科學圖書大庫

大學微積分
自習手冊

（此書爲美國數學學會專爲高三及大一程度之學者編著作爲自修自用）

（上　冊）

主編者　美國數學協會
　　　　教育傳播委員會

譯　者　楊睢林　馮家金
　　　　楊志德　嚴夢輝

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會
監修人　徐銘信　發行人　王洪鎧

科學圖書大庫

中華民國六十七年八月五日初版

大學微積分自習手冊(上)

基本定價　4.40

譯者　楊睢林　靜宜文理學院數學系理學士
　　　馮家金　國立師範大學數學系理學士

(67)局版臺業字第1810號

出版者　財團法人 臺北市徐氏基金會　臺北市郵政信箱53-2號　電話7813686 7815250號
發行者　財團法人 臺北市徐氏基金會　郵政劃撥賬戶第15795號
承印者　大原彩色印製企業有限公司　台北市西園路2段396巷19號　電話：3611986•3813998

大學微積分
自習手冊

上　冊
目　錄

(二) 定積分

第三章 有界集合與有界函數

第四章 定積分

第一章

函數、極限、連續性

致讀者：

爲了對本書的
有效使用起見
你必須先看扉頁中
「給讀者的説明」

1.1 基本集合論

1 基本集合論所用語言與符號，因其使用方便，含義嚴密，故在本書中應用範圍極為廣泛，本節將介紹有關基本集合論之專用名詞與符號。

集合．元素．元素之隸屬 （進度2—21）

2 如讀者對此進度已有完全而正確之了解，則可逕閱進度22，否則必須自進度3繼續研讀，設$A=\{2,4,6,8\}$與$B=\{x \mid x>10\}$。試就下列各敘述中辨別其真(T)與假(F)。

(a)$4\in A$　　(c)$4\pi\in A$　　(e)$A=\varnothing$

(b)$4\in B$　　(d)$4\pi\in B$

(a) T　(b) F　(c) F　(d) T　(e) F

3 下列舉有若干同意義之例題，務使讀者對「元素」「隸屬」與「集合」有直覺而明晰之觀念，有一整數集合，每一整數大於1而小於5，則此集合中諸整數列表如__________。

整數2是集合中之一元素（因$1<2<5$），吾人亦可謂2是集合中之一份子，或謂2在集合中，或謂2屬於此集合，同理____與____均為此集合中之元素。

元素-13並非此集合之一份子。（因$-13 \not> 1$），或謂-13非此集合中之元素，或稱-13不在集合中，吾人可另舉一例如6__________此集合之元素。

（是，不是）

2, 3, 4　　　　3與4　　　　不是

4 通常吾人以小寫字母表元素，大寫字母表集合，以∈表屬於，若S爲一集合，a爲其中之一元素，則表以$a \in S$，若b不爲S之元素，則表以$b \notin S$，令R表大於1而小於5一切整數之集合（如進度3），請以∈或∉符號填充下列空白。

(a) $2 \underline{\quad} R$　(b) $-3 \underline{\quad} R$　(c) $5 \underline{\quad} R$　(d) $2\frac{1}{2} \underline{\quad} R$

(a) $2 \in R$　(b) $-3 \notin R$　(c) $5 \notin R$　(d) $2\frac{1}{2} \notin R$

5 $a \in S$意謂「元素a是集合S中之一份子」或簡稱「a是S之一元素」或「a屬於S」，「a在S中」，或以相同之他種表示亦可，如5爲集合N之一元素，則吾人可寫爲＿＿＿＿。

$5 \in N$

6 同理$b \notin S$即爲「元素b不爲集合S之一份子」簡言之「b不爲S之元素」「b不屬於S」「b不在S中」或以同意義之他種形式表之亦可，若N表正整數之集合則0不爲正整數集合N中之元素，吾人可寫爲＿＿＿＿。

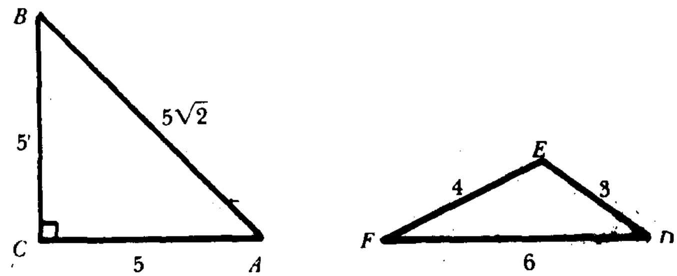
$0 \notin N$

7 予一集合S與一元素a則知$a \in S$或知$a \notin S$二者必居其一，（因一元素在集合之屬於關係下，不可能出現旣不屬此，又不屬彼之情形）令E表整數中偶數之集合，試以適當之符號∈或∉填下入列空白中。

(a) $5 \underline{\quad} E$　(b) $2\pi \underline{\quad} E$　(c) $-728 \underline{\quad} E$　(d) $1.24 \underline{\quad} E$

(a) $5\notin E$ (b) $2\pi\notin E$ (c) $-728\in E$ (d) $1.24\notin E$

8 設 R 表諸直角三角形之集合，S 表諸任意三角形之集合，(不包括等邊)，並令 I 表諸等腰三角形之集合，今有 $\triangle ABC$ 及 $\triangle DEF$ 如圖所示：



試以適當之符號 $\in$ 或 $\notin$ 填入下列空白中

(a) $\triangle ABC$______ R　　(d) $\triangle DEF$______ R

(b) $\triangle ABC$______ S　　(e) $\triangle DEF$______ S

(c) $\triangle ABC$______ I　　(f) $\triangle DEF$______ I

(a) $\in$　(b) $\notin$　(c) $\in$　(d) $\notin$　(e) $\in$　(f) $\notin$

9 符號 $\in$ 可在種種不同文句下使用，但須注意該符號 $\in$ 前後文句之語氣。

例如：「令 $P\in S$」則讀爲「令 P 爲 S 之一元素」，「若 $P\in S$」則須讀爲「若 P 在 S 中」或「若 P 爲 S 之一元素」等等。

10 令 S 表大於 1 而小於 5 整數之集合，因 S 僅有幾個元素，則 S 用表列式表示較佳，即將所有元素寫在括號內，用逗點個個分開，表列式者如 $S=\{2,3,\quad\}$。

$S=\{2,3,4\}$

11 表列式書寫集合時，其元素書寫先後次序無關，若 S 僅有二元

素a，b，則下列兩種寫法均可，$S=\{a,b\}$或$S=$_____.

$\{b,a\}$

12 令$S=\{-5,0,\frac{2}{3},\pi,1\}$. 用適當之符號$\in$或$\notin$塡入下列空白.

(a) 0.8 ____ S (b) 1 ____ S (c) π ____ S (d) 2π ____ S

(a) $0.8\notin S$　(b) $1\in S$　(c) $\pi\in S$　(d) $2\pi\notin S$

13 表列式集合中，某一元素出現一次以上時，且每次出現均爲相同，如集合$\{1,1,2,\}$，稱等於集合$\{1,2\}$，同理集合$\{a,a,a,b,b\}$可表如________.

$\{a,b\}$　(或$\{b,a\}$)

14 下列諸集合中如有與集合$\{3,5,7\}$相同者試列擧之.

(a) $\{3,4,5,6,7\}$　(c) $\{5,5,7,3\}$

(b) $\{5,3,7,\}$　(d) $\{5,7\}$

(b)與(c)　(或$\{5,3,7\}$與$\{5,5,7,3\}$)

15 爲便於求解本書中若干特殊問題，而有廣集合之產生，討論某一特殊問題時只須選出廣集合中某一部份元素作爲討論對象，是以廣集合中之元素爲討論問題時需用元素供給之所.

本書中之廣集合如無特別註明時，則均視爲實數集合.

令U表一廣集合，$P(x)$爲一命題，用以敍述每一$x\in U$時爲眞爲僞，例如U表正整數之集合，$P(x)$表命題$x<10$，若$P(x)$爲眞，則在U中有那些元素？

____

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,及 9

16 令U表一廣集合，$P(x)$表一命題，對每一$x \in U$而言非眞卽僞，有$\{x \mid P(x)\}$者，卽表示所有$x \in U$時均爲眞，$\{x \mid P(x)\}$稱爲“集合構式”如U爲整數之集合$\{x \mid 1 < x < 10\}$= ________.

（表列式）

$\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,\}$

17 實數廣集合$\{x \mid 3 < x < 5\}$，含有無限多個元素，不可能以表列式之形式將此集合中之每一元素均表示出來，但實數之屬於關係仍然存在，例如（在下列空白中以適當之$\in$或$\notin$符號塡入之）.

(a) $4\frac{1}{3}$______$\{x \mid 3 < x < 5\}$ (c) π____$\{x \mid 3 < x < 5\}$

(b) 7.3______$\{x \mid 3 < x < 5\}$ (d) $\sqrt{2}$___$\{x \mid 3 < x < 5\}$

(a) $\in$ (b) $\notin$ (c) $\in$ (d) $\notin$

18 不同之廣集合，$\{x \mid P(x)\}$能表示不同之集合，例如正整數之廣集合$\{x \mid 1 < x < 5\}$與實數廣集合二者不同，復因敘述文字之註明，廣集合不可能有含意不淸之事，除有特別說明外，所謂廣集合，均指一切實數之集合.

下列實數廣集合中，試以適當之符號$\in$或$\notin$塡入下列空白.

(a) 10________$\{x \mid 5 < x \leq 10\}$

(b) 0________$\{y \mid y > 1\}$

(c) π________$\{z \mid z^2 > 5\}$

(a) $\in$ (b) $\notin$ (c) $\in$

19 $\{ y \mid y^2 - 1 = 0 \}$ 如何讀法？

集合中所有之 y，均具有 $y^2 - 1 = 0$ 之性質，或集合中每一實數 y 均有 $y^2 - 1 = 0$ 之性質，或他種同意義之答案。

20 在實數廣集合 $\{ x \mid x^2 = -1 \}$ 中，所有之元素爲何？

無（因 x 爲實數，$x^2 \geq 0$）

21 由前例可知命題 $P(x)$，用以滿足無元素之廣集合 U，吾人可藉 $\{ x \mid P(x) \}$ 而決定一集合，故不含任何元素之集合，其出現亦甚合理。

***1.1.21* 定義** 集合中不含有任何元素者曰空集合，以符號 $\varnothing$ 表示之。

指出下列各集合中之實數：

(a) $\{ x \mid x - x = 1 \}$ (c) $\{ z \mid z \neq z \}$

(b) $\{ y \mid y + y = 1 \}$ (d) $\{ w \mid w = w \}$

(a) $\varnothing$ (b) $\{ \frac{1}{2} \}$ (c) $\varnothing$ (d) 所有實數

集合之關係 （進度 22—40）

22 如讀者對此進度已有完全而正確之了解，則可逕閱進度 4 1 ，否則自進度 2 3 繼續研讀。令 $A = \{ 2, 4, 6, 8 \}$ $B = \{ x \mid x > 10 \}$，指出下列各敍述之眞 (T) 假 (F)。

(a) $\{ 2, 6 \} \subseteq A$ (d) $\{ 2, 6, 8, 4 \} = A$

(b) $\{ 1 1 \} \subseteq B$ (e) $\{ 2, 6, 8, 4 \} \subset A$

(c) $\varnothing \subseteq B$ (f) 集合 $\{ 1, 2, 3 \}$ 之所有部份集合均爲 $\{ 1, 2, 3, 4 \}$ 的眞部份集合

(a) T (b) T (c) T (d) T (e) F (f) T

23 令 $S=\{1,2\}$，$T=\{1,2,4,6\}$，注意 S 中每一元素，皆爲 T 之元素，基於此種情形而有：

1.1.23 **定義** S，T 爲兩集合若 S 中每一元素，皆爲 T 之元素，則稱 S 爲 T 之**部份集合**。

下列各集合中，那些是 $\{1,2,4,6\}$ 的部份集合？
(a) $\{1,4\}$ (b) $\{2,4,6,8\}$ (c) $\{1,2,6\}$

(a) $\{1,4\}$ 及(c) $\{1,2,6\}$

24 **符號**：任意二敘述 p 與 q，用連接詞若……，則……連接起來，記作"若 p 則 q"數學上以"$p\Rightarrow q$"表示，運用時比較方便，同理推廣，則有"若 p 則 q，且若 q 則 p"或"若且唯若 p 則 q"二者均表示同一敘述，數學上以"$p\Leftrightarrow q$"表之。

利用上述之各種數學符號，可以將進度2.3 的定義改寫爲：對所有 x 而言，若______，則集合 A 是集合 B 的部份集合。

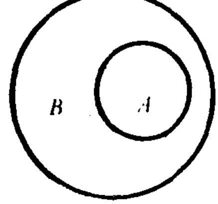
$x\in S\Rightarrow x\in T$

25 若 A,B 爲兩集合，A 爲 B 之部份集合記作 $A\subseteq B$，讀作"A 包含於 B"就實數而言，符號 $\subseteq$ 與 $\geq$ 表示的意義大致相同，若 A 不是 B 之部份集合，記作 $A\nsubseteq B$，以適當的符號 $\nsubseteq$ 或 $\subseteq$ 填入下列空白中。

$\{1,2\}$ ______ $\{1,2,3\}$ $\{1,2,3\}$ ______ $\{1,2,4,6\}$

$\{1,2\}\subseteq\{1,2,3\}$ $\{1,2,3\}\nsubseteq\{1,2,4,6\}$

26 有一種簡便的方法來解釋集合間的關係，稱爲范——尤拉氏圖示法，如右圖



B集合中所有的元素，通常用圓B中所有的點表示之，而A集合中所有的元素，以圓A中所有之點表示，下列各種情形，那一些與上述右圖之情形相符合？

(a) $A\subseteq B$　　(b) $B\subseteq A$　　(c) 兩者皆非

$A\subseteq B$（自圖中可見在A中之每一元素均在B中，故有 $x\in A\Rightarrow x\in B$）

27 兩集合A，B若$A\subseteq B$寫作$B\supseteq A$，則稱「B是A之超集合」或稱「B包含A」可記爲若且唯若$B\supseteq A$，則$A\subseteq B$，將下列空白填入適當之$\subseteq$或$\supseteq$符號。

$\{1,2\}$ ______ $\{0,1,2,3\}$

$\{1,2\}$ ______ $\{1\}$

$\{x \mid x<1\}$ ______ $\{y \mid y\leq 2\}$

$\{1,2\}\subseteq\{0,1,2,3\}$

$\{1,2\}\supseteq\{1\}$

$\{x \mid x<1\}\subseteq\{y \mid y\leq 2\}$

28 「是…之元素」與「是…之部份集合」這兩種敘述不同，要牢牢記住，試以適當$\subseteq$或$\in$之符號填入下列空白中，若$A=\{2,4,6,8\}$．

(a) $\{2,6\}$ ______ A　(b) 2 ______ A　(c) $\{2\}$ ______ A.

(a) $\{2,6\} \subseteq A$ (b) $2 \in A$ (c) $\{2\} \subseteq A$

注意 (b)，(c) 二者之區別，2是一個元素不是一個集合，但是 $\{2\}$ 是一個僅含元素2的集合。

29 $S \subseteq T$ 讀作＿＿＿＿＿若且唯若 $S \subseteq T$，則＿＿＿＿＿。

S 是 T 的部份集合（或 S 包括在 T 之中），對於任何 x 而言，$x \in S \Rightarrow x \in T$（或若 $x \in S$，則 $x \in T$ 或以他種相同意義之表示亦可）。

30 若且唯若＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿，$S \nsubseteq T$

有一 $x \in S$，但 $x \notin T$，或 $x \in S$，但 $x \nsubseteq T$，（或以其他同意表示均可）。

31 令 S 表一集合

(a) 是否 $S \subseteq S$？＿＿＿＿ (b) 何故？＿＿＿＿＿＿

(a) 是的，(b) $x \in S \Rightarrow x \in S$

注意：要證明集合 A 不是集合 B 的部份集合，必須證明在集合 A 中至少有一元素不爲集合 B 之元素。

32 若令 S 爲一集合，$\varnothing$ 爲空集合

(a) 是否 $\varnothing \subseteq S$？＿＿＿＿＿＿

(b) 爲什麽？＿＿＿＿＿＿＿＿

(a) 是的

(b) 在任何時候若 $x \in \varnothing$，則 $x \in S$（因爲不可能有 $x \in \varnothing$ 之情況出現），自進度30可以證明若 $A \nsubseteq B$ 則必可找出一