[罗] I. TOMESCU 著

组合学引论

清华大学应用数学系离散数学教研组 译

高等教育出版社

组 合 学 引 论

[罗] I. Tomescu 著
栾汝书 李 欧 马振华 李文汉
胡冠章 林翠琴 俞正光 译

高等教育出版社

出版前言

本书是组合论方面一本内容较丰富的入门书，涉及的论题较广，并介绍了不少组合算法与计算机使用方面的实例。章后附有习题，可供读者练习和进一步提高。

原书(«INTRODUCERE ÎN COMBINATORICĂ»)是1972年用罗马尼亚文出版的，后经作者本人改写并译成英文(«INTRODUCTION TO COMBINATORICS»，英译者 I. TOMESCU, S. RUDEANU)，于1975年由英国Collet's出版公司出版。本书根据英文版译出。

本书可作为我国理工科院校组合数学课程的教学参考书，也可作为其他有关专业人员的参考书。

组合学引论

[罗] I Tomescu 著

栾汝书 李欧 马振华 李文汉 胡冠章 林翠琴 俞正光 译

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北香河印刷厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 10.75 字数 254,000

1985年7月第1版 1985年7月第1次印刷

印数 00,001—8,200

书号 13010·0884 定价 2.75 元

译 者 序

I. Tomescu 所著 *Introduction to Combinatorics* 一书原是1972年用罗马尼亚文出版的，后经著者本人改写并译成英文，于1975年出版，中译本是根据英文版译出.

本书篇幅不大，英文版共249页，选材得当，用99个命题和一些例题给出组合学的许多重要内容和有关知识. 为了供读者练习和进一步学习、提高，每一章末附有一些问题(全书共230个)，有些问题是较难的，其中一部分取材于文献中的成果，一般都在题后注明出处，在每章末的文献目录中可以查到. 总的来说，这是一本内容比较丰富的组合学入门书. 另外，在组合算法与计算机使用方面介绍了不少经验与实例. 这些都是目前所出版的组合学书所不多见的. 我们希望本书的出版能对我国学习这门学科的同志们有所帮助.

当然，任何一本书都不可能是十全十美的.这是一本初版书，书中错误较多，除了一些极明显的错误外，其他均通过"译者注"予以更正，同时将原文译出，便于读者对照. 另外一些译者注则是为了便于读者理解有关内容，由译者增加的说明.

本书由清华大学应用数学系李欧(编辑前言、序言、第十一、十二章)，俞正光(第一、二章)，胡冠章(第三、四章)，李文汉(第五、六章)，栾汝书(第七、八章)，林翠琴(第九、十章)，马振华(第十三、十四章)译出，并由栾汝书校. 限于译者的水平，译文中错误或不妥之处一定不少，请读者批评指正.

译　　者

1980年9月

英文版编辑前言

在过去的二十年中，组合理论由原来数学中的一潭死水已成长为一个重要和发展迅速的科目．在此期间，一些有关这方面的书出版了，但是它们很多是学会的会议记录或是对一些小的或专门的领域的探讨．包括广泛的组合数学内容的教学用书仍是比较少的，因此这本题材多样的书将会有一定的价值．

这本书首先是用罗马尼亚文出版的．在 Gr. C. Moisil 院士为它写的序言中指出，对于组合理论还缺乏一些公理和推导法则．但是随着时间的推移，这种情况越来越改变了；这个学科的某些领域的公理正如解决这个学科的某些类型问题的技巧那样，也在不断地发展．然而 Moisil 所指出的方法上的多样性仍然是这个学科的特点，特别是在计数的组合理论中，少许思索就可能成功地解决一个特殊问题，而用处理一整类问题中的任何一个的一般技巧却往往是不容易的．

这本书的英文版是著者自己写的，他在书的每一章后面增加了一些问题．这些问题的难易程度各有不同，也没有按难易顺序排列．有些问题是各章内容的练习；另一些则给出补充结果和解决这些问题的文献参考．当然这就相当大的扩充了本书的知识面．许多参考资料是罗马尼亚文的论文，这些论文的内容值得被更多的操英语的数学家们所了解，这本书的出版将有助于做到这一点．

在本书总共十四章内所涉及的题目中，包括了组合理论中出现的一些数的某些性质，计数问题(Pólya–de Bruijn 方法，包含与排斥原理和 Möbius 函数)，各种布局的存在性(相异代表及

Ramsey 定理）以及最优化问题（图的最短路和最短距离，色数）。每章后面有文献目录，我在适当的地方增加了英文版书籍的细目，而且还将一些现代期刊标题的缩写改得符合《数学文摘》(Mathematical Reviews)上的写法。

正如 Moisil 告诉我们的那样，组合理论是应用于不同领域的学科。因此本书不仅使专门研究组合理论的数学家感兴趣，而且对于化学家，经济学家，运筹学家和工程师等都是一样，它还适合于大学水平的学生。

本书中用到的图论的术语，一般是根据法国学派所采用的。对于一些没有明显给出的定义，读者可参考 Berge 所著(《图与超图》*Graphes et Hypergraphes*, Dunod, Paris 1970；英文版：*Graphs and Hypergraphs*, North-Holland, Amsterdam, 1973)．在有些章节中，Boole 代数的知识是假定已知的。

E. KEITH LLOYD

序　言

一位年青又有才华的罗马尼亚数学家写了一本组合理论的书使我很高兴. 本书的读者将有机会发现这个众说纷纭的组合理论是什么. 特别是读了第十二及第十三章, 他们也会了解到一些新颖的内容, 这些内容是有了电子计算机以后带给数学许多分支的, 也可以说是带给全部数学的.

不久前, 组合理论和图论一样, 被认为是只被少数几位, 虽然不是不重要的数学家好奇地(但并不是不值得地)关心过的事物. 必须强调指出, 这些数学家中有些是颇负盛名的. 如: Cayley, Euler, Hamilton, Sylvester.

今天, 虽然图论还不包括在数学分支的传统的分类之中, 但它已成为一门大的学科.

图论是关系逻辑的一个方面, 它包含着逻辑方面和纯代数方面的内容: 所讨论的矩阵代数中的元素属于 Boole 代数或更一般地属于分配格.

图论在不同领域中的应用——从化学到经济学, 从电路网络的研究到题材的分析, 到政治学, 这些都赋予它声望使得科学分类工作者必须加以重视.

组合理论的情况则有所不同. 一个数学分支有它自己的公理, 但是它的推理法则当然和所有的演绎科学是共同的. 而列举这些法则的少数科学家被说成是研究数理逻辑而不是研究数学本身的. 组合理论没有自己特有的公理. 由于和自然数打交道, 组合理论的公理看来就是数论的公理. 但是, 数论和组合理论都不去研究自然数的公理.

还有，一个数学分支要有它自己的概念和结构，有它自身的发展和概念与结构的发展，还要有它的变革．我们却从未发现组合理论有这类事情，难道这说明组合理论不是纯数学的一部分吗？或者，组合理论仅仅与应用数学有关吗？

天体力学和地球力学告诉我们如何了解某种现象．电磁理论、量子力学、运筹学、数学语言学等帮助我们了解另一些现象．它们都没有象集合论的 Zermelo 公理或算术的 Peano 公理那样的一套公理系统．它们也没有象群论、拓扑空间理论或范畴论那样用集合论的公理做为不言自明的假定．

在所有以上提到的领域中，主要涉及的是那些被研究的现象：如地球绕太阳的运动或论题的语法范畴．

显然，对某些集合进行计数是令人感兴趣的．在不同领域内都提出了这样的计数问题．但是下列问题是否是一个应用数学的问题则可能引起异议：有 n 个丈夫和他们的 n 个妻子围圆桌而坐，使每个男的坐在两个女的中间，而这两个女的都不是他的妻子，问一共有多少种坐法？这个问题能认为是个重要问题吗？

十分奇怪，实际上这正是一个严肃的数学问题（参看第四章）．

我们的看法是：所有上面的问题得以产生是由于对数学采取了教条式观点所致．为了研究形式系统的逻辑结构，为了试图考虑把数学用于探索自然并开始用于人类和社会的研究，组合论都是很有用的．数学的定义应当考虑到组合理论，不但过去而且现在它都是数学的一个分支．

所以不论是从哲学领域将数学的发展加以分类或定义的人，还是为中学和大学安排课程表的人，都不应该忽视组合理论．

我还没有把握断定我们是不是知道什么是数学．但是，假如我们知道的话，我们应当承认这样的论断：

“组合理论是数学的一部分”是正确的.

这就是为什么这本书是受欢迎的，它使我们去思考.

它使我们数学地去思考.

它使我们去思考数学.

无疑地，读本书的每一章，使我们感到一种强烈的数学趣味.

许多人由计数问题找到了组合理论的要旨. 读者将要学到这是怎样的一类问题. 第一章中的古怪的例2是属于这类问题的吗？组合理论中许多问题涉及到将集合划分为子集或将集合中的元素按某种方法进行排列. 但是为了说明本书中对待这类问题的观点，希望读者把第七、第八章的内容和通常在群论的书中有关置换的论述加以比较.

组合理论的每一个问题要求人们的头脑——人们的数学头脑无拘无束的运用.

它需要知识，但更需要智能.

从一个问题到另一个问题所用的方法都不相同.

对有些重大的数学理论，会遇到这种情况：使用极少几种方法获得了杰出的结果. 而组合理论却相反，它在方法上是多样化的. 因此有些人对它得到的结果的重要性有所怀疑.

所以在解组合理论问题的过程中会感到愉快，而且有机会不断地重温这种乐趣.

这本书，这门科学，使我们能够给数学以如下的定义：一大乐趣.

Gr. C. MOISIL

目 录

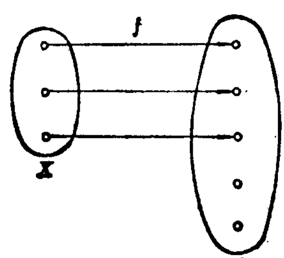
第一章 集合与函数

下面我们只讨论有限集，即只含有限个元的集合．一个有限集 X 的元的个数用 $|X|$ 表示．

有两个集合 X 和 Y，如果对于每一个元 $x\in X$ 有一个元 $y\in Y$ 和它相联系，就说从 X 到 Y 定义了一个函数(*function*)，记作 $f: X\rightarrow Y$．元 y 叫做元 x 在函数 f 之下的象 (*image*)，记作 $f(x)$．我们用 $f(X)$ 表示集合 $\{f(x)\mid x\in X\}$(即 X 的元在函数 f 之下的全体象的集合)．我们也说集合 X 是函数 f 的定义域(*domain*)，集合 Y 是函数 f 的值域(*codomain*)．

若 $f(x)=y$，元之间的这个对应关系用 $x\mapsto y$ 表示．

若有一个函数 f，使 Y 中的不同元和 X 中的不同元相联系，就说这个函数是单的，或者叫做一个单射(*injection*)，即 $x_1\neq x_2$ 蕴涵 $f(x_1)\neq f(x_2)$．如果集合 X 和 Y 是有限集，并且存在一个单射 $f: X\rightarrow Y$，则 $|X|\leqslant|Y|$．在图 1.1 里给出这个性质的图形说明．

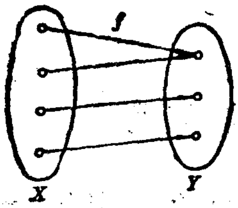


f 单的; $|X|=3$, $|Y|=5$

图 1.1

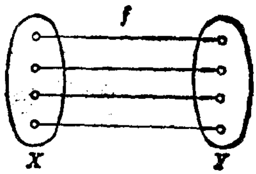
若 $f(X)=Y$，或者等价地，对于每一个 $y\in Y$，存在一个元 $x\in X$ (不必是唯一的) 使得 $f(x)=y$，就说函数 f 是满的，或者叫做一个满射(*surjection*)．这种情形我们就说 f 是从 X 到 Y 上的一个函数．如果集合 X 和 Y 是有限的，并且存在一个满射 $f:X\rightarrow Y$，则 $|X|\geqslant|Y|$．(图1.2)．

一个函数 f 既是单的又是满的，就说是一一对应的，或者说是



f 满的; $|X|=4$, $|Y|=3$

图 1.2



f 一一对应的; $|X|=|Y|=4$

图 1.3

个一一对应 (*bijection*). 如果两个有限集 X 和 Y 之间存在一个一一对应,那么从上面两个不等式,我们得到 $|X|=|Y|$ (图 1.3).

本书所涉及的计数问题,经常用到以下的方法:已知一个有限集 X 的元具有某些性质,要找 X 的元的个数的公式,我们用确定另一个与 X 有一一对应关系的集合 Y 的元的个数来代替.

例 1 已知一个有限集 X, 它的元用 1, 2, …, n 表示. X 的子集的集合用 $\mathscr{P}(X)$ 表示. 让我们来确定 X 的子集的个数.

为此,我们在 X 的子集和 n 位二进制字 $x_1x_2\cdots x_n$, $x_i\in\{0, 1\}$ 之间建立一一对应关系,这里字母 x_1, x_2, …, x_n 的相互连结并不表示它们的值的乘积. 一一对应 f 如下定义:如果 $X_1\subset X$, 则 $f(X_1)=x_1x_2\cdots x_n$, 其中当 $i\notin X_1$ 时, $x_i=0$; 当 $i\in X_1$ 时, $x_i=1$. 例如,当 $n=5$, $X_1=\{1, 3, 5\}$ 时, $f(X_1)=10101$. 根据这个函数,集合 X 和字 $\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}}$ 相对应,而空集 $\emptyset$ 和字 $\underbrace{0\ 0\cdots0}_{n\text{个}}$ 相对应. 明显地, f 是 $\mathscr{P}(X)$ 和长度为 n 的二进制字之间的一一对应. 因为不同的子集对应不同的字,并且每一个二进制字 $x_1x_2\cdots x_n$ 是一个如下定义的子集 X_1 的象: $X_1=\{i|x_i=1\}$, 即 $f(X_1)=x_1x_2\cdots x_n$. 但是 n 位二进制字的个数是 2^n. 因为二进制字中的第一位数字可以有两种选法,第二位也有两种选法,等等. 于是得到二进制字的个数是 $\underbrace{2\cdot2\cdots2}_{n\text{个}}=2^n$. 我们就这样证明了 $\mathscr{P}(X)$ 的元素的个数等于 $2^{|X|}$.

同样地,某些单射函数的构造产生一个确定不等式的一般方法. 我们给出下面两个例子加以说明.

例 2 (Erdös, Szekeres) 在一个有 $mn+1$ 个各不相同的整数的序列 u_1, u_2, $\cdots$, u_{mn+1} 中，或者存在一个长度大于 m 的减子序列，或者存在一个长度大于 n 的增子序列.

按定义，一个已知序列的子序列是选自原序列里的一些元素按原序列中同样的顺序写成的一个序列. 例如，设 $m=3$, $n=4$, 并设序列是 1, -2, 7, 3, 2, 4, 5, 6, 14, 10, 8, 9, 13. 这个序列不包含长度大于 3 的减子序列，一个长度为 3 的减子序列是 7, 3, 2. 但是它包含长度大于 4 的增子序列，一个长度为 8 的增子序列是 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 13.

为了证明这个性质，我们用 l_i^- 表示从 u_i 开始的最长的减子序列的长度，并且用 l_i^+ 表示从 u_i 开始的最长的增子序列的长度. 假定我们的命题是错的，就是说每个减子序列的长度小于或等于 m, 并且每个增子序列的长度小于或等于 n.

我们现在在集合 $\{u_1, u_2, \cdots, u_{mn+1}\}$ 上定义一个值在笛卡儿积 $\{1, 2, \cdots, m\}\times\{1, 2, \cdots, n\}$ 里的函数 f 如下：$f(u_i)=(l_i^-, l_i^+)$. 我们来证明这个函数是一个单射.

假定 $i<j$. 在这个情形，$u_i>u_j$ 就蕴涵 $l_i^->l_j^-$. 因为我们至少可以加一个元素（即 u_i）到从 u_j 开始的长度最大的减子序列的左边，从而得到一个从 u_i 开始的长度比它大的减子序列. 所以 $l_i^->l_j^-$. 类似地，$u_i<u_j$ 就蕴涵 $l_i^+>l_j^+$. 因为我们至少可以加一个元素（即 u_i）到从 u_j 开始的最大长度的增子序列的左边，从而得到一个从 u_i 开始的长度比它大的增子序列，所以 $l_i^+>l_j^+$. 因此 $u_i\neq u_j$ 就蕴涵 $(l_i^-, l_i^+)\neq(l_j^-, l_j^+)$. 因为这些有序对中至少有一个位置上的数是不同的. 然而最后这个不等式就意味着 $f(u_i)\neq f(u_j)$.

这就证明了函数 f 是单的，因此集合 $\{u_1, u_2, \cdots, u_{mn+1}\}$ 的元的个数小于或等于值域的元的个数. 值域是笛卡儿积 $\{1, 2, \cdots, m\}\times\{1, 2, \cdots, n\}$, 所以它包含了 mn 个元. 因此由我们的假设引出错误的结论 $mn+1\leqslant mn$. 所述性质由反证法得到证明.

当 $|X|=m$ 和 $|Y|=n$ 时，笛卡儿积 $X\times Y$ 包含 mn 个元. 这一事实可以由考虑 $X\times Y=\{(x, y)\,|\,x\in X, y\in Y\}$ 得到证实，因为 x 可以有 m 种选法，y 有 n 种选法，结果就有 mn 种不同的可能组成对 (x, y).

例 3 (Erdös, Hajnal) 已知一个有 n 个元的集合 X 和一个 X 的 3-元子集*) 的族 $\mathscr{F}$, 其中每两个子集之间至多有一个公共元. 则存在一个至少有

*) 译者注：3-元子集是表示有三个元素的子集.

$[\sqrt{2n}]$ 个元的 X 的子集，它不包含属于 $\mathscr{F}$ 的任何子集.

(我们用 $[x]$ 表示 x 的整数部分，即小于或等于 x 的最大整数).

例如，设 $n=9$, $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $\mathscr{F}$ 是由以下 X 的子集构成的族: $\{1, 2, 3\}$, $\{3, 4, 5\}$, $\{5, 6, 7\}$, $\{1, 6, 8\}$, $\{1, 4, 7\}$, $\{2, 5, 8\}$, $\{7, 8, 9\}$, $\{1, 5, 9\}$. 在这个情况下，存在有 $[\sqrt{18}]=4$ 个元的集合 $\{1, 2, 7, 8\}$，它是不包含族 $\mathscr{F}$ 中的任何子集的.

为了证明这个结论，让我们取一个不包含 $\mathscr{F}$ 中的任何子集的最大子集 $M\subset X$. 即对每一个 $x\in X\setminus M$, 存在一个集合 $B\in\mathscr{F}$, 使得 $B\subset M\cup\{x\}$. 这里 $X\setminus M$ 表示集合 X 和集合 M 的差，即属于 X 而不属于 M 的元的集合. 具有上面提到性质的一个最大集合的存在是明显的: 从一个非最大集开始，比如说，从 X 的一个元开始，我们加入新的元一直到得到一个最大集为止. 因此集合 $\{1, 2, 7, 8\}$ 就是具有不包含上面已知的族 $\mathscr{F}$ 的任何子集这个性质的最大的集.

我们令 $|M|=r$, 则 $|X\setminus M|=n-r$.

按照最大性，对每个 $x\in X\setminus M$, 存在一个子集，我们记作 $A_x\subset M$, 有 $|A_x|=2$, 使得 $\{x\}\cup A_x\in\mathscr{F}$.

用这种方法我们定义一个函数 f: $X\setminus M\to\mathscr{P}_2(M)$, 这里 $\mathscr{P}_2(M)$ 代表 M 的所有 2-元子集的集合.

让我们利用族 $\mathscr{F}$ 中任意两个集合最多只有一个公共元这个性质来证明 f 是一个单射.

设 $x, y\in X\setminus M$, $x\neq y$. 如果 $A_x=A_y$, 则 $\{x\}\cup A_x$, $\{y\}\cup A_y$ 属于族 $\mathscr{F}$ 并且包含两个公共元，于是和族 $\mathscr{F}$ 的假设相矛盾.

所以 $x\neq y$ 就蕴涵 $A_x\neq A_y$, 即 $f(x)\neq f(y)$; 于是 f 是一个单射，因此 $|X\setminus M|\leqslant|\mathscr{P}_2(M)|$. 但是 $|\mathscr{P}_2(M)|=\frac{r(r-1)}{2}$, 这里 r 是 M 的元的个数. 因为具有 $x, y\in M$, 且 $x\neq y$ 的无序对 $\{x, y\}$ 的个数可以用下面方法得到: x 从 M 中可以有 r 种不同方法选出，而 y 从余下的元素中有 $r-1$ 种不同方法选出. 又由于每个对得到两次: 一次是 $\{x, y\}$, 另一次是 $\{y, x\}$, 因我们假定元 x 和 y 的次序是无关的，所以个数 $r(r-1)$ 必须除以 2.

我们于是得到 $n-r\leqslant\frac{r(r-1)}{2}$ 或 $r^2+r-2n\geqslant 0$. 考虑到 r 是正整数，所以 $r\geqslant\frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}$. 令 $\frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}=k$, 推得 $2n=k^2+k$, 所以

$[\sqrt{2n}]=[\sqrt{k(k+1)}]$. 如果 k 是一个正整数，则 $[\sqrt{k(k+1)}]=k$（因为 $k<\sqrt{k(k+1)}<k+1$），就可推得 $r\geqslant[\sqrt{2n}]$. 否则，即 k 不是正整数时，$r\geqslant[k]+1$，并且由 $[\sqrt{k(k+1)}]\leqslant[k+1]=[k]+1\leqslant r$，我们也得到 $r\geqslant[\sqrt{2n}]$.

我们已经证明了 X 中每个不包含 $\mathscr{F}$ 的任何子集的最大的子集 M 至少有$[\sqrt{2n}]$个元. 因此证明结束.

给定两个函数 $f: X\to Y$ 和 $g: Y\to Z$，由它们能够合成产生一个新的函数，用 $g\circ f: X\to Z$ 表示，并对每一个 $x\in X$，定义 $(g\circ f)(x)=g(f(x))$. 如果 $f: X\to Y$ 是一一对应，我们可以用 $f^{-1}: Y\to X$ 表示函数 f 的逆，它的定义如下：如果 $f(x)=y$，则 $f^{-1}(y)=x$. 由于 f 是一个一一对应，对每一个 $y\in Y$，函数 f^{-1} 是有定义的. f^{-1} 也是一个一一对应，并且满足关系式 $f^{-1}\circ f=I_X$ 和 $f\circ f^{-1}=I_Y$，这里 I_X 和 I_Y 分别代表 X 和 Y 的恒等函数(即 $I_X: X\to X$，对每一个 $x\in X$，有 $I_X(x)=x$).

已知 $f: X\to Y$，无论 f 是否是一一对应，对于每一个 $y\in Y$，集合 $f^{-1}(y)$ 定义为 $\{x\mid x\in X,\ f(x)=y\}$，即 X 中在 f 下的象是 y 的全体元素的集合. 如果 f 是一一对应，那么 $f^{-1}(y)$ 就是一个元 x，它就是在函数 f 的逆下 y 的象；因此 $f^{-1}(y)$ 的后一个定义包括了仅仅在 f 是一一对应时才适用的原来的定义. 于是，我们说 f 同样有一个逆，并且也记作 f^{-1}.

所有函数 $f: X\to Y$ 的集合记作 Y^X.

问　　题

1. 设 X 是一个有 n 个元的集合，并且用 $\mathscr{P}_h(X)$ 表示 X 的 h-集合（h-元子集）的集合. 如果 $M(n, k, h)$ 代表一个具有以下性质的族 $\mathscr{F}\subset\mathscr{P}_h(X)$ 的 h-集合的最小个数，即 X 的任何 k-集合至少包含一个 $\mathscr{F}$ 的 h-集合($n\geqslant k\geqslant h\geqslant 1$)，证明