全国高等农业院校教材

高　等　数　学

（第 二 版）

北京农业大学　主编

农 业 出 版 社

单三甲

全国高等农业院校教材
高等数学（第二版）
北京农业大学 主编
* * *
责任编辑 张红宇

农业出版社出版（北京朝内大街130号）
新华书店北京发行所发行 农业出版社印刷厂印刷

787×1092毫米 16开本 22.5印张 482千字
1978年7月第1版 1987年7月第2版北京第1次印刷
印数 1—18,000册
统一书号 13144·304 定价 3.75元

第一版序言

本书是根据原农林部1977年关于编写高等农林院校试用教材的指示精神，为高等农业院校编写的《高等数学》教材。

根据农业院校各专业对《高等数学》课程内容的要求，以及我国实现社会主义农业现代化和农业科学技术的不断发展，在内容方面着重介绍了高等数学中微积分的基本内容，同时也考虑了生物统计、遗传育种等有关课程的需要，介绍了概率论与数理统计初步。编写中注意了作为基础课《高等数学》本身的系统性和理论联系实际的原则。为了便于学生自学，在叙述上力求由浅入深、通俗易懂，在讲解基本理论概念的基础上又选配了一定数量的例题，在每章末附了必要的习题，书后附有习题答案，并附有初等数学基本公式、基本积分表及其它统计用表，供教学时参考使用。

在讲授本教材时，各院校可根据各专业的具体情况和学时要求对教材内容作部分的变动或取舍，当然习题也应作些选择，不一定全做。

本书初稿曾蒙杨庆熙、尹仲直、陈振权、张孝玲、陈维博、罗筱鎔、胡关长等同志审阅并提出许多宝贵意见，在此一并表示感谢。

本书除可作为高等农业院校教材外，亦可作为有关院校生物系的教学参考书以及农业科技人员的参考书。

由于水平所限，又加时间仓促，编写中难免有不妥甚至错误之处，欢迎使用本书的同志批评指正。

编　者

1978年2月

第二版序言

本书第二版系遵照农牧渔业部关于修订高等农业院校通用教材的指示精神，根据1982年审定的“高等农业院校数学课程教学大纲”，在第一版基础上，做为高等农业院校“高等数学”课程教材而修订编写的。这次修订，对原教材做了较大的修改和补充，与第一版相比，这一版无论在基础理论方面还是科学性系统性方面都有所加强。修订中注意吸收了几年来各高等农业院校对第一版教材的使用经验。在内容方面变动较大的是新增加了空间解析几何和二重积分两章，第二章中大部分内容也进行了改写，其它有些章节根据1982年审订的“大纲”要求也增加了部分内容。凡第一版比较适用的部分都保持原样未动。第一版中“概率论与数理统计初步”一章，根据1982年审订的“大纲”要求，已重新编写，并将单独出版，因此在第二版中，这部分内容没再列入。书中凡附有“*”号的部分，对于高等数学课程学时少的院校或专业可以不讲，其它有些内容，在讲授时也可酌情进一步精简。

本书第二版仍由北京农业大学裴鑫德主编，参加编写和修订的还有张嘉林、戴崇表、胡秉民、袁志发和许煜沂同志。

本书第一版出版后，曾蒙读者提出不少宝贵意见，在此一并表示衷心的感谢。由于水平所限，第二版内容仍难免有不妥甚至错误之处，欢迎读者批评指正。

编　者

1984年8月

目　录

第一章 函 数

数学是研究现实世界中的空间形式和数量关系的科学。初等数学主要是研究常量和相对静止状态的数学，而高等数学，其中主要部分是微积分，研究的是变量和运动的数学。正如恩格斯在《自然辩证法》中指出："数学中的转折点是笛卡儿的变数。有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了，而它们也就立刻产生。"①

本章是在初等数学的基础上进一步讨论函数概念。函数概念是高等数学中最基本的概念之一，是微积分研究的主要对象，是客观世界中变量之间依从关系的反映，是许多科学技术中表达自然规律的基本概念。因此，掌握好函数概念具有重要意义。

§1.1 函数概念

一、常量与变量

当我们研究或观察某种自然现象或技术过程时，常常在这种自然现象或技术过程中遇到各种不同的量，其中有些量在整个现象或过程中，始终保持同一数值不起变化，这种量叫做**常量**。而另外有些量却有变化，也就是可取各种不同的数值，这种量叫做**变量**。

例如，某物体自某一高度自由落下时，物体的质量保持常值不变，是常量；但物体与地面的距离、物体下落的速度都在变化，是变量。

需要注意，我们说一个量是常量或是变量，都是指在某一确定的现象或过程中来说的，同一个量在某种情况下，可以看成是常量，而在另外一种情况下，又可能是变量。

例如，对圆的面积 S 这一个量来说，如果圆的半径给定，则 S 就是定值，是常量；如果圆的半径可以取各种不同的值，即取变量时，则 S 又是变量了。

又如，重力加速度 g，在地球表面上某一定地点时可以看成是常量。但是我们知道，重力加速度 g 在地球的赤道和两极这样两个不同的地方又是不同的，这时它又应该看成是变量了。

在高等数学中，为了研究问题方便起见，有时把常量看成是取同一个值的变量。

常量一般用字母 a、b、c 等来表示，而变量用字母 x、y、z 等来表示。

因为量 x 的每一个值都是一个数，因而可以用数轴上的一个点来表示，如果量 x 是常量，则用数轴上一个定点来表示；如果量 x 是变量，则用数轴上的动点来表示。

① 恩格斯：《自然辩证法》，人民出版社1971年版，第236页。

二、区间与邻域

变量的变化范围，常常是介于两个实数之间的全体实数值。我们把介于两个实数之间的全体实数叫做区间，而那两个实数叫做区间的端点。

设 a、b 为两个已知实数，且 $a<b$，则满足不等式

$$a<x<b$$

的实数 x 的全体叫做开区间，用记号 (a,b) 表示。

满足不等式

$$a\leqslant x\leqslant b$$

的实数 x 的全体叫做闭区间，用记号 $[a,b]$ 表示。

满足不等式

$$a\leqslant x<b$$

或

$$a<x\leqslant b$$

的实数 x 的全体叫做半开区间，且分别用记号 $[a,b)$ 及 $(a,b]$ 表示。

如区间 $[a,b)$ 在数轴上的几何表示即为图1.1所示。

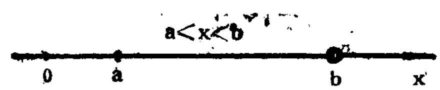

图 1.1

以上谈到的区间，都是在有限范围内，总称为有限区间，除有限区间外还有无限区间。

例如，全体实数 x 组成的区间，记作 $(-\infty,\ +\infty)$，或记作 $-\infty<x<+\infty$；所有大于 a 的全体实数 x 组成的区间记作 $(a,\ +\infty)$，或记作 $a<x<+\infty$；所有小于 a 的全体实数 x 组成的区间记作 $(-\infty,a)$，或记作 $-\infty<x<a$。

类似可以规定记号 $[a,\ +\infty)$ 及 $(-\infty,a]$ 的意义。

对于上述 $+\infty$ 和 $-\infty$ 分别读作"正无穷大"和"负无穷大"。并需注意，它们仅作为记号表示，而并不是数。

有了区间概念，我们可进一步介绍变量 x 的邻域概念。

设 x_0 与 $\delta(\delta>0)$ 是两个实数，则把满足不等式

$$|x-x_0|<\delta$$

的实数 x 的全体叫做点 x_0 的 δ 邻域。点 x_0 叫做这邻域的中心，δ 叫做这邻域的半径。由于上述绝对值不等式等价于

$$x_0-\delta<x<x_0+\delta,$$

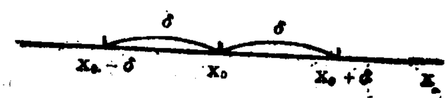

图 1.2

因此，满足不等式 $|x-x_0|<\delta$ 的实数 x 的全体就是开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$。由图 1.2 可知，点 x_0 的邻域可以用以 x_0 为中心，长度为 2δ 的开区间 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ 表示。

三、函数概念

自然界任何事物都处在不断的运动、变化中，而且每一事物的运动、变化都不是孤立的，总是同它的周围其他事物互相联系、互相影响。下面通过几个实际例子来加以说明。

例 1 某气象站用温度自动记录仪记下某日从 0 点到 24 点的温度变化曲线（图1.3），它形象地表示了温度 T 随时间 t 的变化规律。

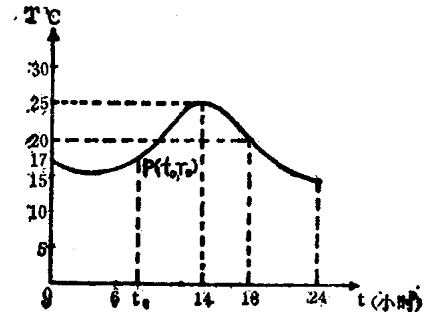

图 1.3

根据温度变化曲线所表示的规律，对于这天 0 点到 24 点中的每一个确定的时刻 t，就有一个确定的温度 T 和它对应。

如当 $t=0$ 时，$T=17℃$；$t=14$ 时，$T=25℃$；$t=18$ 时，$T=20℃$。即当 t 取某值 t_0 时，在横轴上取点 t_0，过此点作平行于 T 轴的直线交曲线于点 P，量出 P 点的纵坐标 T_0，就得到对应于 t_0 时刻的气温 T_0。

例 2 常见的保险丝（铅锡合金，铅 75%，锡 25%），它的熔断电流 I 和直径 D 之间的关系，可以列成表1.1：

表 1.1

直径 D(毫米)	0.508	0.559	0.61	0.71	0.813	0.915	1.22	1.63	1.83	2.03	2.34	2.65	2.95	3.26
熔断电流 I (安)	3.0	3.5	4.0	5.0	6.0	7.0	10.0	16.0	19.0	22.0	27.0	32.0	37.0	44.0

表 1.1 反映了熔断电流 I 随保险丝直径 D 变化的对应关系。对于一个确定的直径就有一个确定的熔断电流的值与之对应。例如当 $D=1.63$ 毫米时，$I=16.0$ 安。

例 3 圆的半径 r 和圆面积 S 有如下关系：

$$S=\pi r^2.$$

r 可以取大于 0 的所有实数。当 r 取定某一数值时，面积 S 也就有确定的值与它对应，而上面的公式就表示了 S 和 r 之间的对应关系。

例 4 物体在空中自由落下时，如果忽略空气阻力不计，则落体所经过的路程 S 和时间 t 有如下关系：

$$S=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中重力加速度 $g=9.8$ 米/秒^2。

由上式可以算出各个时刻落体下落的路程，如表1.2。

在直角坐标系中，画出 S 和 t 的对应关系的图形是一条如图 1.4 所示的曲线。上面的

公式、表 1.2 及图 1.4，都表示了自由落体的运动规律。

表 1.2

时间 t（秒）	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	……
路程 S（米）	0	1.225	4.9	11.025	19.6	30.625	44.1	……

以上四例，虽然反映不同的自然现象，但是从数量规律上看，它们却有共同之点，即每一个例子所反映的过程中，变量与变量之间是相互联系并遵循一定的规律变化着。这种变化规律就由变量在变化过程中的数值对应关系反映出来，我们把这种变量之间确定的对应关系叫做函数关系。

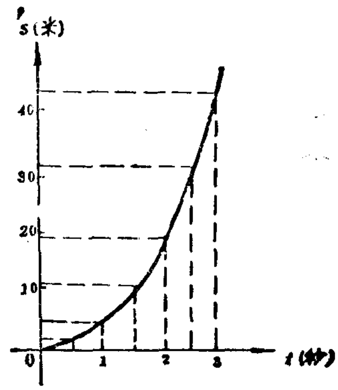

图 1.4

1. 函数的定义

定义 在某个变化过程中有两个变量 x 和 y，如果对于 x 在变化范围内的每一个值，按照一定的规律，y 总有一个确定的值和它对应，这时就说 y 是 x 的函数，并且记作

$$y=f(x),$$

其中 x 叫做自变量，y 叫做因变量。

记号 $y=f(x)$ 中，f 只表示 y 与 x 的对应关系，不能看作 f 乘 x。

常用的函数记号有：$y=f(x)$，$y=F(x)$，$y=\varphi(x)$，$y=\psi(x)$，$y=y(x)$ 等等。如例 4 中，S 是 t 的函数，记为 $S=f(t)=\frac{1}{2}gt^2$ 或 $S=S(t)=\frac{1}{2}gt^2$ 均可。

为了避免混淆，在同一问题中，不同的函数要用不同的记号来表示。例如，圆的面积 S 和圆的周长 C 是半径 r 的两个不同的函数，这两个函数可分别用 $S=f(r)=\pi r^2$，$C=\varphi(r)=2\pi r$ 来表示。有时也用 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 等等记号来加以区别。

2. 函数值

函数 $y=f(x)$ 当 $x=a$ 时的对应值，叫做当 $x=a$ 时的函数值。用记号 $f(a)$ 或 $y|_{x=a}$ 来表示。

如上面例 4 中，$S(t)=\frac{1}{2}gt^2$。当 $t=1.5$ 时，对应的函数值就是

$$S(1.5)=4.9\cdot1.5^2=11.025,$$

有时也记为

$$S|_{t=1.5}=11.025.$$

又如函数 $f(x)=3x^2-2x+1$，则有

$$f(0)=3\cdot 0^2-2\cdot 0+1=1;$$
$$f(x_0)=3x_0^2-2x_0+1;$$
$$f(a+b)=3(a+b)^2-2(a+b)+1=3a^2+3b^2+6ab-2a-2b+1;$$
$$\begin{aligned}f(x_0+h)&=3(x_0+h)^2-2(x_0+h)+1\\&=3x_0^2+6x_0h+3h^2-2x_0-2h+1\\&=3x_0^2+2x_0(3h-1)+(3h^2-2h+1)\end{aligned}$$

可见，求 $x=a$ 时的函数值，只要把函数关系中的自变量 x 用 a 代替就行了。

正如前面已经指出的，为了研究问题方便起见，可把常量看成是取同一个值的变量。因此，我们也可以把常量作为函数看待，它对于自变量的一切值来说，函数值都是相等的。

3. 单值函数与多值函数

上面所讨论的函数，自变量在定义域内任取一个确定值时，函数都有唯一确定的值与之对应，这种函数叫做**单值函数**。而对于自变量在定义域内任取一个确定值时，函数有两个或两个以上的值与之对应时，则说 y 是 x 的**多值函数**。

例如，在直角坐标系中，半径为 r、圆心在原点的圆的方程是

$$x^2+y^2=r^2,$$

它可以表示为 $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$ 的多值（双值）函数。

为讨论方便，我们总设法避免函数的多值性。在一定条件下，多值函数常可分解为若干个单值支，而每一个都是单值函数。本例，就可以分解为 $y=+\sqrt{r^2-x^2}$ 与 $y=-\sqrt{r^2-x^2}$ 两个单值函数。分解的两个单值支，在图形上就相当于把整个圆周分为上下两个半圆周。所以对于多值函数往往设法分解为单值支加以考虑。以后，如无特别说明时，函数都是指单值函数。

4. 函数的定义域

使函数有意义的自变量的取值范围叫做函数的**定义域**。

函数的定义域指明函数关系的适用范围，也就是说，只有当自变量在定义域中取值时，因变量才有确定的对应值，这时，我们就说函数是有定义的。更确切地说，如果自变量取某一数值 x_0 时，函数有唯一确定的值与它对应，这时就说函数在 x_0 处**有定义**。所以，函数的定义域也就是使函数有定义的自变量的全体。

有了区间概念以后，我们还可以说，如果函数 $y=f(x)$，在某区间上每一个 x 值都有定义时，我们就说函数 $y=f(x)$ 在该区间上是有定义的。

如例 4 中，自变量时间 t 不取负值，函数 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 的定义域就是 $t\geqslant 0$ 或 $[0,+\infty)$。

一般说来，函数的定义域要根据所考虑问题的实际意义来确定，但数学中常常只给出函数的表达式而没说明实际背景，这时函数的定义域就是使表达式有意义的自变量的变化范围。

函数 $y=\frac{5}{x-3}$ 的定义域是使分母不等于 0 的全体 x 值，这里 $x-3\neq0$ 亦即 $x\neq3$，所以它的定义域是区间 $(-\infty,3)$ 和 $(3,+\infty)$。

函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域是使根号内的数大于或等于 0 的全体 x 值，即 $1-x^2\geqslant0$ 或 $x^2\leqslant1$，这就是 $-1\leqslant x\leqslant1$ 或闭区间 $[-1,1]$。

函数 $y=\lg(2x-3)$ 的定义域是 $2x-3>0$，即 $x>\frac{3}{2}$ 或 $\left(\frac{3}{2},\ +\infty\right)$。

5.函数的表示法

函数可以用公式、表格或图形表示出来。如例 1 是用图形表示，例 2 是用列表表示，例 3 是用公式表示，例 4 是三者结合在一起加以表示。

公式表示的函数优点是形式简单，便于应用数学分析的方法进行理论研究。缺点是自变量与函数间的对应关系不够明显，有时要做复杂的运算才能求得函数值。

表格表示的函数优点是由表中的自变量值，可以不经过运算直接查出对应的函数值，如三角函数表、对数表等，特别是列表法可以用来表示还不知道公式的函数，这在许多自然科学中是常用的。缺点是不完备，一般不能在表中把全部数值对应关系表达出来，总有一些自变量值没有列在表里。

图形表示的函数优点是它把自变量与函数间的关系通过图形明显地表示出来，缺点是从图形上得到的自变量与函数的对应值不够准确，并且不能直接运用数学分析方法进行计算。

函数的上述三种表示法各有优缺点，在解决实际问题时应根据问题的特点选用适当的表示法或者结合使用。

高等数学所讨论的函数，主要是用公式表示的函数。需要注意，用公式表示函数时，不一定只用一个式子给出，自变量在不同范围内变化时，有时会遇到几个式子表示函数的情况。例如：

$$y=f(x)=\begin{cases}2 & (\text{当 } x<0),\\ 0 & (\text{当 } x=0),\\ x-2 & (\text{当 } x>0).\end{cases}$$

显然满足函数定义，且定义域为整个数轴。即区间 $(-\infty,+\infty)$。它的图形如图 1.5 所示。

又如，

$$y=f(x)=|x|=\begin{cases}x & (\text{当 } x\geqslant0)\\ -x & (\text{当 } x<0),\end{cases}$$

这是实数 x 的绝对值的表达式，实数 x 的绝对值是这样一个数：即当 $x\geqslant0$ 时为 x；当 $x<0$ 时为 $-x$。上式也是确定在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的一个函数，它的图形如图 1.6 所示。

象这样，函数在不同范围内用不同的式子分段表示出来，这种分段表示函数的方法叫做函数的**分段表示法**。

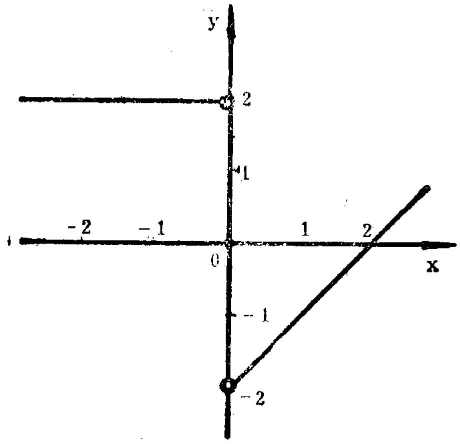

图1.5

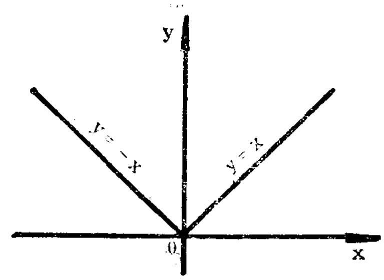

图1.6

对于用分段表示法表示的函数求函数值时，必须注意不同的自变量值应代入相应范围的公式中去。

例如在图1.5所示的函数中，当 $x=2$ 时，$y=2-2=0$；当 $x=-2$ 时，$y=2$。

上面我们讨论了函数的基本概念，下面再利用已学过的知识举例来说明如何建立函数关系式。

例1 有一块边长为 l 厘米的正方形铁皮，它的四角剪去四块相等的小正方形（见图1.7中的阴影部分），制成一只没有盖的容器，求这容器的容积 V 与高 x 的函数关系。

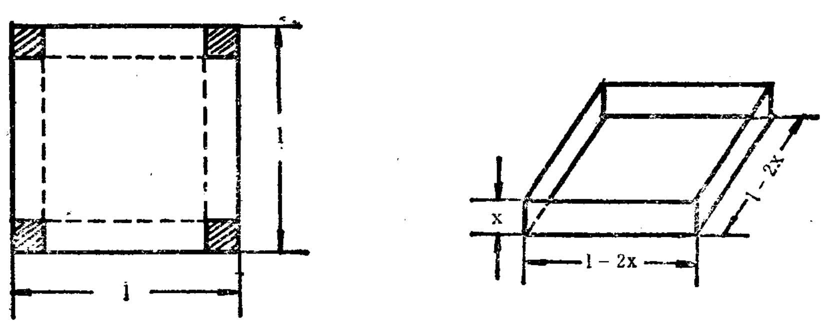

图1.7

解 容器的容积等于它的底面积乘高。如图1.7所示，容器的高 x 就是铁皮被剪下的每个小正方形的边长，而铁皮被剪去四角后，边长只剩下 $l-2x$ 厘米了，它就是容器的底边的边长。因此，容器的底面积是 $(l-2x)^2$，高是 x，容器的容积便是

$$V=x(l-2x)^2,$$

这里容器的高和底边长都应取正值，所以 $0<x<\frac{l}{2}$ 或记作 $\left(0,\frac{l}{2}\right)$，这就是函数 V 的定义域。

例2　欲做一个能容 300 立方米的无盖圆柱形贮水池，池底材料造价为周围材料造价的两倍，并知周围材料造价为 k/米^2，试求总造价 S 与贮水池底半径 r 的函数关系式（图1.8）。

解　因为已知容积 $V=300$立方米，设贮水池的底半径为 r，高为 h，则有

$$V=\pi r^2h=300. \qquad (1)$$

由（1）有

$$h=\frac{300}{\pi r^2}. \qquad (2)$$

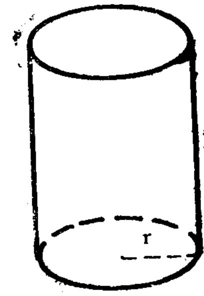

图 1.8

已知贮水池底部造价为周围造价的两倍，而周围的造价为 k/米^2，则底部造价为 $2k$/米^2。根据圆面积及圆柱侧面积公式，则有总造价

$$S=2\pi r^2k+2\pi rhk, \qquad (3)$$

将（2）代入（3），有

$$S=2\pi r^2k+2\pi r\cdot\frac{300}{\pi r^2}k$$

$$=\left(2\pi r^2+\frac{600}{r}\right)k.$$

这就是总造价 S 与贮水池底半径 r 的函数关系式。

四、函数的几种特性

下面我们来进一步讨论函数的几种特性。

1. 函数的有界性和无界性　如果有正的常数 M 存在，使函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内恒有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，这时就说 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内**有界**。如果这样的 M 不存在，就说函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内**无界**。如果有常数 M 使函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内恒有

$$f(x)\leqslant M,$$

这时就说 $f(x)$ 在 (a,b) 内**有上界**，M 是它的一个**上界**；如果有常数 m 使函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内恒有

$$f(x)\geqslant m$$

这时就说 $f(x)$ 在 (a,b) 内**有下界**，m 是它的一个**下界**。由上、下界概念可知，如果函数 $f(x)$ 在某区间内有界，则 $f(x)$ 在此区间内必为既有上界同时又有下界。

如果函数在 (a,b) 内有界，则在此区间内函数的图形必介于两条水平的平行线 $y=\pm M$ 之间。

例如，函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，因为无论 x 取任何实数，$|\sin x|\leqslant 1$ 都能成立。这里 $M=1$，当然也可取大于 1 的任何数作为 M，其形如图 1.9 所示。

又如，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间$(0,1)$内无界，但在闭区间$[1,2]$上是有界的。

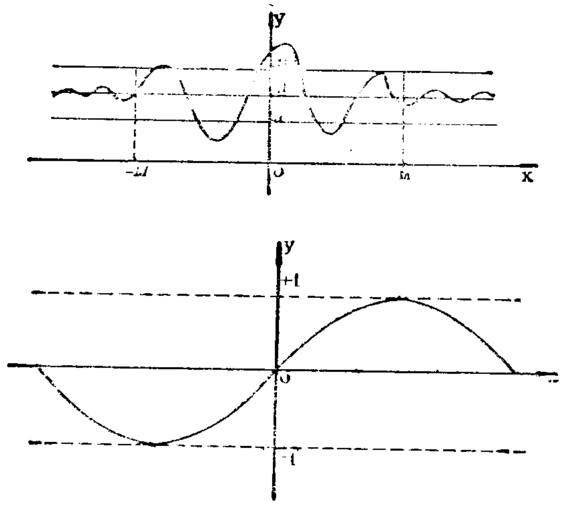

图 1.9

2.函数的单调性　如果在区间(a,b)内，对于任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有

$$f(x_1)<f(x_2)$$

成立，就说函数$f(x)$在(a,b)内是单调增大的或者说是单调增函数；如果有

$$f(x_1)>f(x_2)$$

成立，就说函数$f(x)$在(a,b)内是单调减小的或者叫做单调减函数。单调增函数和单调减函数统称为单调函数。

单调增函数的图形由于当 x 增加时，函数$f(x)$也随之增大，所以它是自左至右上升的曲线（图 1.10）；单调减函数的图形由于当 x 增加时，函数$f(x)$反而减少，所以它是自左至右下降的曲线(图 1.11)。

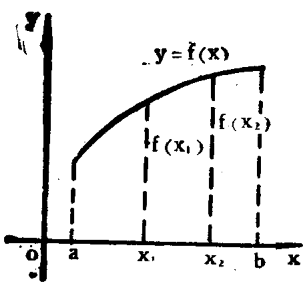

图 1.10

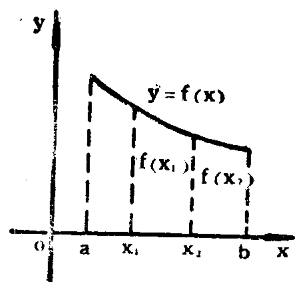

图 1.11

例如，函数$f(x)=x^2$在区间$[0,+\infty)$上是单调增函数，图形（图 1.12）在 y 轴右方为上升的。在区间$(-\infty,0]$上是单调减函数，图形在 y 轴左方是下降的。而在区间$(-\infty,+\infty)$上不是单调函数。

又如，函数 $y=x^3$ 在区间$(-\infty,+\infty)$上是单调增函数（图 1.13）。

3.函数的奇偶性　如果函数$f(x)$在 x 改变符号时，函数值不变，即

$$f(-x)=f(x),$$

则函数$f(x)$叫做偶函数。如果满足

$$f(-x)=-f(x),$$

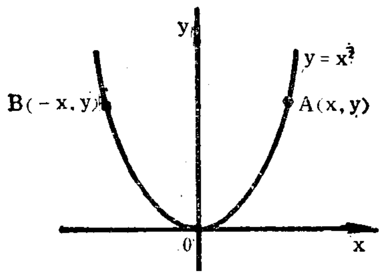

图 1.12

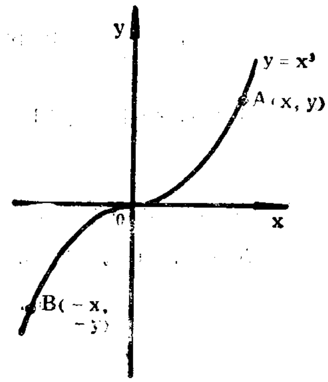

图 1.13

则函数 $f(x)$ 叫做奇函数。

偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称。

例如函数 $y=x^2$，因为 $(-x)^2=x^2$，所以它是偶函数，其图形关于 y 轴是对称的，并且如果 $A(x,y)$ 是图形上的点，则和它对称于 y 轴的点 $B(-x,y)$ 也在图形上，如图 1.12 所示。

又如函数 $y=x^3$，因为 $(-x)^3=-x^3$，所以它是奇函数，其图形关于坐标原点 O 是对称的，并且如果 $A(x,y)$ 是图形上的点，则和它对称于原点的点 $B(-x,-y)$ 也在图形上，如图 1.13 所示。

需要注意，函数也有既非偶函数又非奇函数的，例如 $y=x+1$，$y=x^2+x^3$ 等函数就是这样。

4. 函数的周期性　对于函数 $y=f(x)$，如果存在一个不为 0 的常数 l，对一切 x 恒满足

$$f(x+l)=f(x)$$

则函数 $f(x)$ 叫做周期函数，l 是 $f(x)$ 的周期。一般我们说周期函数的周期是指最小正周期。

例如，函数 $\sin x$，$\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数，$\operatorname{tg} x$ 是以 π 为周期的周期函数。

对于周期函数，只要知道它在任一区间 $[a, a+l]$ 上的图形，则将所作图形按周期重复下去，就得该函数的全部图形。

五、反函数

如果两个变量间有确定的函数关系，则这两个变量哪一个取做自变量，哪一个取做函数并不是固定不变的，常要根据研究的目的和怎样方便来确定。

例如，在函数关系 $v=\dfrac{c}{p}$（c 为常数）中，压力 p 为自变量，而体积 v 是 p 的函数，但如果把这式子改写成 $p=\dfrac{c}{v}$，这时压力又可以看成是体积 v 的函数了。我们把 $p=\dfrac{c}{v}$