奥数教程

总主编
单墫 熊斌

· 初二年级 ·

本册主编 赵雄辉

华东师范大学出版社

总主编 单 墫 熊 斌

奥数教程

·初二年级·

本册主编 赵雄辉
参 编 者 申建春
卞新荣

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

奥数教程．初二年级／赵雄辉主编．—上海：华东师范大学出版社，2000．11
ISBN 7-5617-2378-4

Ⅰ．奥...　Ⅱ．赵...　Ⅲ．数学课-初中-教学参考资料　Ⅳ．G634．603

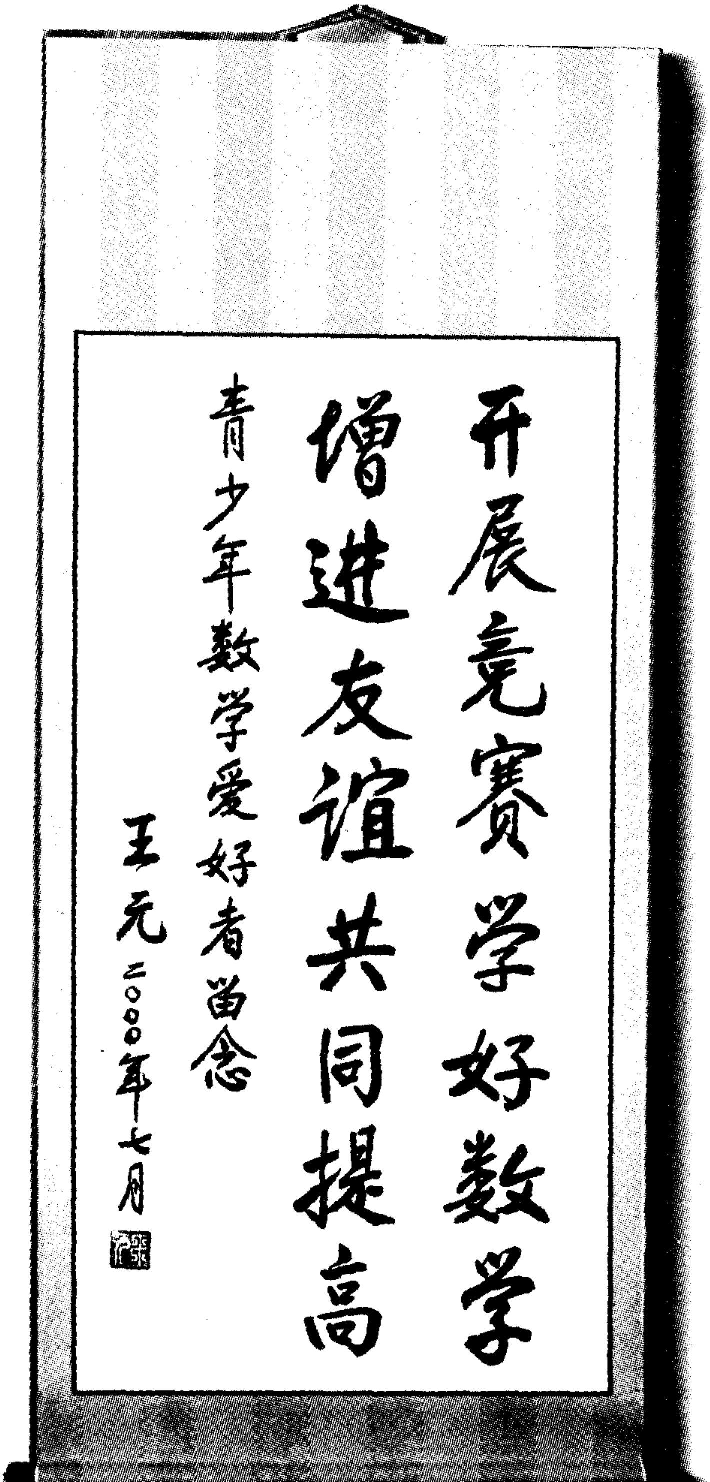
中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第48987号

奥 数 教 程

·初二年级·

总 主 编　单　墫　熊　斌
策划组稿　倪　明　宋维锋
本册主编　赵雄辉
责任编辑　郑国雄
封面设计　高　山
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
市场部　电话　021－62865537
传真　021－62860410
社　　址　上海市中山北路3663号
邮编　200062
http://www.ecnupress.com.cn
印 刷 者　江苏句容市排印厂
开　　本　890×1 240　32开
印　　张　11.25
字　　数　310千字
版　　次　2000年11月第一版
印　　次　2002年2月第九次
书　　号　ISBN 7-5617-2378-4/G·1115
定　　价　13.00元
出 版 人　朱杰人



中国数学奥林匹克委员会主席、中国科学院王元院士致青少年数学爱好者

前　言

据说在很多国家，特别是美国，孩子们害怕数学，把数学作为“不受欢迎的学科”.

但在中国，情况很不相同，很多少年儿童喜爱数学，数学成绩也都很好.

的确，数学是中国人擅长的学科.如果在美国的中小学，你见到几个中国学生，那么全班数学的前几名就非他们莫属.

在数(shǔ)数(shù)阶段，中国儿童就显出优势.

中国人能用一只手表示1～10，而很多国家非用两只手不可.

中国人早就有位数的概念，而且采用最方便的十进制(不少国家至今还有12进制，60进制的残余).

中国文字都是单音节，易于背诵.例如乘法表，学生很快就能掌握.再“傻”的人也都知道“不管三七二十一”.但外国人，一学乘法，头就大了.不信，请你用英语背一下乘法表，真是佶屈聱牙，难以成诵.

圆周率$\pi = 3.14159\cdots$.背到小数后五位，中国人花一两分钟就够了.可是俄国人为了背这几个数字，专门写了一首诗，第一句三个单词，第二句一个，……要背π先背诗，我们看来简直自找麻烦，可他们还作为记忆的妙法.

四则运算应用题及其算术解法，也是中国数学的一大特色.从很古的时候开始，中国人就编了很多应用题，或联系实际，或饶有兴趣，解法简洁优雅，机敏而又多种多样，有助于提高学生学习兴趣，启迪学生智慧.例如：

“一百个和尚分一百个馒头，大和尚一个人吃三个，小和尚三个人吃一个，问有几个大和尚，几个小和尚？”

外国人多半只会列方程解.中国人却有多种算术解法,如将每个大和尚"变"成9个小和尚,100个馒头表明小和尚是300个.多出200个和尚,是由于每个大和尚变小和尚,多变出8个人.从而$200 \div 8 = 25$即是大和尚人数.小和尚自然是75人.或将一个大和尚与3个小和尚编成一组,平均每人吃一个馒头.恰好与总体的平均数相等.所以大和尚与小和尚这样编组后不多不少,即大和尚是$100 \div (3+1) = 25$人.

中国人善于计算,尤其善于心算.古代还有人会用手指帮助计算(所谓"掐指一算").同时,中国很早就有计算的器械,如算筹、算盘.后者可以说是计算机的雏形.

在数学的入门阶段——算术的学习中,我国的优势显然,所以数学往往是我国聪明的孩子喜爱的学科.

几何推理,在我国古代并不发达(但关于几何图形的计算,我国有不少论著),比希腊人稍逊一筹.但是,中国人善于向别人学习.目前我国中学生的几何水平,在世界上遥遥领先.曾有一个外国教育代表团来到我国一个初中班,他们认为所教的几何内容太深,学生不可能接受.但听课之后,不得不承认这些内容中国的学生不但能够理解,而且掌握得很好.

我国数学教育成绩显著.在国际数学竞赛中,我国选手获得众多奖牌,就是最有力的证明.当代著名数学家陈省身先生对此特别赞赏.他说:"今年一件值得庆祝的事,是中国在国际数学竞赛中获得第一.……去年也是第一名."(陈省身1990年10月在台湾成功大学的讲演《怎样把中国建为数学大国》)

陈省身先生还预言:"中国将在21世纪成为数学大国."

成为数学大国,当然不是一件容易的事,不可能一蹴而就,它需要坚持不懈的努力.我们编写这套丛书,目的就是:

1. 进一步普及数学知识,使数学为更多的青少年喜爱,帮助他们取得好的成绩.

2. 使喜爱数学的同学得到更好的发展,通过这套丛书,学到更多的知识和方法.

"天下大事,必作于细."我们希望,而且相信,这套丛书的出版,

在使我国成为数学大国的努力中，能起到一点作用.

著名数学家、中国科学院院士、中国数学奥林匹克委员会主席王元先生担任本丛书顾问，并为青少年数学爱好者题词. 我们表示衷心的感谢.

还要感谢华东师范大学出版社及倪明先生，没有他们，这套丛书不可能很快问世.

本丛书从小学三年级至高中三年级共10册. 本册为初二年级，由赵雄辉主编.

单　墫　熊　斌

2000年8月

目　　录

综合篇

代数篇

第一讲 因式分解的方法(一)

知识要点和基本方法

因式分解的基本方法有提公因式法、运用公式法、分组分解法和十字相乘法.

把一个多项式因式分解，如果多项式的各项有公因式，就先提取公因式，公因式可以是数、单项式，也可以是多项式；如果各项没有公因式，再看能否直接运用公式或用十字相乘法分解，如果还不能分解，就试用分组分解法或其他方法. 分解因式时，必须进行到每一个多项式因式都不能再分解为止，结果一定是乘积的形式，每个因式都是整式，相同的因式的积要写成幂的形式.

考虑到与教科书同步，本书中的因式分解(第一讲至第四讲)在有理数范围内进行. 凡在实数范围内可再分解的因式，在说明中作了补充. 练习题和测试题只要求在有理数范围内求解.

例题精讲

例 1 把 $(x-y)^{2n+1}-(x-z)(x-y)^{2n}+2(y-x)^{2n}(y-z)$ 分解因式，其中 n 是正整数.

解 $(x-y)^{2n+1}-(x-z)(x-y)^{2n}+2(y-x)^{2n}(y-z)$

$=(x-y)^{2n}[(x-y)-(x-z)+2(y-z)]$

$=(x-y)^{2n}(y-z)$.

说明 n 是正整数时，$2n$ 是偶数，$(x-y)^{2n}=(y-x)^{2n}$；$2n+1$ 是奇数，$(x-y)^{2n+1}=-(y-x)^{2n+1}$.

例2 把下列各式分解因式:

(1) $(a^2+9b^2-1)^2-36a^2b^2$;

(2) $(ax-by)^3+(by-cz)^3-(ax-cz)^3$.

分析 观察两个多项式的特点,第(1)题容易使人想到用平方差公式分解,第(2)题不妨用立方和 $[a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)]$ 或立方差 $[a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)]$ 公式试一试.

解 (1) $(a^2+9b^2-1)^2-36a^2b^2$

$=(a^2+9b^2-1)^2-(6ab)^2$

$=(a^2+9b^2-1+6ab)(a^2+9b^2-1-6ab)$

$=[(a+3b)^2-1][(a-3b)^2-1]$

$=(a+3b+1)(a+3b-1)(a-3b+1)(a-3b-1)$.

(2) $(ax-by)^3+(by-cz)^3-(ax-cz)^3$

$=[(ax-by)+(by-cz)][(ax-by)^2-(ax-by)(by-cz)+(by-cz)^2]-(ax-cz)^3$

$=(ax-cz)[(ax-by)^2-(ax-by)(by-cz)+(by-cz)^2-(ax-cz)^2]$

$=(ax-cz)[(ax-by)^2-(ax-by)(by-cz)+(by+ax-2cz)(by-ax)]$

$=(ax-cz)(ax-by)(3cz-3by)$

$=3(ax-cz)(ax-by)(cz-by)$.

说明 第(2)题如果先由 $(m+n)^3=m^3+n^3+3mn(m+n)$ 推得 $m^3+n^3=(m+n)^3-3mn(m+n)$,把 $ax-by$ 视为 m,$by-cz$ 视为 n,则 $m+n=ax-cz$,从而能较简捷地将原式分解因式.另外,由立方和公式可推得 $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$,变形得 $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b)(b+c)(c+a)$,由这个公式也可将第(2)题分解因式.

例3 把下列各式分解因式:

(1) $x^3+2x^2y+y^3+2xy^2$;

(2) $(x+y-2xy)(x+y-2)+(1-xy)^2$.

分析 (1)、(2)两题的多项式均无公因式可提取,也不能直接用

公式法分解．第(1)题从四项的特点看出应分组分解，第(2)题宜把 $x+y$、xy 各看成一个整体，去括号后再分组分解．

解 (1)

$$\begin{aligned} & x^3+2x^2y+y^3+2xy^2 \\ =\ & (x^3+y^3)+(2x^2y+2xy^2) \\ =\ & (x+y)(x^2-xy+y^2)+2xy(x+y) \\ =\ & (x+y)(x^2+xy+y^2). \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} & (x+y-2xy)(x+y-2)+(1-xy)^2 \\ =\ & (x+y)^2-2xy(x+y)-2(x+y)+4xy+1-2xy \\ & +x^2y^2 \\ =\ & [(x+y)^2-2(x+y)+1]-2xy(x+y-1) \\ & +x^2y^2 \\ =\ & (x+y-1)^2-2\cdot(x+y-1)\cdot xy+(xy)^2 \\ =\ & (x+y-1-xy)^2 \\ =\ & (x-1)^2(y-1)^2. \end{aligned}$$

说明 将多项式分组的目的在于经过适当的分组后，原多项式能转化为可提公因式，或可运用公式，或可用十字相乘等方法将其分解．

例 4 分解因式：

(1) $63x^2+22x-8$；

(2) $x^2+\left(a+\dfrac{1}{a}\right)xy+y^2$ (其中 a 是非零常数)．

分析 第(1)题是二次三项式，且不能用完全平方公式分解，应试一试十字相乘法．第(2)题中 xy 的系数是 $a+\dfrac{1}{a}$，而 $a\cdot\dfrac{1}{a}=1$，所以可将 y^2 化为 $(ay)\cdot\left(\dfrac{1}{a}y\right)$，再用十字相乘法分解．

解 (1)

$$\begin{aligned} & 63x^2+22x-8 \\ =\ & (7x+4)(9x-2). \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cc} 7 & 4 \\ 9 & -2 \end{array}$$

(2)

$$\begin{aligned} & x^2+\left(a+\frac{1}{a}\right)xy+y^2 \\ =\ & (x+ay)\left(x+\frac{1}{a}y\right) \\ =\ & \frac{1}{a}(x+ay)(ax+y). \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cc} 1 & ay \\ 1 & \frac{1}{a}y \end{array}$$

例 5 分解因式：

(1) $x^2+x+6y^2+3y+5xy$；

(2) $3x^2-7xy-6y^2+7x+12y-6$.

分析 本题两个多项式是二元二次多项式，可看作关于某个字母的二次三项式（另一个字母看作常数），运用十字相乘法分解；也可把二次项作为一组先分解，再用十字相乘法分解.

解 (1)

$$\begin{aligned} & x^2+x+6y^2+3y+5xy \\ =\ & x^2+(5y+1)x+(6y^2+3y) \\ =\ & x^2+(5y+1)x+3y(2y+1) \\ =\ & (x+3y)(x+2y+1). \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} x & & 3y \\ & \times & \\ x & & 2y+1 \end{array}$$

(2)

$$\begin{aligned} & 3x^2-7xy-6y^2+7x+12y-6 \\ =\ & (3x+2y)(x-3y)+(7x+12y)-6 \\ =\ & (3x+2y-2)(x-3y+3). \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} 3x & & 2y \\ & \times & \\ x & & -3y \\ \hline \multicolumn{3}{c}{-9xy+2xy=-7xy} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 3x+2y & & -2 \\ & \times & \\ x-3y & & 3 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{9x+6y-2x+6y=7x+12y} \end{array}$$

例 6 已知二次三项式 x^2-mx-8（m 是整数）在整数范围内可以分解为两个一次因式的积，求 m 的可能取值.

解 根据条件，如果将 -8 分解为两个整数的积，那么这两个整数的和即为 $-m$.

因为 -8 分解为两个整数积的可能情形有

$(-1)\times 8$，$(-2)\times 4$，$(-4)\times 2$，$(-8)\times 1$.

所以 $-m$ 的可能值为

$(-1)+8$，$(-2)+4$，$(-4)+2$，$(-8)+1$.

故 m 的可能取值有 -7，-2，2，7 四个.

说明 如果题目的条件不是限定在整数范围内可以分解，那么 m 的取值不能用本题的解法. 如果题目改为 x^2-8x-m 在整数范围内可以分解因式，那么只要将 -8 拆成两个整数的和（如 $-50+42$，$-9+1$），这两个整数的积就等于 $-m$，因此，符合条件的 m 有无数个.

例 7 在黑板上写有一个缺系数和常数项的多项式：

$$x^3+\boxed{}\,x^2+\boxed{}\,x+\boxed{}$$

现有两个人做填数字游戏:第一个人在任一个空位内填上一个非零整数(可正可负),接着,第二个人在剩下的二个空位置中任选一个填上一个整数,最后,第一个人在余下的空位上填一个整数.

求证:不管第二个人怎样填数,第一个人总能使所得到的多项式可分解为三个一次因式的积,并且每个因式的 x 系数为 1,常数项为整数.

证明 因为第一个人有选择任一个空位的主动权,所以他可以在 x 前的框内填上-1,这样,原多项式变为

$$x^3+\boxed{}\,x^2-x+\boxed{}$$

第二个人不管在哪一个框内填数 a,第一个人只需在最后一个空框内填上第二个人所填数的相反数$-a$;这样,原多项式就变成了

$$x^3+ax^2-x-a,\text{或}\quad x^3-ax^2-x+a.$$

而 $\quad x^3+ax^2-x-a$

$=x(x^2-1)+a(x^2-1)$

$=(x+a)(x+1)(x-1).$

x^3-ax^2-x+a

$=x(x^2-1)-a(x^2-1)$

$=(x-a)(x+1)(x-1).$

这就表明了第一个人总能使所填数符合要求.

练 习 题

A 组

一、选择题

1. 如果多项式 $x^2+kx+\dfrac{1}{9}$ 是一个完全平方式,那么 k 的值

是(　　).

(A) -3　　(B) 3

(C) $\frac{1}{3}$或$-\frac{1}{3}$　　(D) $\frac{2}{3}$或$-\frac{2}{3}$

2. 多项式 $2a(a^2+a+1)+a^4+a^2+1$ 分解因式的结果为(　　).

(A) $(a^2+a-1)^2$　　(B) $(a^2-a+1)^2$

(C) $(a^2+a+1)^2$　　(D) $(a^2-a-1)^2$

3. 已知 x^2+ax-6 可分解为两个一次因式的积，且 $a<0$，则 a 的值为(　　).

(A) -2 和 -3　　(B) -7 和 -4

(C) -1 或 -5　　(D) 任意负有理数

二、把下列各式分解因式

4. $(a+m)^6(n-b)^4-(b-n)^5(a+m)^5$.

5. $x^3(x-2y)+y^3(2x-y)$.

6. $(x+y)(x-y)+4(y-1)$.

7. $x^2y-y^2z+z^2x-x^2z+y^2x+z^2y-2xyz$.

8. $x^2-(m^2+n^2)x+mn(m^2-n^2)$.

三、解答题

9. 求出在 1 到 100 之间的整数 n，使 x^2+x-n 能分解为两个整系数一次因式的乘积.

B　组

四、把下列各式分解因式

10. $(c-a)^2-4(b-c)(a-b)$.

11. $(1+x+x^2+x^3)^2-x^3$.

12. $(c^2+d^2-b^2-a^2)-4(ab-cd)^2$.

13. $x^2-6y^2-12z^2+xy-xz+17yz$.

14. $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2a^2c^2$

五、解答题

15. 已知乘法公式：

$$a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4),$$

$$a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4).$$

利用上述公式，把 $x^8+x^6+x^4+x^2+1$ 分解因式.

测　试　题

一、选择题

1. 如果 $100x^2-kxy+49y^2$ 是一个完全平方式，那么 k 等于(　　).

(A) 4 900　　(B) 700　　(C) ±140　　(D) ±70

2. 多项式 x^3-8，x^3-7x^2+10x，x^4-16 的公因式是(　　).

(A) $x-8$　　(B) $x-4$　　(C) $x-2$　　(D) $x+2$

3. 在多项式 x^3+x^2-x-1，$x^3-6x^2+11x-6$，x^3-2x^2+3x-2，$x^6-x^4+2x^3-2x^2$ 中，有因式 $x-1$ 的多项式的个数是(　　).

(A) 4 个　　(B) 3 个　　(C) 2 个　　(D) 1 个

4. 已知二次三项式 $21x^2+ax-10$ 可分解为两个整系数的一次因式的积，那么 a 一定是(　　).

(A) 奇数　　(B) 偶数　　(C) 正数　　(D) 负数

二、把下列各式分解因式

5. $x^3+2x^2-16x-32$.

6. $(a-b)a^6+(b-a)b^6$.

7. $x(x+1)(x-1)+xy(x-y)-y(y+1)(y-1)$.

8. $(x+y)(x+y+2xy)+(xy+1)(xy-1)$.

9. $2a^2-5ab-3b^2+a+11b-6$.

三、解答题

10. 已知 $21x^2+ax+21$ 在正整数范围内可以分解为两个一次因式的积，求出满足条件的整数 a.