抽屉".当然不得已时还须另觅他途.

有些问题明知需要运用抽屉原理去解决,又不知从何处下手,这时就要深入分析问题,以洞察问题本质,适当地作些转化工作,简捷地选择"元素"和"抽屉".

**例 4** $A$ 是 16 位的正整数.证明:可从 $A$ 中取出连续若干位

数字,使得其乘积是平方数.例如 $A$ 中某位数字是 4,那么可以取这个数字.

**分析** 记

$$A=\overline{a_{16}a_{15}a_{14}\cdots a_i\cdots a_4a_3a_2a_1},$$

这里 $a_{16}\geqslant 1$, $a_i$ 是数字, $i=1,2,\cdots,16$.

由于0,1,4,9本身就是平方数,因此若 $A$ 中含有上述数字,问题就解决了.今设 $A$ 中的数字只含有2,3,5,6,7,8.这时 $A$ 的连续若干位数字之积应是形如 $2^p\cdot 3^q\cdot 5^r\cdot 7^s$ 的数.

进一步简化问题:对于 $p,q,r,s$,我们可用1表示其中的奇数,用0表示其中的偶数.问题变为证明存在着四元有序数组 $(p,q,r,s)$ 为 $(0,0,0,0)$ 情形.

首先,有序数组 $(p,q,r,s)$ 仅有 $2^4=16$ 种不同形式.再考察以下16个积

$$a_1, a_2a_1, a_3a_2a_1, \cdots, a_{16}a_{15}\cdots a_3a_2a_1.$$

(Ⅰ)若其中有一个积是(0,0,0,0)型,那么问题得以解决.

(Ⅱ)若其中无一个积是(0,0,0,0)型,那么根据抽屉原理,必有两积所对应的四元有序数组 $(p,q,r,s)$ 相同,设这两个积是

$$a_ia_{i-1}\cdots a_2a_1,$$

$$a_ja_{j-1}\cdots a_2a_1,$$

$1\leqslant i<j\leqslant 16$,则这两积的商 $a_ja_{j-1}\cdots a_{i+1}$ 对应的四元有序数组是 $(0,0,0,0)$, $a_ja_{j-1}\cdots a_{i+1}$ 即为所求.

**例5** 在前 $3n$ 个自然数 $(n>1)$ 中,任取 $n+2$ 个数,试证明其中必存在两个数,这两数差的绝对值在 $(n,2n)$ 内.

**分析** 从简单情形起步.若取出的 $n+2$ 个数中有 $3n$,可分以下两种情形.

(Ⅰ)除 $3n$ 外,还有

$$n+1, n+2, \cdots, 2n-1$$

中的一个,则 $3n$ 与这个数的差的绝对值必在 $(n,2n)$ 内.

（Ⅱ）除 $3n$ 外，不包含

$$n+1,n+2,\cdots,2n-1$$

中任何一个，那么我们可以把目光盯在其余 $2n$ 个数上，把这 $2n$ 个数分划为 $n$ 个集合.

$$\{1,2n\},\{2,2n+1\},\{3,2n+2\},\cdots,\{n,3n-1\}.$$

每个集合内两数差均在 $(n,2n)$ 内. 根据抽屉原理，除 $3n$ 外，还须取 $n+1$ 个数，必有两个位于同一集合内，故命题也仍然成立.

上面考虑的是取出的数中包含 有 $3n$ 的特殊情况，转而研究一般情况就颇感棘手了. 能否化归到上述特殊情况呢？不妨尝试一下. 由于问题要求的是证实存在两个数的差限制在 $(n,2n)$ 内，这是我们真正"关心"的. 而对"差"而言，将两数"平行"移动，即同时增加或减少一个数无关紧要. 不妨设在取出的 $n+2$ 个数中，$a_k$ 最大，若 $a_k<3n$，我们就把每个数都同步增加 $3n-a_k$，于是问题就化归到前面所述的取出数中包含有 $3n$ 的情形上去了.

**例 6** 任给七个实数，证明，其中必存在两个实数 $x,y$，满足

$$0\leqslant\frac{x-y}{1+xy}<\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

**分析** 联想到两角差的正切公式，可将七个实数表示成 $\tan\theta_1,\tan\theta_2,\cdots,\text{tao}\theta_7$，且不妨设 $-\frac{\pi}{2}<\theta_1\leqslant\theta_2\leqslant\cdots\leqslant\theta_7<\frac{\pi}{2}$. 将区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 分成 6 个子区间 $\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right]$, $\left(-\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{6}\right]$, $\left(-\frac{\pi}{6},0,\right]$, $\left(0,\frac{\pi}{6}\right]$, $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$, $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$. 根据抽屉原理，上述七个 $\theta_i$ 中必有某两个数在同一个子区间内. 不妨设 $\theta_j,\theta_{j+1}$ 在同一个子区间内 $(1\leqslant j\leqslant 6)$，因 $0\leqslant\theta_{j+1}-\theta_j<\frac{\pi}{6}$，故

$$0\leqslant\tan(\theta_{j+1}-\theta_j)<\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

即

$$0\leqslant\frac{\tan\theta_{j+1}-\tan\theta_j}{1+\tan\theta_j\cdot\tan\theta_{j+1}}<\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

记 $y=\tan\theta_j$, $x=\tan\theta_{j+1}$,代入①式,即所得所要证的不等式.

**例 7** 平面上任给 16 个点,每两点间最大距离为 1,证明:任两点之间的最小距离不超过$\frac{\sqrt{2}}{4}$.

**证明** 因为两点间最大的距离是 1,所以每两点的水平距离与垂直距离都不超过 1,故这 16 个点可以用一个边长为 1 且水平放置的正方形将其盖住.

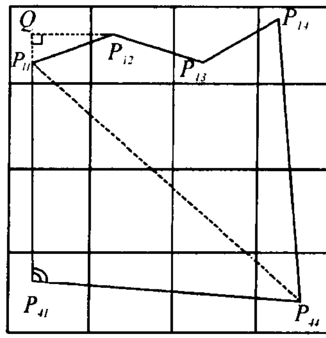



图 1-2

如图 1-2,将这个正方形分成 $4\times4$ 个小正方形,则每个小正方形的对角线长为$\frac{\sqrt{2}}{4}$,所以只要有一个小正方形内的点数不少于 2,命题自然成立.下面只须考虑每个小正方形各有一点的情况.

假设在两点间的距离都大于$\frac{\sqrt{2}}{4}$,如图 1-2,设 $P_{ij}(i=1,2,3,4;j=1,2,3,4)$是这 16 点. $P_{11}P_{12}$的水平距离为 $QP_{12}$,垂直距离为 $P_{11}Q$.注意到 $P_{11}Q\leqslant\frac{1}{4}$,所以

$$QP_{12}>\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{1}{4},$$

即 $P_{11}P_{12}$的水平距离大于$\frac{1}{4}$.同理 $P_{12}P_{13}$、$P_{13}P_{14}$的水平距离也大于$\frac{1}{4}$.所以 $P_{11}P_{14}$的水平距离大于$\frac{3}{4}$,自然 $P_{11}P_{14}>\frac{3}{4}$.同理 $P_{14}P_{44}$、$P_{44}P_{41}$、$P_{41}P_{11}$都大于$\frac{3}{4}$,显见 $P_{11}P_{14}P_{44}P_{41}$是凸四边形,根据抽屉原理知其至少有一个内角是钝角或直角,不妨令$\angle P_{41}\geqslant 90°$,由此得

$$P_{11}P_{44}=\sqrt{P_{11}P_{41}^2+P_{41}P_{44}^2-2P_{11}P_{41}\cdot P_{41}P_{44}\cos\angle P_{41}}$$

$$>\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}>1,$$

矛盾.命题获证.

**例 8** 经统计,青年学者王林在 5 年期间的每一个月至少在报刊上发表一篇文章,又知他每年最多发表文章 19 篇.求证:王林在某连续的几个月内恰巧发表文章 24 篇.

**分析** 设王林在五年内按时间顺序逐月发表文章 $a_1,a_2,\cdots,a_i,\cdots,a_{60}(a_i\geqslant 1,i=1,2,\cdots,60)$篇.

考察由数列 $a_1,a_2,\cdots,a_{60}$的前 $n$ 项和构成的数列 $S_1,S_2,\cdots,S_{60}$.显然,

$$1\leqslant S_1<S_2<\cdots<S_{60}\leqslant 19\times 5=95. \quad ①$$

若王林在某连续的几个月内恰巧发表文章 24 篇,那么应存在 $i,j$,使

$$S_j=S_i+24(1\leqslant i<j\leqslant 60).$$

为证明这一事实,将所有 $S_i$ 加上 24,即设

$$b_i=S_i+24(i=1,2,\cdots,60),$$

此时

$$25\leqslant b_1<b_2<\cdots<b_{60}\leqslant 119. \quad ②$$

①,②式表明 $S_1,S_2,\cdots,S_{60},b_1,b_2,\cdots,b_{60}$都在区间$[1,119]$内.根据抽屉原理,存在其中两数相等.自然这两数只可能分别取自$\{S_n\},\{b_n\}$中.不妨设

$$S_j=b_i$$

即

$$S_j=S_i+24(1\leqslant i<j\leqslant 60).$$

命题获证.

**例 9** 从实数数列

$$a_1,a_2,\cdots,a_{mn+1} \quad ①$$

$a_j\neq a_j$ 中可以选出一个有 $m+1$ 项的递增子列,或一个有 $n+1$ 项

的递减子列(子列中各项的先后顺序与原来相同).

**分析** 注意到"双向"有序,对①式中的每一项 $a_i$,我们都赋予它一有序数对$(x_i, y_i)$作为它的"坐标".它只是 $x_i$ 表示从 $a_i$ 开始的最长的递增子列的长,$y_i$ 表示从 $a_i$ 开始的最长的递减子列的长.问题转化为证明:存在 $a_i$,它的"坐标"$x_i \geqslant m+1$ 或 $y_i \geqslant n+1$.

以下采用反证法.如果恒有

$$x_i \leqslant m, y_i \leqslant n(i=1,2,\cdots,mn+1),$$

从 $mn+1$ 元集

$$X=\{a_1, a_2, \cdots, a_{mn+1}\}$$

到 $mn$ 元集

$$Y=\{(x_i, y_i) \mid x_i \leqslant m, y_i \leqslant n\}$$

的映射 $$f: a_i \rightarrow (x_i, y_i)$$

不是单射,换句话说,根据抽屉原理存在 $a_i, a_j(i<j)$具有相同的坐标.但这不可能,因为在 $a_i<a_j$ 时,$x_i \geqslant x_j+1$,而在 $a_i>a_j$ 时,$y_i \geqslant y_j+1$.以上矛盾说明至少存在某个 $a_i$,它的坐标 $x_i \geqslant m+1$,或 $y_i \geqslant n+1$,从而命题获证.

## 练 习 一

1. 任意一群人中,一定有两个人,他们在这群人中的朋友数一样多.

2. 任意给定 10 个自然数,试证明:可以用减、乘两种运算把它们适当连起来,其结果能被 1890 整除.

3. 在圆内或圆上任取八个点.证明:在这八个点中,必有两个点的距离小于圆的半径.

4. 凸四边形 $ABCD$ 的每边都小于 24.设 $P$ 为四边形 $ABCD$ 内一点,求证:存在四边形 $ABCD$ 的一个顶点与 $P$ 的距离小于 17.

5. 在边长为 1 的等边三角形内部,有五个点,试证明至少有两点,其距离小于$\frac{1}{2}$.

6. 在一个边长为 1 的正方形内任意给定九个点,试证明:在以这些点为顶点的各个三角形中,必有一个三角形,它的面积不大于$\frac{1}{8}$.

7. 在$\triangle ABC$内(包括边界)任放四个不同于顶点的点 $D$、$E$、$F$、$G$.求证:在这七个点中,所有两点间的距离至少取四个不同的值.

8. 有 $17\times17$ 的方格纸,每个小正方格中必须填写上 1 至 72 这 72 个自然数中的任意一个数,求证必存在四个小方格,若以 $A$、$B$、$C$、$D$ 分别表示这四个小方格的中心点,并作为该小方格的代号,把这四个方格中所填上的数字相应地表示为 $a,b,c,d$,使得:$AB=CD, AD=BC$,且 $a+c=b+d$.

9. 黑板上写着数 $1,2,\cdots,20$,能否从其中任意的十个数中取出四个数,其中两个数的差等于另两个数的差?

10. 设 $K$ 为正整数且 $n=2^{K-1}$.求证从 $2n-1$ 个正整数中可找出 $n$ 个数使之和可被 $n$ 整除.

11. 圆周上等距分布有 $n(\geqslant 4)$ 个点,记 $k=\left[\sqrt{2n+\frac{1}{4}}+\frac{3}{2}\right]$,求证:$n$ 个点中的任意 $k$ 个中必有四个构成梯形或矩形.

12. 在第一行中写有 19 个不超过 88 的自然数,第二行写有 88 个不超过 19 的自然数.我们将一行中的一个或数个相连的数称为一段.证明:可以从上述两行数中各选出一段来,使得这两段数的和相等.

# 第二讲　几何变换

## 知识点和方法述要

1. 用动态的观点来分析和解决几何问题是现代几何学的重要思想方法.在数学竞赛中,许多几何问题都含有几何变换的思想,通过平移、旋转、反射、相似等方式把几何图象“变换”到所需要的位置或变为所需的图形,使题设条件相对集中,使隐含的关系得以显现,以利于问题的解决.

2. 在平面到自身的一一变换下,若每对对应点 $A,A'$ 所连接的线段都被定直线 $l$ 垂直平分,则这种变换称作关于直线 $l$ 的反射或对称,记为 $S(l)$,直线 $l$ 称作反射(对称)轴.点 $A'$ 称作点 $A$ 关于轴 $l$ 的对称点.

3. 在平面到自身的一一变换下,若任意一对对应点 $A,A'$ 连接的有向线段等于定向量 $\vec{a}$,则称这种变换为平移变换,记为 $T(\vec{a})$,$\vec{a}$ 叫做平移向量,$\vec{a}$ 的方向称为平移方向,其长度称作平移距离.$A \xrightarrow{T(\vec{a})} A'$ 表示点 $A$ 经过平移 $T(\vec{a})$ 变到 $A'$.

平移变换前后的对应线段平行且相等,对应角的两边分别平行且方向一致.平移常用于证明线段相等、平行、两角相等的辅助手段.

4. 在平面到自身的一一变换下,若任意一对对应点 $A$、$A'$ 与平面上一定点 $O$ 的距离总相等,且 $\angle AOA'$ 等于定角 $\theta$,这种变换称作关于点 $O$ 的旋转,记为 $R(O,\theta)$,点 $O$ 称作旋转中心,$\theta$ 称作旋转角.

旋转变换前后的图形全等,且顺序不变.

旋转角为 180°的旋转变换称作中心对称变换,用 $C(O)$ 表示关于点的中心对称,$C(O)=R(O,180°)$.