不适定问题的解法

〔苏〕 A. H. 吉洪诺夫
B. Я. 阿尔先宁 著

地质出版社

不适定问题的解法

〔苏〕A.H. 吉洪诺夫
B.Я. 阿尔先宁 著

王秉忱 译 陈恕行 校

地质出版社

此书阐明建立稳定近似求解不适定问题的方法。有许多经典数学问题属于此类不适定问题。例如，解第一类积分方程式，解线性代数的某些问题，解最优控制，解最优规划（设计）问题等。与解释实验观测资料有关的所谓逆（反求解）问题也属此类。

本书可供关心上述问题解法的广大读者使用。

本书系根据《Методы решения некорректных задач》（苏联1974年底版本），并参照《Solutions of Ill-Posed Problems》（美国1977年版本）译出。

А. Н. ТИХОНОВ, В. Я. АРСЕНИН

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА 1974

不适定问题的解法

〔苏〕 А. Н. 吉洪诺夫 / В. Я. 阿尔先宁 著

王秉忱 译 陈恕行 校

*

地质部书刊编辑室编辑

地质出版社出版

（北京西四）

地质印刷厂印刷

（北京安德路47号）

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

*

1979年12月北京第一版·1979年12月北京第一次印刷

印数1—5,590册·定价1.00元

统一书号：15038·新466

译者的话

A. H. 吉洪诺夫等著的《不适定问题的解法》一书是1975年引进我国的一本原文书，未影印。近年来，通过一些生产、教学、科研部门的实践，已遇到愈来愈多的不适定问题急待解决。例如，地质部门为评价地下水资源数量而进行的水文地质计算实践中，常需要根据水头（水位）分布规律来反求水文地质参数μ(给水度)、T（导水系数）等。当解决这些问题时，除必须对井点加以处理外，还必须注意这类问题的不稳定性，即当给定的数据有很小的误差时，其所求的解却可以产生很大偏差，甚至无法控制。因此，只有对这类问题进行适当处理，以保证其稳定性时，才能期望得到正确的解。《不适定问题的解法》一书，正可以向我们提供解决这类问题的途径、方法和思路，有重要的参考价值。当前，在我国地下水资源的区域性评价工作中，已有一些同志认识到不适定问题的求解是直接影响评价精度的关键性因素之一。

本书译校工作完成后，又见到了此书的英译本；《Solutions of Ill-Posed Problems》(美国1977年出版)。英译本编辑——纽约大学数学研究所的弗里茨·约翰 (Fritz John) 是美国微分方程方面的数学权威。足见美国对此书的重视。值得注意的是，英译本翻译编辑序与英文版本序对不适定问题的研究概括得较好(我已把它们列入本书的中译本)。作者在英文版本序中还指出本书在地球物理观测与地质找矿（包括石油）工作中的意义。我为了进一步提高译文质量，又将全部译稿按此英译文校对了一遍。

水文地质界的一些同志们在盼望本书中译本早日出版。趁此机会，向热心支持与鼓励本书翻译工作的长春地质学院教务处与水文地质教研室、复旦大学数学系、上海地质处、同济大学、南开大学、北京市图书馆等单位，并向金福临及何成奇、任福尧、王敏中、马胜忠、杨天行、张景辉、张海权、霍甦兰同志表示衷心感谢。限于译者水平，不当之处尚请批评指正。

译者　　一九七八年

英译本翻译编辑序

适定(“适当给定”)数学问题的概念是在 J. 阿达玛 (Hadamard) 的关于线性偏微分方程柯西问题的讲义 (耶鲁大学出版，1923年) 第一章的讨论中初次引入的。它标志出在涉及微分方程的许多问题中的分类方面前进了一大步，因为它找出了解的存在、唯一性和 (用蕴函拣出) 稳定性等一般性质。阿达玛陈述说：“然而值得注意的是，从另一方面讲，可靠的一点在于物理解释之中：分析的问题，当它是某些力学或物理学问题的解释时，用我们的这个措辞来说，总是适当给定的。”

从本书的观点来看，力学或物理学问题的阿达玛概念显得太狭窄了。当问题是确定独立本原 (“数据”) 的完全系的效应 (“解”) 时应用它。但是，在许多应用问题当中，没有对本原的精确理解，我们也必须来确定效应，在另外的场合，我们甚至还试图找到将产生欲求效应的“本原”。于是我们导致“不适定问题”。可以一言以蔽之：大多数应用问题是，而且总是不适定的，特别是当它们要求数值解时。

数值分析的一般方法最适应于适定问题的解；此外，不适定问题在什么意义上是可能有解的，在应用方面可能是有意义的，这并不清楚。A. N. 吉洪诺夫是在不适定问题领域中最早的工作人员之一，对一般的这类问题，成功地给出“近似解”的精确的数学定义，而且创立了“最优”解。由A. N. 吉洪诺夫和V. Ya. 阿尔先宁所写的这本书，讲述了不适定问题的一般理论，并把由热流到光学系统设计以及观测数据的自动处理等广泛的应用介绍给读者。这个译文对关心应用问题数值解，但不熟悉关于这个问题的俄文文献的数学家和科学家来说，将会特别感到兴趣。然而意

义还不止那些。过去的经验提醒我们，用来讨论不适定问题的概念与方法本身，反过来也将激起“纯”数学分析的进步。

弗里茨·约翰 (Fritz John)

(美国纽约大学数学研究所)

英文版本序

计算机的出现，促使数学被应用到人们力所能及的所有科学分支中。数学的影响范围的这种扩展，是科学技术发展的最重要征兆之一，从而对这门科学的可能应用产生了并必须抱有新的期望。

数学问题的一个重要性质是原始数据变化不大时，它们的解的稳定性。按照阿达玛的意见，不能满足这种稳定条件的问题称为不适定 (ill-posed)❶问题。一个长时期以来，数学家们以为不适定问题不能描述真实的现象和物体。但是，我们将在本书中说明这类不适定问题包括许多经典的数学问题，而且最有意思的是，这种问题有重要的应用。

如果这种问题的原始数据仅为近似已知，而且包含着随机误差，则它们的解的上述不稳定性便造成按经典方式导出的近似解的非唯一性和对此进行物理解释的重大困难。在许多情况下还根本不存在具有近似原始数据的问题的经典解。在解这个问题时，人们必须首先弄清楚对原始数据变化小的情况是稳定的近似解的概念，并且利用专门的方法来导出这个解。

不适定问题包括分析和代数的这样一些经典问题，诸如对近似已知的函数的微分，第一类积分方程的解，带有近似系数的付立叶级数的求和，函数的解析延拓，寻求拉普拉斯逆变换，拉普拉斯方程的柯西问题，病态线性代数方程的求解以及许多其他有很大实际意义的问题。我们能够把所有这种问题划分为两个子类，就是识别的子类与设计的子类。其中，第一子类包括象核物理学，等离子物理学或无线电物理学，电子学这些资料的数学处

❶ 某些作者也称之为"improperly posed"或"incorrectly posed"问题——编辑注。

理过程与解释；地球物理观测，找矿（包括石油），火箭发射，核反应堆工程等的解释。第二子类包括许多最优化问题，如设计天线或光学系统，最优控制和最优经济规划。

我们这本书乃是研究上述这些自然现象问题的解。它给在原始数据变化不大情况下稳定的问题的近似解概念下了定义，并且详细地说明了易在计算机上实现的那种构成解的方法。

如同我们早已说过的那样，不适定问题中遇到的原始数据（一般量度）包含随机误差。由于这种原始信息的本质，人们能够或者采取确定性方法，或者采取概率法导出近似解或估计数据的误差。（下略❶）

A. N. 吉洪诺夫和 V. Ya. 阿尔先宁

❶ 以下的内容与此书俄文版前言完全相同，故从略——译者注。

前　　言

在数学问题当中划分出这样一类问题，它的解对原始资料改变不大的情况来说是不稳定的。它们的特点在于，不管原始资料改变多么小，也可以造成解的任意大的变化。实质上，这种类型的问题在过去是不大被提出来的[1]。它们就属于不适定问题。

如果原始资料接近已知，则所提到的这种不稳定性导致在指定的精度范围内，实际上有非唯一的解，并很难阐明所取得的近似解的意义。基于这些特点，长期以来，曾认为不适定问题不能有实际意义。

但是要指出一点，就是不适定问题既与数学的经典篇章有关，也与不同种类的在实践中是重要的实用课题有关。这使得我们判断出，所讨论的此类问题是有广泛意义的。本书中各章的命名及所列举的实例表明，不适定问题不仅广泛，而且它们的应用也是多种多样的。建立试验成果资料的自动数学整理系统（包括解释在内）问题与最优控制和最优设计系统问题就是所属的重要课题。

资料整理阶段的一个实质课题是对原始资料改变不大情况的不稳定问题求解。因此，对研究不适定问题解法的必要性就没有引起异议。同时，根据给出的近似的原始资料所获得的近似解，对原始资料改变不大的情况来说，应该是稳定的。

近年来，在各种杂志中出现了大量阐述此问题的著作。编写阐明不适定问题解法的书籍的必要性成熟了。在书中以对广大读者通俗易懂的形式阐述了基本理论以及与根据近似的原始资料构

---

[1] 过去，人们对这类问题缺乏研究和认识。近年来，对不适定问题的深入研究不仅已被列入日程，而且随着解决实际计算问题的迫切需要，已越来越引起各界（包括地质界）学者与工程技术人员的密切注意——译者注。

成对于原始资料的微小改变为稳定的解有关的问题。我们建议读者注意这本书。

通常由测定取得的不适定问题的原始资料含有偶然的误差。因此，当建立近似解与估价其误差时，依原始信息的性质而异，可能用决定性的方法，也可能用概率的方法。一般地说，除第四章与第五章外，在本书中我们均局限于决定性方法的范围。概率法详见参考文献，例如〔63，64，87，100，105，124，128，129，179—181，184，217〕等著作。

本书对〔156—161〕著作中所讨论的建立不适定问题近似解的正则法有所发展。

我们未给自己提出简评已有的不适定问题文献资料的目的任务。所以，对列于书末的文献资料清单并未追求完整。读者可在〔122〕的著作中找到对文献的简评。

本书供物理-数学专业的大学生与研究生使用，也供关心试验资料数学整理与预测问题的工程师及科学工作人员参考。

对A. B. 卢科申（Лукшин）所提出的很多宝贵意见表示深切感谢。

院士　A. H. 吉洪诺夫
教授　B. Я. 阿尔先宁

目　　录

绪　论

§1. 关于数学问题提法方面的某些看法

1. 计算技术利用的迅速发展要求发展解广泛问题的计算方法。但是，要把问题的“解”理解为什么呢？求“解”的算法应满足什么样的要求呢？

问题的传统概念与提法没有反映出实践中所遇到的问题的许多特点。我们举例说明这一点。

2. **例1** 我们来讨论核为 $K(x,s)$ 的第一类弗雷得霍姆积分方程式：

$$\int_a^b K(x,s)z(s)ds=u(x),\quad c\leqslant x\leqslant d \qquad (\mathrm{B};1,1)$$

式中，$z(s)$ 是空间 F 中的未知函数，$u(x)$ 是空间 U 中的给定函数。我们认为，核 $K(x,s)$ 在变数 x 范围内是连续的，且具有连续偏导数 $\frac{\partial K}{\partial x}$。为简化起见，算子 $\int_a^b K(x,s)z(s)ds$ 也用 Az 来表示。

我们在区间 $[a,b]$ 的连续函数类中求解 $z(s)$。对右端的偏差，我们以二次度量，即按下式估计：

$$\rho_U(u_1,u_2)=\left\{\int_c^d [u_1(x)-u_2(x)]^2dx\right\}^{1/2} \quad (\text{度量} L_2)$$

而对解 $z(s)$ 的偏差，则以均匀一致的度量，即按下式估计：

$$\rho_F(z_1,z_2)=\max_{s\in[a,b]}|z_1(s)-z_2(s)| \quad (\text{度量} C)$$

3. 设右端 $u=u_1(x)$ 时，方程式（B；1,1）的解为函数

$z_1(s)$，即

$$\int_a^b K(x,s)z_1(s)ds \equiv u_1(x)$$

如果我们知道的不是函数$u_1(x)$，而只是与$u_1(x)$相差很小的（在L_2度量中）$u(x)$时，则就可以只涉及求方程式（B；1,1）的近似于$z_1(s)$的“解”的问题。

此时，右端$u(x)$可由实验取得，例如借助于记录器求取，它有“角”点，在“角”点内函数$u(x)$无导数。方程式（B；1,1）对这样的右端$u(x)$没有解（从传统意义上说），因为核$K(x,s)$有随x变化的连续导数，因而右端也应有随x变化的连续导数。

这就是说，作为方程式（B；1,1）的与$z_1(s)$相近的近似“解”，不能取为具有近似已知的右端$u(x) \neq u_1(x)$的这个方程式的精确解，因这种解不可能存在。出现的根本问题是要把具有近似已知右端的方程式（B；1,1）的近似解应当理解成什么呢？

显然，方程式（B；1,1）仅仅对这样的右端$u(x)$才有解（从传统意义上说），即右端属于函数$z(s)$的集F在映象$u = Az \equiv \int_a^b K(x,s)z(s)ds$，$z(s) \in F$下的象$AF$。

4．此外，在经典意义上理解，方程式（B；1,1）的解，是按$z = A^{-1}u$规则取得的。对“原始资料”改变不大的情况不具稳定性〔右端$u(x)$〕。上式中A^{-1}为方程式（B；1,1）中算子A的逆。

事实上，函数$z_2(s) = z_1(s) + N \cdot \sin\omega s$是右端为

$u_2(x) = u_1(x) + N\int_a^b K(x,s)\sin\omega s ds$的方程式（B；1,1）的解。

很明显，对任一数值N来说，当ω值足够大时，偏差

$$\rho_U(u_1, u_2) = |N|\left\{\int_c^d \left[\int_a^b K(x,s)\sin\omega s ds\right]^2 dx\right\}^{1/2}$$

可以是任意地小；但是，$z_1(s)$与$z_2(s)$的相应解的偏差

$$\rho_F(z_1,z_2)=\max_{s\in[a,b]}|z_2(s)-z_1(s)|=\max_{s\in[a,b]}|N\sin\omega s|=|N|$$

(B;1,2)

则可能是随便多么大。此时，我们是以C度量来估计函数$z_1(s)$与$z_2(s)$的偏差的。

如果以L_2度量来估计解的偏差，则对右端$u(x)$改变不大的情况来说，方程式（B;1,1）的解也是不稳定的。事实上，

$$\rho_F(z_1,z_2)=\left\{\int_a^b|z_1(s)-z_2(s)|^2ds\right\}^{1/2}=|N|\left\{\int_a^b\sin^2\omega sds\right\}^{1/2}$$

$$=|N|\sqrt{\frac{b-a}{2}-\frac{1}{2\omega}\sin\omega(b-a)\cos\omega(b+a)}$$

(B;1,3)

显而易见，数ω和数N可这样选取，即在右端$u_1(x)$与$u_2(x)$偏差不管多么小时，按（B;1,3）公式计算的其相应解的偏差却可能是任意大小的。

但是，对方程式（B;1,1）解的稳定性的要求应该满足，因为这种要求是与此方程式所描述的现象的物理决定性相联系的。

如取满足式$\rho_U(A_z,u)\leqslant\delta$

的函数$z(s)$作为（B;1,1）的近似解时，则解积分方程式（B;1,1）的问题实际上是不足以确定的，上式中u以精度δ:$\rho_U(u,u_1)\leqslant\delta$接近方程式右端。

这样一来，就不仅要给出关于把方程式（B;1,1）的近似“解”理解为什么的问题，而且也要说明得到这个解的算法，这种算法在“原始资料”$u(x)$改变不大的情况下具有稳定的特性。

此例所讨论的情况，对不适定问题而言是典型的。

5．我们讨论过这样一种情况，事先已知存在方程式（B;1,1）的相应右端为$u_T(x)$的精确解$z_T(s)$（在传统意义上理解），而要寻找当右端不是$u_T(x)$而是对于我们为已知的$u(x)$时的近似解。这里$\rho_U(u_T,u)\leqslant\delta$。

当我们没有关于存在方程式（B;1,1）精确解的信息，但有

关于可能的右端类U的信息时，也可提出求方程式（B；1,1）近似“解”的问题。为此，我们确定出方程式（B；1,1）在集F上的广义解（拟解）概念，它是F中的元素$\tilde{z}$，距离$\rho_U(Az,\tilde{u})$达到下确界〔71,72〕，即

$$\rho_U(A\tilde{z},\ u)=\inf_{z\in F}\rho_U(Az,u),\quad Az\equiv\int_a^b K(x,s)z(s)ds$$

显然，如果当$u=u_T$时，方程式（B；1,1）有普通解$z_T\in F$的话，则它与方程式$Az=u_T$的广义解是一致的。

遂产生寻求这种建立广义解的算法问题，它们对右端$u(x)$改变不大的情况是稳定的。

例2 我们来讨论线性代数方程组

$$Az=u \tag{B；1,4}$$

式中，z为未知向量，u为已知向量，$A=\{a_{ij}\}$是元素为a_{ij}的方阵。

如果方程组（B；1,4）是满秩的，即$\det A\neq 0$，则它有唯一解，这个解可根据著名的克莱姆公式或用其他方法❶求得。

如果方程组（B；1,4）是降秩的，则它仅在满足可解条件时有解（而且不是唯一解），这种条件是由相应的行列式为零的等式构成的。

可见，在解方程组（B；1,4）之前，应检查它是降秩的还是满秩的。为此，要计算方程组的行列式$\det A$。

如果n是方程组的阶数，则为计算$\det A$要求进行大约为n^3的运算。当n值相当大时，我们就无法以任何精度进行计算，因为计算误差的积累，使我们可能取得与真实情况迥异的$\det A$值。这种状况就要求我们建立一种不要求预先阐明方程组（B；1,4）是降秩还是满秩的求解方程组（B；1,4）的算法。

此外，在实际问题当中，我们常常是对右端u和矩阵A的元素，即方程组（B；1,4）的系数大概已知。此时，我们就不和方

---

❶ А. Г. Курош. Курс высшей алгебры. изд. 10-е. М. «Наука», 1971（有柯召的中译本）。

程组（B；1,4）打交道，而是与其他一些方程组 $\tilde{A}z=\tilde{u}$，在 $\|\tilde{A}-A\|\leqslant\delta$，$\|\tilde{u}-u\|\leqslant\delta$ 的情况下打交道了。

式中范数的意义通常取决于问题的性质。我们用矩阵 $\tilde{A}$ 代替矩阵 A 时，就尤其不能作出对方程组（B；1,4）是降秩还是满秩的一定结论。

在这种情况下，关于精确方程组 $Az=u$，我们仅仅知道矩阵 A 和右端 u 满足不等式 $\|\tilde{A}-A\|\leqslant\delta$ 和 $\|\tilde{u}-u\|\leqslant\delta$。但是，有这种原始资料（$A$，$u$）的方程组是极多的，并且它们在我们已知的误差程度范围内是很难区别的。在这种"可能的精确方程组"中间，也可能有降秩的。

由于我们用近似方程组 $\tilde{A}z=\tilde{u}$ 代替精确方程组（B；1,4），则所讨论的就只可能是求近似解的问题。然而，近似方程组也可能是不可解的。于是便产生这样的问题：要把方程组（B；1,4）的近似解理解成什么？而且当原始资料（A，u）变化不大时，它还应当是稳定的。

§2. 适定问题与不适定问题的概念

1. 区分开适定问题与不适定问题。数学物理问题的适定性的概念是由阿达玛（J. Hadamard）〔201,202〕引进的；他意欲阐明对不同类型的微分方程式，哪种类型的边界条件是最自然的（例如，对椭圆型，是狄利克雷问题及其类似问题；对双曲型，是柯西问题）。

所有数量问题的解通常都在于按给定的"原始资料" u 求"解" z，$z=R(u)$。我们把它们所属的度量空间记作 U 和 F，元素间的距离记为 $\rho_U(u_1,u_2)$，$\rho_F(z_1,z_2)$；$u_1,u_2\in U$；$z_1,z_2\in F$。度量通常取决于给定的问题。

2. 设"解"的概念已定，并且对于每一个元素 $u\in U$，在空间 F 中存在唯一解 $z=R(u)$ 与之对应。

如果对任一个数 $\epsilon>0$ 都存在数 $\delta(\epsilon)>0$，只要有不等式 ρ_U