应用力学(五)

中国科学技术情报研究所重庆分所	编辑
科学技术文献出版社重庆分社 重庆市市中区胜利路91号	出版
四川省新华书店重庆发行所	发行
科学技术文献出版社重庆分社印刷厂	印刷

开本：787×1092毫米1/16 印张：4.25字数：11万
1982年5月第一版 1982年5月第一次印刷
科技新书目：27—201 印数：4,100

书号：13176·108 定价：0.50元

82.№1.（总五）

目　录

非线性断裂力学中的裂纹尖端奇异场：

　　对现状的评述……………………………………(1)

三维静态裂纹问题解（评论）………………………(12)

25年来有限元法发展的回顾…………………………(19)

液-固耦合问题的边界解法…………………………(21)

曲梁的振动……………………………………………(29)

旋转涡轮机叶片的振动特性…………………………(31)

动态光弹性……………………………………………(37)

实验应力分析手册（七.全息摄影术；八.实验数据的统

　　计处理）…………………………………………(46)

书评与会议消息………………………………………(67)

非线性断裂力学中的裂纹尖端奇异场：对现状的评述*

John W. Hutchinson

〔摘要〕本文对单调加载情况下非弹性体中静止的和扩展中的裂纹尖端应力应变场分析方面的现状做了评述，对进一步发展的某些障碍进行了讨论。

引 言

与靠近裂纹尖端处行为相关的奇异场解已成为断裂力学发展中的核心问题。在线弹性断裂力学中采用应力强度因子 K，它量度了从线弹性理论得到的应力与应变场奇异性的强度。对于能应用线弹性断裂力学的几乎所有材料，在靠近裂纹尖端处都同时存在着非线性效应(例如塑性、蠕变、非线性弹性)，致使线弹性理论的假定失效。但是尽管如此，在某些限制条件下，应力强度因子仍然唯一地量度着或控制着材料在靠近裂纹尖端处的行为，而这正是线弹性断裂力学的基础。为了解和论证这些限制条件的工作是线弹性断裂力学发展过程中的一个重要部分。

近期非线性断裂力学的发展与线性理论早年的发展情况十分类似。J积分是对于按小应变塑性形变理论得出的奇异场的量度。同样，在很靠近裂纹尖端处，由于强烈的非比例塑性变形、有限应变的效应或微孔隙与微裂纹的存在，按塑性形变理论对弹塑性材料所作的上述描述也会失效。当J的应用不限于尖端处的小范围屈服时，必须附加某些限制条件以保证靠近裂纹尖端处的行为能唯一地由J所控制。详细论述这些限制的研究工作还正在进行中，我们将对当前在这方面所做的努力给以概述。

直到最近才弄清楚，在某些较强的限制条件下(在本文中也将要加以评述)，对中等范围和大范围屈服，甚至在出现少量裂纹扩展的情况下，J仍控制着靠近裂纹尖端处的行为。当上述限制条件得到了满足时，阻力曲线方法(根据实验测定的J和裂纹扩展量之间的关系)可以用来分析有限的裂纹扩展之稳定性。J的这一推广应用有着重大的实际意义，因为非线性断裂力学最适用的那些材料往往表现出很明显的撕裂阻力。换言之，裂纹只要有少量扩展J值就可能比裂纹开始扩展时的值显著增加。在这些情况下，起裂点本身的重要性与裂纹经过少量扩展后的失稳点相比则成为次要的了。

J阻力曲线方法将会有一系列重要的应用，这一点看来是必然的。同样清楚的是，对其应用必须加以严格的限制，其中包括对裂纹少量扩展的限制。目前对这些限制还缺乏了解。这种情况正推动着采用靠近裂纹尖端处应力应变场与控制材料分离的基本规律相结合的方法对于准静态裂纹扩展进行更基础的研究。可以期望，对于准静态裂纹扩展的更基础的了解将揭示出材料的一些参数，诸如屈服应力、硬化、夹杂物的尺寸与间距以及其它等等是如何影响撕裂阻力的。在蠕变断裂等领域中甚至必须考虑到更多的因素，这时对于靠近裂纹尖端处的行为的了解几乎变成必不可少的了。

---

* 本文是作者在1981年3月29日至4月3日在法国Cannes召开的第五届国际断裂会议(ICF5)上所做的邀请报告。

以下将集中回顾ICF4*以来的进展。首先将讨论在中等范围和大范围屈服条件下对于静止和扩展中的裂纹应用J的条件。随后将转到对于扩展中的裂纹表征其尖端处应力和应变场的最近工作，包括对预测裂纹阻力所做的努力。本文将强调应变硬化的重要性，同时还将注意到，对于硬化材料中正在扩展的裂纹尖端附近的场目前了解还不够。评述的最后，对最近得出的在弹性蠕变材料中裂纹扩展的奇异场做了讨论。本文不包括当前在非线性弹性固体中靠近裂纹尖端处场的有限应变研究方面的进展，这一领域的工作Sternberg(1979)已经做过评述。

J主导和J控制的扩展应满足的条件

承受单调加载的静止裂纹

J积分(Rice, 1968)是对于以小应变塑性形变理论模拟的材料在裂纹尖端处场的强度的一种量度。例如，考虑一种应变硬化材料，其应变的非线性（塑性）部分ε通过单轴应力σ以幂函数形式给出：

$$\varepsilon/\varepsilon_0 \sim \alpha(\sigma/\sigma_0)^n \quad 对于\varepsilon \gg \varepsilon_0 \tag{1}$$

其中σ_0为屈服应力，$\varepsilon_0=\sigma_0/E$，E是杨氏模量。在这种情况下，所谓HRR奇异场(Hutchinson, 1968; Rice and Rosengren, 1968)由下式给出

$$\sigma_{ij} \sim \sigma_0 \left[\frac{J}{\alpha\sigma_0\varepsilon_0 I_n r} \right]^{\frac{1}{n+1}} \cdot \tilde{\sigma}_{ij}(\theta, n) \tag{2}$$

$$\varepsilon_{ij} \sim \alpha\varepsilon_0 \left[\frac{J}{\alpha\sigma_0\varepsilon_0 I_n r} \right]^{\frac{n}{n+1}} \cdot \tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta, n) \tag{3}$$

$$u_i - u_i^0 \sim \alpha\varepsilon_0 r \cdot \left[\frac{J}{\alpha\sigma_0\varepsilon_0 I_n r} \right]^{\frac{n}{n+1}} \cdot \tilde{u}_i(\theta, n) \tag{4}$$

其中r和θ是原点置于裂纹尖端处的平面极座标，θ从裂纹的延长线量起。随θ变化的无量纲函数$\tilde{\sigma}_{ij}$，$\tilde{\varepsilon}_{ij}$和$\tilde{u}_i$以及正则化常数I_n则取决于当趋近裂纹尖端时场的对称性以及是平面应变还是平面应力。对于n为有限值的硬化材料，(2)式和(3)式意味着在小应变形变理论范围内，在很接近裂纹尖端处，应力及应变场和J之间存在着唯一的关系。用R来表示这样一个区域的尺寸或半径，在裂纹尖端的这个区域中(2)式和(3)式是基于小应变形变理论全解的良好近似。因此，R是奇异场主导区域大小的量度。R的数值依赖于假设平面应变还是平面应力，它还与载荷、应变硬化以及几何因素等有关。对于某些具体的例子，R的估算值将在下面给出。

为了使J成为靠近裂纹尖端处行为的唯一有意义的量度，材料最初分离的区域（断裂过程区）和有限应变效应变得重要的区域应全部包含在以R来量度的J主导区之内。在大多数韧性金属中，断裂过程区的尺寸与钝化了的靠近裂纹尖端处有限应变区的尺寸大体相当。McMeeking(1977)对小范围屈服I型平面应变问题的有限元解表明，仅在以裂纹尖端张开位移δ_t的2～3倍为半径的范围内有限应变效应是重要的。在这个半径以外按小应变理论和有限应变理论所得到的结果之间的区别是很小的。假设断裂过程区也在这个半径范围内，如果J是单调加载条件下靠近裂纹尖端处行为的唯一量度，则对于I型平面应变问题，J主导区必须满足（近似地）

$$R > 3\delta_t \tag{5}$$

对于平面应变及平面应力，Shih(1979)曾经根据奇异场(4)式提出过δ_t的某一有效定义值与J之间的关系，即

$$\delta_t = d(\alpha\varepsilon_0, n)J/\sigma_0 \tag{6}$$

其中$d(\alpha\varepsilon_0, n)$是以曲线形式给出的。对于轻度到中等程度应变硬化的平面应变情况

$$\delta_t \cong 0.6J/\sigma_0 \tag{7}$$

* 第四届国际断裂会议，1977年在加拿大召开。

假定承认（7）式，则J主导条件(5)式可重新写作（近似地）

$$R>1.8\ J/\sigma_0 \qquad (8)$$

小范围屈服假设是线弹性断裂力学的前提，对于非线性断裂力学该假设也可当作一个基本参考。在小范围屈服的Ⅰ型平面应变问题中，塑性区的最大尺寸（从裂纹尖端量起）约出现在$\theta=\pm70°$处(从裂纹延长线量起)，并且对于$n>3$的材料这个尺寸近似地等于$0.15J/(\sigma_0\varepsilon_0)$，这样一来与(8)式对照可以看出，对于典型的屈服应变$\varepsilon_0=0.003$，小范围屈服条件下塑性区的最大尺寸大于J主导区的最小必要尺寸的25倍。小范围屈服问题的数值分析(Tracey，1976；McMeeking，1977)确实证明了对于所有的n，包括$n\to\infty$的弹性-理想塑性极限情况，对于HRR场J主导条件（8）式是满足的。

在大范围屈服的某些情况下，J主导区的尺寸R强烈地依赖于几何构形和应变硬化。如McClintock(1971) 所强调过的，大范围屈服时在理想塑性($n\to\infty$) 的极限情形下，靠近裂纹尖端处的应力和应变不是唯一地取决于J或任何其它的与几何构形无关的单参数。在塑性流动被充分约束的极端情况下，Ⅰ型平面应变裂纹尖端的应力场就是人们所熟知的Prandtl场，在尖端的前方具有很高的三轴张力。这个场在小范围屈服条件下在裂纹尖端处占优势，同时它也是HRR场(2)式当$n\to\infty$时的极限。对于能保持应力具有高度的三轴性之几何形状的物体，有充分理由来假定J应能把不同几何构形物体与小范围屈服情况下靠近裂纹尖端处的行为联系起来。数值分析和实验都证明了不论材料是否发生应变硬化，甚至在完全塑性条件下，诸如带有边裂纹的板条在弯曲时、带有双边深裂纹的板条在拉伸时以及标准的紧凑拉伸试样等平面应变几何构形在裂纹尖端处都保持着此种高度的三轴应力。

对于带有深切口的板条在弯曲时（或紧凑拉伸试样）在完全塑性屈服条件下，我们能论证主导区R必须是已屈服了的韧带长度b的若干分之一而与载荷无关。Shih和German(1979) 的数值研究指出，对于完全屈服了的弯曲型试样近似地有

$$R\cong0.07b \qquad (9)$$

这个结果受应变硬化的影响不大。联合（9）式和J主导条件(8)则得到

$$b>25J/\sigma_0 \qquad (10)$$

对于韧带尺寸的这一限制，过去已根据对这类几何构形韧带尺寸不同的试样所做过的试验建立了。(10)式还可以被解释为要求b大于裂纹张开位移的40倍左右（译注：由（7）、(10)两式可得此关系）。对于韧性钢，起始扩展时裂纹张开位移的典型值约为0.2mm，因此对于这种材料和这一类型的试样，最小韧带尺寸应该约为1cm。

另一种极端情况是象受平面应变拉伸的带有中心裂纹的板条这样的几何构形。在完全塑性屈服情况下，裂纹尖端的前方并不存在着高度的三轴应力状态，因此在靠近裂纹尖端处的断裂环境与具有高度三轴应力的情况之间不可能有关联。对于全塑性的带有中心裂纹的受拉板条，随着应变硬化趋近于零($n\to\infty$)，HRR场的主导区尺寸R也变为零。甚至在中等应变硬化的情况下R也是很小的。McMeeking和Parks(1979) 以及Shih和German(1979) 对全屈服的带有中心裂纹的受拉板条之数值研究指出，当$n=10$时很粗略地有$R\cong0.01b$且

$$b>200J/\sigma_0 \qquad (11)$$

这里的b仍是未开裂部分的韧带长度。这一制约严重地限制了在大范围屈服条件下用J把此种几何构形同前述的其它几何构形相关联。

已有人建议过用两个参数，一个是J而另一个则为量度靠近裂纹尖端处应力三轴性的量，可能足够表征靠近裂纹尖端处的整个断裂环境，但在这方面还没有出现任何实质性的进展。大量的努力已转向对于那些在裂纹尖端具有J主导的高度三轴张力的几何构形

进行试验，这是因为对于给定的材料，J主导的高度三轴张力导至在最低的J值下起裂并扩展。但F. A. McClintock的某些未发表的实验指出并非总是如此。关于J主导的进一步讨论可以在Parks(1980)最近的论文中找到。

承受单调加载的准静态扩展裂纹

Paris及其合作者(1979)和Turner(1979)已将J用于分析小量的准静态裂纹扩展以及确定准静态扩展到动力失稳的转变点。其方法与多年前所发展的K阻力曲线分析相类似，而且对于小范围屈服的极限情况K阻力曲线分析就是它的特例。采用形变理论的J来分析准静态裂纹扩展的理论基础是建立在大多数韧性材料具有显著的撕裂阻力这一事实上的。一旦起裂之后，再扩展则要求J增加。材料对于撕裂的阻力是以J阻力曲线$J_R(\Delta a)$的形式通过实验来确定的，Δa是裂纹扩展量。某些韧性最好的压力容器钢要求裂纹只扩展1～2mm时J值就达到其起裂值J_{IC}的两倍。用标准的平面应变试样已测得高达10倍于J_{IC}的J值。下面引入一个有用的与材料有关的长度量D，它表示J达到两倍J_{IC}值时所需要的裂纹扩展量。从阻力曲线的初始斜率来估计，D可由下式得出：

$$\frac{1}{D}=\frac{1}{J_{IC}}\left[\frac{dJ_R}{da}\right]_C \tag{12}$$

Hutchinson和Paris(1979)讨论了J控制的扩展所必须满足的条件。前一节所提到的对于静止裂纹的J主导条件仍然适用。在靠近裂纹尖端的局部区域中出现弹性卸载和严重的非比例塑性变形等效应，而这些效应是不能以作为建立J的基础的形变理论来描述的。为了保证在此局部区域以外J场(即HRR场)也在起主导作用，还必须满足附加的限制。限制之一是裂纹的扩展量不应超过裂纹尖端奇异场的主导区，即

$$\Delta a<R \tag{13}$$

第二个限制条件没有第一个那样明显，它保证非比例塑性变形区要比R小，它可写为如下形式

$$D<R \tag{14}$$

对于(9)式能成立的全面屈服的平面应变弯曲型的几何构形，(13)式和(14)式两条件就变为

$$\Delta a/b<0.07 \tag{15}$$

和

$$\frac{b}{J_{IC}}\left[\frac{dJ_R}{da}\right]_C>14 \tag{16}$$

以上只能认为是一种估计。试验结果确实指出，当裂纹的扩展量超过了(15)式的限制时，J对于扩展的控制就趋于失效(Shih, Delorenzi和Andrews, 1979)，而(16)式则可能对b限制得过严了。

如已强调过的那样，利用阻力曲线方法有可能来分析小量裂纹扩展的稳定性，这对于韧性材料是十分重要的，因为对于这些材料J值可能大大超过J_{IC}。这个方法是半经验性的，因为它以实验测定的阻力数据为依据。虽然从科学的观点来看这个方法不如人们所希望的那样具有充分的根据，然而从工程应用的观点出发，利用实验确定的阻力数据却正好是这个方法的长处。为了研究裂纹更大量的扩展以及对于那些J控制的扩展不适用的材料和几何构形，需要一个用裂纹尖端附近破坏准则建立起来的更带有基础性的方法。

扩展中的裂纹：在弹性-理想塑性固体中裂纹尖端附近的场和裂纹的稳态扩展

扩展中的裂纹在靠近尖端处场的分析之主要进展是对弹性-理想塑性材料取得的。我们的讨论将从这里开始，首先对Ⅲ型问题，然后对Ⅰ型平面应变问题进行讨论。

Ⅲ型

McClintock(1958)以及McClintock和Irwin(1965)首先论证了塑性流动的性质是造成裂纹稳态扩展的根源。他们分析了弹性-理想塑性材料中裂纹的准静态扩展，材料的

剪切弹性模量为G，剪切屈服应力和剪切屈服应变分别为τ_0和$\gamma_0=\tau_0/G$。他们考虑了小范围屈服下的Ⅲ型变形（反平面剪切）并采用了Mises屈服条件，在反平面剪切情况下它与Tresca条件是一致的。将一个简单的靠近裂纹尖端处的破坏准则用于问题的解，他们能对小范围屈服条件下的撕裂阻力曲线加以预测。当裂纹向前推移了一个增量时（包括裂纹长度增加的da和裂纹前方塑性区尺寸增加的dr_p），在裂纹前方塑性区中距离尖端为r处的剪应变增量dr为

$$d\gamma=\gamma_0 r^{-1}dr_p+\gamma_0 r^{-1}[1+\ln(r_p/r)]da \tag{17}$$

由(17)式，裂纹尚未向前推移时其尖端前方塑性区中的应变为

$$\gamma=\gamma_0(r_p/r) \tag{18}$$

其中小范围屈服时的塑性区尺寸$r_p=(2/\pi)J/(\tau_0\gamma_0)$。当裂纹向前推移了相当数量之后(即扩展量已大于几倍的塑性区尺寸时)，裂纹尖端场达到了定常状态，在这种状态下对于随裂纹尖端运动的观察者来说，场呈现不变性。在定常状态的这一极限情形下，$dr_p=0$而(17)式即可积分为

$$\gamma=\gamma_0[1+\ln(r_p/r)+\frac{1}{2}\ln^2(r_p/r)] \tag{19}$$

Chitaley和McClintock(1971)对定常状态所做的一个数值分析给出与静止问题基本相同的塑性区尺寸$r_p\cong(2/\pi)J/(\tau_0\gamma_0)$。于是将(18)和(19)两式相比较就揭示出静止裂纹要比定常状态下扩展的裂纹具有更强的奇异性。这是塑性流动不可逆性的结果。更明确地说，造成这种结果的原因是材料元素在非比例应力（向前移动的裂纹尖端在材料元素的上面或下面通过时改变了应力各分量间的比例）条件下对塑性流动的阻力。

McClintock和Irwin(1965)规定了如下条件，即裂纹的起始扩展和继续向前移动均应满足在塑性区中尖端前方r_C距离处剪应变达到一个临界值γ_C。γ_C和r_C这两个参数值可加以选择以使其适合实验数据(希望如此)，而不必对实际的破坏参数作精确测量。用J_C表示起始扩展的J值，J_{SS}表示裂纹在定常状态下扩展时所需要的J值，则从(18)和(19)两式可得

$$J_{SS}/J_C=\frac{1}{\lambda}\exp[\sqrt{2\lambda-1}-1] \tag{20}$$

其中$\lambda=\gamma_C/\gamma_0$。当$\lambda=1$时，$J_{SS}=J_C$；当$\lambda=10$时，$J_{SS}=2.9J_C$；而当$\lambda=30$时，$J_{SS}=26.6J_C$。在韧性材料中裂纹稳态扩展的潜力是相当大的。

对于小范围屈服，假设$r_p\cong(2/\pi)J/(\tau_0\gamma_0)$，方程(17)和断裂准则在一起可用来预测全部阻力曲线。这里我们将只写下用Paris的无量纲撕裂模量形式来表达的对于Ⅲ型剪切的裂纹扩展阻力曲线的初始斜率

$$T\equiv\frac{G}{\tau_0^2}\left[\frac{dJ_R}{da}\right]_C=\frac{\pi}{2}(\lambda-1-\ln\lambda) \tag{21}$$

$\lambda=1$时$T=0$，$\lambda=10$时$T=10.5$，而$\lambda=30$时$T=40.2$。相当于J为两倍J_{IC}值时的裂纹扩展量这一与材料有关的长度参数(即(12)式中的D)由下式给出

$$D=r_C\frac{\lambda}{\lambda-1-\ln\lambda} \tag{22}$$

当λ很大时，D基本上就是r_C，即使$\lambda=3$，D也仅约为r_C的两倍。

Ⅰ型平面应变

Rice和Sorensen (1978) 以及Rice, Drugan和Sham (1980) 用与上述Ⅲ型问题相同的办法研究了Ⅰ型平面应变裂纹扩展问题。然而Ⅰ型问题的分析要困难得多，而且要更多地依赖于数值解。此外由于按照小应变问题的提法，裂纹尖端前方的应力值为最高，而应变的最大值则在尖端的上方与下方，因而对于Ⅰ型平面应变情况尚无明确的以尖端附近参量为依据的断裂准则。Rice及其合作者采用裂纹尖端后方距离为r_c处的张开位移δ做为尖端附近强度的总度量。

使得弹性-理想塑性Ⅰ型问题的分析有些复杂的另一个特点是在Ⅰ型问题中静止的

和扩展中的尖端附近应力场是不同的，而对Ⅲ型在尖端前方这一重要区域中上述两种情况下的应力状态是相同的。Slepyan(1974)、Rice、Drugan和Sham（1980)以及高(1980)各自独立地得到了在弹性-理想塑性固体中Ⅰ型平面应变条件下扩展的裂纹尖端应力场的解。对断裂分析者们说来幸运的是扩展中的裂纹在尖端附近处的应力场与静止裂纹尖端的Prandtl场没有本质的区别。主要的差别在于裂纹尖端上下大约115°到163°两射线间存在着两个楔形弹性卸载区。在这个楔形弹性卸载区以外的应力与Prandtl场之间的差别不超过百分之几。。

只要能维持Prandtl场和修正的Prandtl场的高度三轴性，Rice及其合作者的方法就可以用于大范围屈服。这里我们将仅限于讨论小范围屈服的情况。材料是弹性-理想塑性的，杨氏模量为E，拉伸屈服应力为σ_0，泊桑比为0.3，采用Mises屈服条件。在裂纹尖端后方一个很小的距离r处，裂纹张开位移的增量与同时存在着的J和a的增量有关，这个关系可表达为

$$d\delta=\alpha\cdot\frac{dJ}{\sigma_0}+\beta\frac{\sigma_0}{E}da\cdot ln\left[\frac{r_0}{r}\right] \tag{23a}$$

其中$\alpha=0.65$，$\beta=5.08$以及$r_0=0.23\frac{EJ}{\sigma_0^2}$ (23b)

（23a）式中的α以及r_0的表达式中系数0.23是利用一个扩展中的裂纹的数值解的拟合得到的，而β则是从修正的Prandtl场推导出来的。长度r_0稍大于小范围屈服的塑性区尺寸。

对于静止裂纹，(23）式给出*

$$\delta=\alpha\cdot J/\sigma_0 \tag{24}$$

它与足够小的距离r无关。在定常状态下$dJ=0$，(23）式经积分后可得

$$\delta=\beta\cdot\frac{\sigma_0}{E}r\left[1+ln\left(\frac{r_0}{r}\right)\right] \tag{25}$$

加上断裂的条件，即在$r=r_c$处$\delta=\delta_c$，用（24）和（25）两式，我们就可解得J_{ss}与J_c的比值

$$J_{ss}/J_c=\frac{1.04}{\lambda}exp(0.197\lambda) \tag{26a}$$

此处 $$\lambda=\frac{\delta_c}{r_c}\quad\frac{E}{\sigma_0} \tag{26b}$$

和Ⅲ型问题一样，（23）式可用来计算小范围屈服的全部阻力曲线。阻力曲线的无量纲初始斜率为

$$T\equiv\frac{E}{\sigma_0^2}\left(\frac{dJ_R}{da}\right)_c=1.53\lambda-7.8\ ln(0.96\lambda) \tag{27}$$

并由（12）式得到J增长到两倍J_{IC}所需要的裂纹扩展总量为

$$D=r_c\frac{\lambda}{\lambda-5.08ln(0.96\lambda)} \tag{28}$$

如果参数λ被选择以适合初始撕裂模量的公式(27)，其中T为实验值，那么对于中等韧性和韧性材料，对应于T值从7到200，λ值约在20到150之间(这些数值已由Paris及其合作者（1979）列于表中)。对于λ的这一变化范围，由（26a)给出的J_{SS}/J_{IC}值在3到一个大于10^{10}的数之间变化。对于高的T值，$D\cong r_C$，这与Ⅲ型问题一样。

由上述可见，在韧性金属中平面应变条件下，预计将发生裂纹大量的稳态扩展。Rice及其合作者们还讨论了在某些特殊的几何构形中小范围屈服和大范围屈服这两种不同条件下裂纹扩展量间的关系。他们发现，对于弹性-理想塑性材料在大范围屈服条件下决不可能严格地实现J控制的扩展。然而，对于足够高的撕裂阻力，他们发现扩展量与几何构形间几乎是无关的。

从（26a)式或从（20）式看到J_{SS}/J_{IC}对λ有指数型的依赖关系，因而这个比值可能非常之大。这就提出了一个问题，这些预测是否很灵敏地随着它们赖以建立的材料模型而改变？其所以发生这种指数依赖关系是由

*对于静止的裂纹，$da=0$，故（23）式右端的第二项恒等于零——译者注。

于在（17）和（23a）两式中与裂纹扩展有关的项里存在着r的对数，而这些项又是与具有光滑Mises屈服表面的弹性-理想塑性体有关的。Dean和Hutchinson（1980），Parks, Lam和McMeeking（1981）利用一个特殊的有限元方法研究了应变硬化以及形成屈服面角点后对于裂纹定常扩展的影响，这些影响将在下一节讨论。最近许多研究者进行了定常问题的数值研究。除了上面谈到的两项研究以外还有，Nguyen和Rahimian（1980）考虑了一个半无限裂纹在一个等宽度的弹性-理想塑性板条中的定常传播，Andersson（1974）分析了小范围屈服的I型平面应力问题以及Ⅱ型问题。Douglas, Freund和Parks（1981）计及惯性对运动的阻力考虑了弹性-理想塑性材料中小范围屈服的Ⅲ型动态定常扩展问题。他们提出了裂纹扩展速度对塑性区、裂纹尖端前方的应变以及裂纹张开位移的影响。Aboudi和Achenbach（1980）研究了粘塑性加工硬化材料中动态扩展的Ⅲ型裂纹在到达定常状态之前的过渡。

扩展中的裂纹：硬化材料中的尖端场和稳定裂纹扩展

硬化材料中裂纹定常扩展的数值研究

Dean和Hutchinson（1980）考虑了具有Mises屈服表面的材料中I型平面应变条件下的定常扩展。材料的拉伸应力-应变曲线呈分段幂硬化形式

$$\begin{aligned} \varepsilon/\varepsilon_0 &= (\sigma/\sigma_0) \qquad \sigma\leqslant\sigma_0 \\ \varepsilon/\varepsilon_0 &= (\sigma/\sigma_0)^n \qquad \sigma>\sigma_0 \end{aligned} \tag{29}$$

其中$\varepsilon_0=\sigma_0/E$。他们对裂纹尖端后方的张开位移$\delta(r)$做了数值计算。他们对定常状态的解以及静止裂纹问题的（24）式施加了扩展条件$\delta(r_c)=\delta_c$，并计算了在$10\leqslant\lambda\leqslant35$条件下$n=3$、10和$\infty$时的$J_{SS}/J_{IC}$，其中$\lambda$由(26a)式定义。弹性-理想塑性固体（$n=\infty$）的结果基本上与（26a)式的相同，而硬化材料的结果则远较（26a）式的为低。例如，对于$n=\infty$，$\lambda=30$时$J_{SS}/J_{IC}=13.5$，而对于$n=10$和3该比值则分别近似地等于7和3.5。对于更大的λ则随着n值的不同J_{SS}/J_{IC}值将有更大差别，这一趋势与Ⅲ型问题类似。在利用靠近尖端处的准则来预测裂纹扩展时，应变硬化显得十分重要。根据弹性-理想塑性的计算来预测阻力曲线有可能是远非保守的。

在Ⅲ型问题中，在屈服面上出现角点的影响不像应变硬化本身的影响那样大。然而Parks, Lam和McMeeking（1981）发现，对于I型平面应变问题用角点理论所得到的解与相应的Mises材料的解之间有更显著的差异。例如，采用角点理论时裂纹尖端前方所达到的三轴张力的水平远较光滑屈服面的情况（亦即Prandtl场的情况）为低。对于上述差异给予裂纹稳态扩展的影响目前尚无定量的评价。

在以上所谈到的工作中采用的靠近裂纹尖端处的断裂准则是粗糙的，而且充其量也只能指望它对于发生在靠近裂纹尖端处复杂的断裂过程的临界程度提供一个近似的量度。扩展中的裂纹在尖端处的应变分布与静止的裂纹在尖端处的情况很不相同，这可能意味着不能期望采用一个单参数的临界强度（例如r_c处的r_c或δ_c）来给出起裂和继续扩展的统一准则。断裂过程的细节和靠近裂纹尖端处连续介质理论中的应力应变场更直接的耦合可能是重要的。采用上述单参数准则是否能得到与实验结果相符的阻力曲线，这是一个还需要观察一下的问题。对于具有$J_{SS}/J_C\doteq2$的高强度钢，Hermann和Rice（1980）沿着这种途径所做的初步努力说明了这种方法是有希望的。

硬化材料中定常扩展裂纹的奇异场

上面谈到的方法其进一步的发展将要求描述应变硬化材料中裂纹扩展场的奇异性。目前我们在这方面的知识还是不完全的。对于应变硬化固体，目前还没有得到像弹性-理想塑性瞬态问题中（17）式或（23a)式那

样普遍的结果。然而已经有了一些定常问题的结果，下面将予以讨论。

对于杨氏模量为E，屈服以后切线模量为E_t的线性硬化体，Amazigo和Hutchinson（1977）已证明，定常扩展中的裂纹尖端主导的奇异场具有如下形式

$$\sigma_{ij} = A\sigma_0 r^{-q} \cdot \tilde{\sigma}_{ij}(\theta)$$

和 $$\dot{\varepsilon}_{ij} = A\varepsilon_0 r^{-q-1} \cdot \tilde{\varepsilon}_{ij}(\theta) \qquad (30)$$

其中σ_0和ε_0是屈服应力和屈服应变，A是一个自由的幅度因子。奇异性的强度q以及与θ有关的量都是E_t/E的函数，并且对于Ⅲ型、Ⅰ型平面应变和平面应力等问题，这些都已经求得。当$E_t/E\to 0$时，奇异性的强度q等于零。它相当于弹性-理想塑性这一极限情况。当E_t/E小时，q随E_t/E而急剧增长，这提示q强烈地依赖于应变硬化。对于一个在加载点处屈服面产生角点的线性硬化体，Lo和Peirce（1980）研究了Ⅲ型问题并得到了类似结果。

在求解(30)式所表示的场时，Amazigo和Hutchinson忽略了在尖端后方靠近表面区域的二次塑性加载。在Ⅲ型问题中二次塑性区的影响是小的，但是上面谈到的最近关于Ⅰ型问题在靠近裂纹尖端处的弹性-理想塑性行为所做过的工作中指出，二次塑性区是平面应变问题的重要特征。因此，在这种情况下应考虑二次塑性加载重新求解，否则就不能应用。

Achenbach和Kanninen（1978）对于线性硬化材料已经把这种分析推广到包括惯性的问题。他们发现，在Ⅲ型问题中动态效应对（30）式中奇异性的强度或场随θ变化的函数影响甚微。关于弹性-理想塑性体中动态裂纹扩展的奇异性场，Achenbach和Dunayevsky（1980）以及Achenbach，Kanninen和Popelar（1980）都曾做过进一步的工作。

由于几种原因，线性硬化材料的场的用途受到限制。线性硬化通常只是实际硬化行为的十分粗略的表征。此外，在$E_t/E\to 0$的极限情况下，双线性材料的场（30）式并不趋近早已被导出的弹性-理想塑性体的解，虽然这一结论目前还不能肯定。与此密切相关的是（30）式保持有效性或起主导作用的区域的尺寸问题。虽然并不肯定，但很可能在零应变硬化的极限情形下（30）式的主导区为零。

更真实的应变硬化体，如（29）式所描写的幂硬化材料中的裂纹扩展奇异场过去一直被认为是最难以捉摸的。然而高和黄（1981）在ICF5上报告的工作中提出了幂硬化体中奇异场的一个新形式。

扩展中的裂纹在靠近尖端处行为的一个重要特征是当趋近裂纹尖端时弹性与塑性应变率的平衡。如果没有弹性应变率的贡献，塑性应变率本身是不协调的。如Rice(1973)所强调的那样，裂纹在弹性-理想塑性体中扩展的情况就是这样。在双线性硬化的解中也是如此，对于在本文最后一节中将要讨论到的Hui和Riedel（1980）关于蠕变裂纹扩展场所取得的结果，它还是个关键。相反，在决定对于静止裂纹起主导作用的奇异行为时，例如在HRR场中，弹性应变不起作用。弹性应变率与塑性变率之间的平衡也是幂硬化材料中裂纹扩展奇异场的特征。试图假设在屈服区中弹性应变率在渐近的意义上可被忽略从而给出奇异场，这一努力一直没有取得成功（Amazigo和Hutchinson未发表的工作；高和黄，1981）。在屈服区中略去弹性应变率后，则支配尖端附近行为的方程的解在形式上可取为

$$\sigma_{ij} = Ar^{-q}\tilde{\sigma}_{ij}(\theta) \qquad (31)$$

然而，不能由最终的解构成整个尖端附近的场。

高和黄（1981）考虑过奇异场的另一种可能形式，它包含着在主塑性区中当趋近裂纹尖端时弹性的与塑性的应变率之间的相互作用。他们研究了Ⅰ型平面应变问题，并对不可压缩材料给出了最详细的结果。在他们的解中，应力在靠近裂纹尖端处的展开在形

式上为

$$\sigma_{ij}=\left[\ln\frac{A}{r}\right]^{p}\left\{\sigma_{ij}^{(0)}(\theta)+\left[\ln\frac{A}{r}\right]^{-1}\cdot\sigma_{ij}^{(1)}(\theta)+\cdots\right\} \tag{32}$$

其中A是具有长度量纲的幅度因子。指数p可以这样选择以使弹性的与塑性的应变率在协调方程中保持正确的平衡；在Ⅰ型问题中给出

$$p=\frac{1}{n-1} \tag{33}$$

假设这种形式的解是正确的，高和黄指出：最低阶的θ变数$\sigma_{ij}^{(0)}$必然与前面所讨论过的弹性-理想塑性极限情况的完全一样。这样一来，高-黄解就具有所需要的特征，即当n变大时主导的奇异应力场一致地趋近于弹性-理想塑性极限。在高-黄解可以认为是正确的之前，解中还存在着一些必需解决的技术性的困难，或至少有待于得到更好的理解。一个困难是，当θ接近于塑性加载与弹性卸载的边界时应变率中的塑性部分并不消失*。虽然对于弹性-理想塑性问题这并非是必须的，然而对于硬化材料则应要求满足。高和黄认为，当趋近于裂纹尖端时在渐近的意义上这一条件并非是必须满足的。如果他们是正确的，这可能意味着（32）式有效的区域是很小的。我们期望这一问题的进一步澄清以及高-黄解的其它细节将很快问世。

在蠕变的固体中裂纹的奇异场

在单轴拉伸情况下按幂规律蠕变的固体，其应变率可表示为

$$\dot{\varepsilon}=\dot{\sigma}/E+\dot{\varepsilon}_0(\sigma/\sigma_0)^n \tag{34}$$

其中σ_0和$\dot{\varepsilon}_0$分别为参考应力和参考应变率。利用应力偏量和Mises的不变量，（34）式中的蠕变部分照例被推广到多轴应力状态。对于这样一种弹性-按幂规律蠕变的材料中的静止裂纹，HRR奇异性（2）—（4）式（其中$\alpha=1$）也给出其尖端附近的场，其中的应变和位移依次变为应变率和速度。一个物体承受准静态的阶段加载，在t=0时经历一个瞬态过程，在此过程中同时出现弹性和蠕变应变率，而且在裂纹尖端处的蠕变区尺寸增大。在短时间内当蠕变区还不大时，HRR场的幅度可以与弹性应力强度因子相关。在经过足够长的保载时间以后，物体趋近于一个定常状态，这时应力不再变化以至全部应变都是由于蠕变而产生的。在这些限制条件下，可以再定义一个J类型的与路径无关的积分，它用C*来表示。Landes和Begley（1976）以及Nikbin，Webster和Turner（1976）等的工作有助于发展基于C*的实验方法。Kumer和Shih（1980）的工作正在使按幂规律蠕变的材料对C*的估算成为可能。Riedel和Rice（1980）以及Bassani和McClintock（1980）已经研究了静止裂纹的瞬态问题并且能估算靠近裂纹尖端处的场稳定在定常蠕变状态所需要的时间以及瞬态期间HRR场的幅度。

Hui和Riedel（1980）确定了弹性-按幂规律蠕变的固体（34）式中扩展着的裂纹的奇异场。他们给出了Ⅲ型以及Ⅰ型平面应力和平面应变定常裂纹扩展的结果。他们指出，这些结果在瞬态蠕变断裂时可以应用于很靠近裂纹尖端处。在得到他们的解时Hui和Riedel指出，当n>3时在趋近于裂纹尖端处必然在弹性的和蠕变的应变率之间保持平衡。如果我们假设弹性应变率是可以忽略的，则应力一定恰好是HRR场的结果，但这将导致矛盾，因为从HRR应力场导出的弹性应变率与在这一假设下导出的蠕变应变率相比具有更强的奇异性。相反地，如果假设在趋近于裂纹尖端处的蠕变应变率可以忽略，则奇异应力场正好是众所周知的弹性奇异场，其应力具有$1/\sqrt{r}$的奇异性。但这一

*这一困难在ICF5前夕已被高、黄等在有关Ⅲ型幂硬化材料定常扩展的工作中解决，该工作即将发表于IJF——译者注。

假设在n>3时也同样导致矛盾，因为它给出比弹性应变率具有更强的奇异性的蠕变应变率。Hui和Riedel指出，在n>3时裂纹按定常状态扩展的方程可以有如下分离形式的解

$$\sigma_{ij}=c_n\left[\frac{\dot{a}}{r}\right]^{\frac{1}{n-1}}\cdot\tilde{\sigma}_{ij}(\theta,\ n)\quad(35)$$

其中 $\dot{a}$ 为裂纹尖端的速度，c_n 是一个完全取决于奇异性分析的有量纲的常数。对（35）式中与r有关项的指数的选择应使弹性与塑性应变率具有可以比较的奇异性。对于n<3的情况，尖端附近的应力场为弹性奇异应力场，并且如Hart（1980）也讨论过的那样，弹性应变率确实对蠕变应变率起主导作用。

在蠕变裂纹扩展中，裂纹尖端的速度 $\dot{a}$ 起着尖端附近场（35）式的幅度因子的作用。Hui和Riedel讨论了如下事实，即在小范围屈服条件下，可以独立于理论问题中的远场应力强度因子K来规定速度 $\dot{a}$。只有在解中规定了某些蠕变裂纹扩展准则时，$\dot{a}$ 才变得与K有关。Hui的工作（未发表）表明，在Ⅰ型平面应变小范围屈服情况下，奇异场主导的区域约为名义蠕变区的三分之一。

参 考 文 献

Aboudi, J. and J. D. Achenbach (1980). Rapid Mode Ⅰ crack propagation in a strip of viscoplastic work-hardening material. To be published in Int. J. Solids Structures.

Achenbach, J. D. and M. F. Kanninen (1978). Crack tip plasticity in dynamic fracture mechanics. In N. Perrone, et al (Eds.), Fracture Mechanics, The University of West Virginia Press. pp 649—670.

Achenbach, J. D. and V. Dunayevsky (1980). Fields near a rapidly propagating crack tip in an elastic-perfectly plastic material. Northwestern University Report N. U. -SML TR* 80—1.

Achenbach, J. D., M. F. Kanninen and C. H. Popelar. Neartip field for fast fracture in an elastic-plastic material. To be published in J. Mech. phys. Solids.

Amazigo, J. C. and J. W. Hutchinson (1977). J. Mech. Phys. Solids, 25, 81—97.

Anderssen, H. (1974). J. Mech. Phys. Solids, 22, 285—308.

Bassani, J. L. and F. A. McClintock (1980). Creep relaxation of stresses around a crack tip. To be published in Int. J. Solids Structures.

Chitaley, A. D. and F. A. McClintock (1971). J. Mech. Phys. Solids, 19, 147.

Dean, R. H. and J. W. Hutchinson (1980). In Fracture Mechanics, A. S. T. M.STP 700. pp 383—405.

Douglas, A. S., L. B. Freund and D. M. Parks (1981). Dynamic steady antiplane shear crack growth in an elastic plastic material. To be presented at ICF5, Cannes.

Gao, Y-C. (1980). Acta Mechanica Sinica, 1.

Gao, Y-C. and K-C Hwang (1981). Elastic-plastic fields in steady crack growth in a strain-hardening material. To be presented at ICF5, Cannes.

Hart, E. (1980). Int. J. Solids Structures, 16, 807.

Hermann, L. and J. R. Rice (1980). Comparison of experiment and theory for elastic-plastic plane strain crack growth. Brown University, Division of Engineering Report, February 1980.

Hui, C. Y. and H. Riedel (1980). The asymptotic stress and strain field near the tip of a growing crack under creep conditions. To be published in Int. J. of Fracture.

Hutchinson, J. W. (1968). J. Mech. Phys. Solids, 16, 13—31, 337—347.

Hutchinson, J. W. and P. C. Paris (1979). I Elastic-Plastic Fracture, A. S.

T. M. STP 668.pp 37—64.

Kumar, V. and C. F. Shih (1980). In Fracture Mechanics, A. S. T. M. STP 700. 406—438.

Landes, J. D. and J. A. Begley (1976). In Mechanics of Growth, A. S. T. M. STP 590, 128—148.

Lo, K. K. and D. peirce (1981). The effect of yield surface vertex on crack tip fields in Mode Ⅱ. To be published in J. Mech. Phys. Solids.

McClintock, F. A. (1958). J. Appl. Mech., 25, 581.

McClintock, F. A. and G. R. Irwin (1965). A. S. T. M. STP 381. pp84—113.

McClintock, F. A. (1971). In H. Liebowitz (Ed.) Fracture, Vol. 3, Academic Press, New York. pp 47—225.

McMeeking, R. M. (1977). J Mech. Phys. Solids, 25, 357—381.

McMeeking, R. M. and D. M. Parks (1979). In Elastic-Plastic Fracture, A. S. T. M. STP 668. pp 175—194.

Nguyen, Q. S. and M. Rahimian (1980). Mouvement Permanent d'une Fissure. To appear in J. de Mecanique Appliquee.

Nikbin, K. M., G. A. Webster and C. E. Turner (1976). In Cracks and Fracture. A. S. T. M. STP 601. pp. 47—62.

Paris, P. C., H. Tada, Z. Zahoor and H. Ernst (1979). In Elastic-plastic Fracture, A. S. T. M. STP 668. pp. 5—36, 251—265.

Parks, D. M. (1980). The dominance of the crack tip fields of inelastic continuum mechanics. Presented at 2nd Int. Conf. on Numerical Methods in Fracture Mechanics, Swansea, July 1980.

Parks, D. M., P. S. Lam and R. M. MeMeeking (1981). Some effects of inelastic constitutive models on crack tip fields in steady quasi-static growth. To be presented at ICF5, Cannes.

Rice, J. R. (1968). J. Appl Mech., 35, 379—386.

Rice, J. R. and G. Rosengren (1968). J. Mech. Phys. Solids, 16, 1—12.

Rice, J. R. (1973). In Mechanics and Mechanisms of Crack Growth, British Steel Corp.

Rice, J. R. and E. P. Sorensen (1978). J. Mech. Phys. Solids, 26, 163.

Rice, J. R., W. J. Drugan and T-L. Sham (1980). In Fracture Mechanics, A. S. T. M. STP 700. pp 189—219.

Riedel, H. and J. R. Rice (1980). In Fracture Mechanics, A. S. T. M. STP 700 pp 112—130.

Shih, C. F. (1979). Relationships between the J-integral and the crack opening displacement for stationary and growing cracks. General Electric Company TIS Report No. 79CRDO75. To appear in J. Mech. Phys. Solids.

Shih, C. F., H. G. Delorenzi and W. R. Andrews (1979). In Elastic-Plastic Fracture, A. S. T. M. STP 668. pp. 65—120.

Shih, C. F. and M. D. German (1979). Requirements for a one parameter characterization of crack tip fields by the HRR singularity. General Electric Company TIS Report No. 79CRD076. To appear in Int. J. Fracture.

Slepyan, L. I. (1974). Izv. AN SSSR. Mekhanika Tverdogo Tela, 9, 57—67.

Sternberg, E. (1979). In Trends in Solid Mechanics 1979, Delft University Press and Sijthoff and Noordhoff, Delft. pp 225—236.

Tracey, D. M. (1976). J. Eng. Mat. and Technology, 98, 146.

Turner, C. E. (1979). In D. G. H. Latzko (Ed.), Post Yield Fracture Mechanics, Chap. 2, Applied Science, London.

(张晓堤译　孙训方校)

三维静态裂纹问题解（评论）

V.V.Panasyuk, A.E.Andrejkiv, M.M.Stadnik

引　言

最近二十年来，许多从事固体强度研究的力学工作者、物理学家、材料科学家充分研究了变形固体中裂纹的扩展问题。这主要是因为需要固体方面通用的裂纹理论，而这种理论对解决许多实际工程是重要的。

众所周知，根据实验数据，脆性和准脆性材料是通过裂纹缺陷的引发和扩展而断裂的。因此，许多科学家对可变形开裂的脆性固体的极限平衡问题作了深入研究。迄今已获得某些重要资料，并解决了大量有关裂纹的数学问题。所解决的主要是二维脆性裂纹问题。对二维裂纹问题的求解已作过评论。

对于三维裂纹问题，许多科学家也作了研究，但是缺乏对有外载荷情况下的三维裂纹问题解的评论。对这些解也未明确分类。

我们的研究就试图弥补这一点。本文评论了关于静载下三维固体被单裂纹以及裂纹系削弱时的应力状态和极限平衡状态的研究。

对问题解的分析

Sack〔1〕首先研究了被"辨士"形平裂纹削弱并随均匀分布的应力（假设这种应力在无限远处垂直于裂纹平面）而伸长的三维各向同性脆性固体的极限平衡现象。在此研究中应用了能量准则。后来考察了更一般加载情况〔2-6〕和剪应力作用于裂纹边〔7-11〕的三维问题。在〔12-23〕中估算了有"辨士"形裂纹的固体的应力状态和应力强度因子。考察了下列情况：（1）受轴对称的法向和周向应力作用的裂纹面〔12,14〕；（2）受集中力作用而伸长的固体〔13,15〕；（3）由应力产生的位移决定该应力作用下的裂纹边〔16〕；（4）裂纹面位移为已知；（5）在恒定法向应力作用下的裂纹边以及在按抛物线原理交变的法向应力作用下的裂纹端部〔18〕；（6）已知一裂纹边的位移值和另一裂纹边的应力值〔19〕；（7）法向应力作用于裂纹表面〔20〕；（8）裂纹位于与其表面垂直的对称质量力场（力与其表面垂直）中〔21-22〕，或由恒定内聚力在裂纹端附近〔21〕加载；（9）裂纹位于预先受载荷的空间，已知裂纹表面的温度分布是非轴对称的〔23〕；在〔24-27〕中这问题作为复杂形状扁平裂纹问题的特殊情况加以考虑。在扭转状态下，具有"辨士"型裂纹的无限固体问题也已得到解决〔28,29〕。

具有裂纹型缺陷的一部分固体的应力状态和极限平衡的研究也是有意义的。其中一个问题在〔30〕中得到解决，那就是分段固体的Sack问题，即：分段固体由两个具有不同弹性性质的半有限空间组成，在其界面处存在一扁平裂纹。"辨士"型裂纹位于层和半空间界面〔31〕，位于两半空间的界面〔32-37〕或位于多层介质界面〔38-40〕等的轴对称问题已有研究。正如〔37〕中强调指出的那样，在〔36〕中得到的结果与〔30〕中得到的一般解有本质上的区别。考虑了"辨士"型裂纹在以两个不同的半空间为界的一层内〔41〕，或位于同另一半空间相接的一半空间内〔42〕，裂纹都与固体界面平行这两种情况。对于其边界沿一定平面的由两种不同材料所组成的固

体这样一个更一般的裂纹问题在〔43〕中作了解答。在这情况中，"辨士"型裂纹可平行或垂直于界面，或扩展到界面。受扭转的组合弹性层以及受剪切的具有边界刚性底层的、为介质界面上一扁平圆裂纹削弱的半空间，在〔44，45〕中研究过。

"辨士"型裂纹在两个介质界面上的轴对称问题已用一新公式求解〔46〕。这问题的本质就在于对裂纹面$z=0$引进了一个$a<r<L$（a是裂纹半径）的环状小区，并假定在这个区域中裂纹边缘无摩擦。作为这种现象的结果，和由于与$r=L$处接触的光滑裂纹边的条件，应力奇点采取正常的而不是振动的形式。

"辨士"型裂纹垂直于加强纤维的加强无限母材的轴对称问题在〔47-50〕中作了研究。

弹性模量随座标z变化的无限固体，当被垂直于oz轴的"辨士"型裂纹削弱时，其拉力情况在〔51,52〕中作了研究。在估算固体应力值时，不同介质对外载荷临界值的影响颇大，这点是很重要的〔52〕。

为圆裂纹削弱的三维各向异性固体的应力状态已被研究过〔53-57〕。在那些研究中假定裂纹边受到法向位移〔53〕、法向或剪切应力的作用〔55,56〕。并把这问题看作是一个具有圆界面边界条件〔57〕的横向各向同性介质的一般混合问题。

解决具有任意定向裂纹型缺陷的脆性固体的极限平衡问题能使研究者画出所谓"极限应力图"。关于两轴向拉-压状态固体的这种图已画在〔3,9〕中。关于具有任意定向"辨士"型裂纹的无限脆性固体在单轴拉伸下的断裂判据在〔58〕中作了推荐。在〔9〕中该问题是根据假定裂纹在其固体的任意载荷平面内扩展来解决的。但是，从试验数据看来，这个假定并不总与实际情况相符合。在〔59〕中，根据从物理观点看来是更好的原理〔60〕，对所述问题做了解答。

具有外圆裂纹的无限固体的弹性和极限平衡状态在〔29,36,59,61-64,〕中作了研究。在〔61,63〕中研究了各向同性固体的弹性平衡，其中裂纹表面受法向的集中载荷或对称于裂纹平面的分布载荷的作用，在〔64〕中的研究是关于具有外圆裂纹的横向各向同性介质的。与应力状态一起，固体在扭转时〔29〕和受轴向拉伸〔62〕时外载的断裂值，是利用力判据确定的。〔59〕研究了主外力矢量与裂纹平面倾斜的情况。在这情况中，根据力的研究方法得到外力的极限值和原裂纹扩展线的角度。对其界面上具有外圆裂纹的两个不同半空间组成的伸长量不等的固体，研究了它的应力分布〔36〕。

应用各种近似法，使我们能确定被内扁平椭圆裂纹〔14,65-79〕削弱的各向同性空间的应力应变。其中，考虑了分别对于法向应力〔14,65-68〕、周向应力〔69-71〕、法向和周向应力并存〔72-74〕、沿主半轴或次半轴〔75〕方向的弯曲载荷作用的裂纹表面，以及对于裂纹断面区域内给定位移性状的特性〔76〕等类问题。在上述问题范围内从强度或能量判据测定了临界载荷〔65,66,72,73,77-79〕。此外，确定了三轴拉-压〔78〕或单轴拉伸下〔79〕开裂固体的极限平衡，其中，裂纹与外力方向呈任意取向。

具有内椭圆裂纹的各向异性空间中的应力已有研究〔80-84〕。在此假定，固体在无限远处受了任意外载荷〔83,84〕或受到和裂纹平面相平行的剪切载荷〔80〕的作用。

在载荷与裂纹平面呈对称和反对称的情况下，具有外椭圆裂纹的无限固体应力强度因子的确定问题已得到解决〔85,86〕。在拉力垂直于外椭圆裂纹平面的固体极限平衡状态在〔87,88〕中作了研究。著作〔89,90〕论述了当开裂固体在多项载荷下具有外椭圆裂纹的各向异性介质中的应力分布分析，和具有随深度交变的剪切模量并含有内或外椭圆裂纹的无限介质中的应力分布分析。

具有扁平圆裂纹各向同性无限固体的弹性问题已在〔91-97〕中解答。作者分别对裂纹边的轴对称法向〔91-94〕或周向加载〔95,96〕以及对弯曲下的有圆裂纹的固体〔97〕，分

析了这两种情况裂纹断面附近的应力场与断面内外半径比的依赖关系。假若裂纹断面的内外半径比等于 2，则可由作用力的方法，确定裂纹内、外断面的临界外载荷值。在拉伸状态下具有以两个非同心圆为界的扁平裂纹的三维固体已在〔98〕中研究，其中极限载荷值是由圆心间距和它们的半径来确定的。

在〔99，100〕中考虑了具有环形裂纹的横向各向同性固体的轴对称法向载荷。在这种研究中确定了裂纹面的应力，裂纹边的位移，应力强度因子〔100〕，又在能量判据的研究中，外裂纹半径为无限大(外圆裂纹的情况)时，确定了均匀拉伸下固体的极限平衡〔99〕。

如大家知道〔60〕，脆性开裂固体的极限载荷值，不一定总是断裂值。这是在裂纹断面的所有点同时经受动态平衡状态时发生的。而根据数学观点来看，确定断裂外载荷值是最困难的。在载荷单调增加的情况下，这种确定需要一些附加的裂纹扩展动力学方面的检测。对于有孤立的法向断裂的类圆裂纹的各向同性固体〔60〕以及对于在同一平面上的这类裂纹系统〔101〕，所述问题已得到解决。尤其是，具有内椭圆裂纹〔60〕或双周期圆裂纹系统〔101〕的无限固体的断裂载荷值已确定出。结果分析表明，在所论述情况中，断裂载荷值与极限载荷值稍有不同。根据〔60〕的结果，〔102，103〕中求出了被平面卵形裂纹削弱的三维固体的断裂外载荷值。作者描述了有孤立类圆裂纹的固体的应力状态和极限状态，该固体受垂直于裂纹平面的拉力作用〔25，104-108〕。对于椭圆〔25，104-106〕，类矩形〔105，108〕或卵形〔107〕裂纹，在固体受不均布拉力的情况下，得到近似公式以计算它们的极限载荷值。具有圆〔104〕或椭圆裂纹〔106〕的受到相对于裂纹平面的集中拉力作用的固体，定义了极限平衡状态。在圆裂纹的情况中，其力线相对于圆心有一位移；在椭圆裂纹的情况中，力线与椭圆心相交并与裂纹平面有一段距离。类圆裂纹在〔87〕中作了研究，其中根据作用力判据，对于呈Ljame曲线形状裂纹断面，求得主拉力矢量的临界值。从〔60〕得到的公式，求得具有内类圆裂纹的无限固体在静法向载荷下的应力强度因子。在〔109〕中以准静态公式来研究问题。他们完成了裂纹扩展动力学的数学分析和固体寿命的数值分析，不管固体的无限尺寸，这种分析实际上是受到限制的〔109〕。

对于以任意光滑断面为界的法向断裂的扁平裂纹，根据变分法，应力强度因子比较定理在〔110〕中得到证明。这就可使研究人员根据熟知的普通“标准”裂纹的特性，估算应力强度因子的上界值和下界值。

利用位于裂纹断面的局部座标系，研究了具有任意曲线形状的裂纹的应力奇点〔79，111〕。在〔111〕中已说明裂纹断面角点的应力场奇异性可能比平滑断面的要强些或弱些。用积分方程法〔24，112-114〕和变分法〔115〕，研究了被任意形状的扁平裂纹削弱的固体的弹性问题。对具有方形〔112-114〕，半圆〔112〕和矩形〔114，115〕裂纹的固体的伸长已做了详细分析。应强调指出，在〔112，114〕中对于方形裂纹求得的所有应力强度因子值是互为一致的，而与〔24〕中得到的数据不同。在〔27〕中，计算半圆裂纹的应力强度因子值的表达式是依据求积法推导出来的。

也在法向受力〔116〕，或者法向力、剪力和弯曲力〔117〕同时作用的情况下，研究了扁平抛物形裂纹边附近的应力强度状态和应力强度。

由于在不平表面上切割而削弱了的空间的弹性问题也已研究过〔118-131〕。用复变函数法〔118-121〕和重积分方程法〔122，123〕研究了关于各向同性固体球形切割情况下的轴对称问题。其中，在均匀法向力作用下的表面切口的问题〔121-122〕或于无穷远处受均匀扭转的固体问题〔123〕，都已得到解答。用二元级数方程法研究了具有球形切口的弹性介质周围的拉力。用边界积分法得到非扁平裂纹问题的通解〔127，128〕。作为一个特

例，对于无限深和椭圆截面的圆锥切割以及由三个独立的自由面组成的表面裂纹，其解已在〔127〕中求得。〔125〕的作者把周向断裂的筒状裂纹问题归结为解积分方程，此方程对问题的小的和大的无因次参数用渐近线法求解。根据弹性势能理论以及通过熟知的方法把它进一步化成可演算准微分方程，解决了非扁平切割的问题〔126〕，具有沿转动双曲面部分切割的无限固体的第一类和第二类轴对称问题已归结为求解两个第二类Fredholm积分方程〔129,130〕。抛物线切割的情况在〔131〕中作了研究。

利用Polozhij推荐的P-解析函数法，在〔132,133〕中，作者研究了被内或外轴对称裂纹削弱的空间的轴向压缩的弹性问题，其中假定裂纹边距离与另一些变形值是可比的。得到了求裂纹边分界面的半径的积分方程。

〔134-140〕论述了为平行的圆裂纹系统削弱的固体的弹性平衡。在〔141.142〕中研究了外圆裂纹系。在所有研究中，问题都归结为Fredholm积分方程组，通过数值计算或用小参数对未知函数级数展开求解。周期裂纹系在〔135,136〕中详细作了研究；相同半径值的两裂纹情况在〔134,135,140〕中作了研究。不同半径的两裂纹其边均匀受压的情况在〔137〕中作了研究。在扭转中具有两共轴裂纹的固体的应力强度因子值在〔138〕中求出，与单裂纹的情况相比，此固体的强度提高了。在〔141,142〕中依据裂纹理论以更通用的公式考虑了该问题。在这些研究中，除弹性问题外还研究了固体的极限平衡。此外，根据能量方法确定了外载荷极限值和初裂纹扩展的倾斜角，裂纹的数量和它们的位置对极限载荷值的影响也已说明。

依靠广义圆柱座标，在〔143〕中研究了有两个法向断裂共轴椭圆裂纹的正交各向同性固体的弹性问题。这问题归结为第二类Fredholm积分方程，这种方程可用数值法求解。各向同性固体中的类似问题已在早些时候解决〔144〕。

研究了被两个共轴球形切割〔145〕或与定平面对称的两个双曲线形切割〔146〕削弱了的无限固体的轴向对称弹性问题。此类问题的求解归结为相应的Fredholm正则积分方程组。

对于二维方程的情况总结了一维二重积分方程组的解〔147,148〕后，作者把位于一平面内的圆裂纹系的空间弹性问题归结为解第二类积分方程。根据这个结果研究了下列各种情况的极限平衡状态：(1) 两圆裂纹，其边法向受压〔147〕；(2) 受拉伸的带内圆裂纹的两脆性棱柱棒，其截面为无限窄条形、正方形、三角形〔149〕，和矩形或六方形〔150〕；(3) 内圆裂纹位于拉应力区的矩形棒条受弯曲的情况〔151〕。在所有情况中用逐次近似法求解方程。必须指出，在〔152〕中以不同方法和数值计算解了带圆裂纹矩形棒条的弯曲问题，根据插值法〔153〕，同一问题用精确公式求得近似解（也就是考虑了棒的各种作用力对极限状态的影响）。在〔104,105〕中研究了带有远离边缘的椭圆裂纹的棒条受弯曲时的受力情况。无限固体的两圆裂纹其边受法向〔156,157〕和周向载荷的情况〔158〕也作了研究。这问题归结为以逐次近似法解第二类Fredholm方程。

研究者应用积分方程法〔159〕求得被一平面内类圆裂纹系统削弱了的无限固体的弹性问题的近似解。由此他们得到求均布法向压力极限值的明显表达式，该压力是加在两相似椭圆裂纹边上〔110〕或加在有断面以径矢量$R(B)=\alpha(1-n\cos^2 2\beta)$为界的两相似裂纹的边上（式中：$\alpha$是包围裂纹断面的圆的半径；n为一参数，$0\leq n<1$；$\beta$是以上述圆的圆心为原点的极座标系$or\beta$的角度）。在〔160〕中对具有两椭圆裂纹的伸长固体的应力强度因子作了估算。

根据裂纹附近区域与弹性半空间的贯穿孔底部区域的应力状态间的相似性，对由缩颈系统内连两相同半空间组成的无限固体的