面向21世纪课程教材

Textbook Series for 21st Century

简明数学分析

王昆扬 编

高等教育出版社

HIGHER EDUCATION PRESS

面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

简明数学分析

王昆扬 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书是教育部“高等师范教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果，是面向21世纪课程教材.全书共分五章，内容包括：极限、微分学、积分学、级数、曲线和曲面上的积分.本书内容深厚、精炼简明，用先进的内容取代了落后的内容，例如在微分学的学习中对单变量与多变量进行了统一的论述；在积分学中用Lebesgue积分取代了Riemann积分，并加入了计算机的练习.本书适于因材施教，对于培养高素质优秀的数学教育和研究人才能起到较好的作用.

本书可作为高等师范院校和综合大学数学系的教科书.

图书在版编目(CIP)数据

简明数学分析/王昆扬编.—北京：高等教育出版社，2001

ISBN 7-04-009847-4

Ⅰ.简… Ⅱ.王… Ⅲ.数学分析 Ⅳ.017

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第10537号

责任编辑 王 强 **封面设计** 张 楠 **责任绘图** 郝 琳
版式设计 马静如 **责任校对** 王效珍 **责任印制** 杨 明

简明数学分析
王昆扬 编

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市东城区沙滩后街55号 邮政编码 100009
电 话 010-64054588 传 真 010-64014048
网 址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn

经 销 新华书店北京发行所
排 版 高等教育出版社照排中心
印 刷 国防工业出版社印刷厂

开 本 787×960 1/16 版 次 2001年7月第1版
印 张 20 印 次 2001年7月第1次印刷
字 数 370 000 定 价 17.10元

序　　言

本书是教育部“高等师范教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果，是面向21世纪课程教材.

先说说为什么编写这本教材.

江泽民主席在第三次全国教育工作会议上的讲话(1999年6月15日)谈及人才成长规律时说过：“学得好的影响和带动学得不太好的，水平高的影响和带动水平比较低的，这样就可以促进共同进步与提高.必须坚决克服用‘一个模子’来培养人才的倾向.”目前，我国已经有很多相当不错的微积分教材.可是通过多年的教学实践，我感到在内容上和格调上，仍然有需要大力改进的地方.一是应该用先进的内容取代落后的内容；二是应该把教材写得内容深厚而又精炼简明.特别是要适于因材施教，应能对于培养优秀的数学教育和数学研究人才起较好的作用.这就是编写这本教材的初衷.

这本教材在许多方面打破了传统，或者说有明显特色.下面简单地说一说我在哪些方面打破了传统，有什么道理.

首先，在第一章中就严格地讲授实数的定义.但不是像多数课本那样用费解的 Dedekind 方法，而是着力把学生从初中二年级就已经知道的“无限不循环小数是无理数”这个概念讲解清楚.即使部分学生一时理解不透，以后在学泛函分析，遇到距离空间的完备化的时候，认识必有一大提高.

实数讲清楚了，往下逻辑上很顺畅.我没有等到后面单独讲授级数的时候才让学生遇到$\sum$.事实上，学生们在中学早就知道等差级数和等比级数了.讲完数列的极限，级数的概念就自然出来了.这样，第二个打破常规之处就是定义函数

$$f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}x^k\quad(x\in\mathbb{R}),$$

并把 $f(1)$ 记作 e，把 $f(x)$ 记作 e^x.给学生们讲清楚这就是他们在中学就知道的指数函数.这与定义

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

在逻辑上是等价的.但更直观，简洁.而把后者作为习题似乎更有趣味.在大多数复变函数论教科书中，也是这样定义的.这样做的另一个意图，就是希望学生把数列和级数的极限实质融会贯通起来，而不要由于形式的不同搞得界限过于分明.

第三个打破常规之处,是把单变量和多变量一起讲.目的有二:其一,强化学生对于多变量函数的认识.现代科学技术的发展对于多变量函数的理论的需求越来越高.针对以往对于多变量理论的讲述不够充分及把单变量和多变量分开讲的负面效果,尝试把单变量理论与多变量理论统一起来讲是有益的.何况大学生们在中学阶段的学习中已经与一元初等函数打了6年的交道,有了接受多元函数概念的基础.这是主要目的.其二,节约了大量篇幅.当然,在讲多元函数的导数时,一方面要把一元函数作为特例同时也是最基本的情况讲透彻,另一方面又要强调多元与一元确有本质上不同的地方,不可一概把多元情形看成是一元情形的简单推广.接着,要花些力气把多维空间之间的变换,特别是可导变换的概念讲清楚,这将是多元积分变量替换的理论基础.

第四个打破常规之处,就是用 Lebesgue 积分取代 Riemann 积分.数学分析包括微分学和积分学两部分.现有教材在积分学部分都以 Riemann 积分理论为内容. Riemann 积分是19世纪的理论,是有缺陷的理论.20世纪创立的 Lebesgue 积分理论克服了 Riemann 积分的缺陷,是完备的理论.传统的作法是在大学三年级再讲授这个理论.我认为,在走向新世纪的历史时刻,打破传统的作法,用 Lebesgue 积分取代 Riemann 积分,把积分论统一起来,很有些新陈代谢的味道.

还有两点要提一下.

对于求原函数(不定积分)的技巧部分,做了适当压缩,并加入使用计算机的练习."参变积分"理论不再单列一章,而是作为积分论的一节."数项级数"也不单列一章.适当减少同样内容的重复.尽可能多注意实质,而不过分局限于形式.这也使得节奏紧凑,能腾出不少时间让学生主动发挥,例如用讨论班的形式来促进教学.

另外,注意与后续课程的衔接,不躲避相关学科的重要概念.例如,对于$\mathbb{R}^n$的基本拓扑概念,作触类旁通的介绍,对于学生将来进一步学习其他学科,树立数学的整体概念是有好处的.在讲幂级数的时候,扩展到复数域去讲,实在是举手之劳.却能为与解析函数论的沟通预做准备.

本书的初稿是在给北京师范大学数学系96级讲授"数学分析"的基础上编写的.初稿写成于1999年3月,写成后即用来给北京师范大学数学系99级一班学生讲授.在一年多的教学过程中,发现大部分学生学得不错.出乎预料的是,这本教材所具有的明显的深度和难度非但没有妨碍学习,相反地却调动了学生的积极性,给他们带来一种高水平学习的自豪感.这坚定了我沿着这条改革之路继续走下去的信心.书稿在一年多的教学实践中不断修改,写成了现在这个样子.

在两年来的改革实践中,本人得到许多前辈和同事的支持.也有不少同志对于本人的大胆改革表示了担忧.对于大家的关心,在此深表感谢.

我特别要感谢北京师范大学严士健教授、华东师范大学张奠宙教授的鼓励.同时也非常感谢复旦大学严绍宗教授的鼓励.严绍宗教授在看了我关于积分论的

改革的论文后，热诚地勉励我要踏踏实实地把用 Lebesgue 积分取代 Riemann 积分的工作做到底．我将继续努力，不辜负前辈的期望．

这本书肯定要在以后的教学实践中不断修改完善．恳切希望此书能起抛砖引玉的作用．希望能认真贯彻因材施教的方针，把我国大学的数学分析课的教学从本质上推进一步．

对于教育部的资助，以及北京师范大学的配套资助深表感谢．

北京师范大学数学系　王昆扬

2000 年 12 月

目　　录

第一章　极限◦实数◦函数

§1　有理数列的极限

我们现在只在有理数范围内讨论.

用$\mathbb{N}$代表非负整数集,$\mathbb{Z}$代表整数集,$\mathbb{N}_+$代表自然数集.

我们在初中二年级学过,"正的整数和分数,负的整数和分数,以及零,叫做有理数."我们用$\mathbb{Q}$代表有理数集,也就是说,

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n}:\quad m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}_+\right\}.$$

设 A 和 B 都是不空的集合(简称为"集").若有一个法则,使得对于 A 的任意一个元素(简称为"元")a,按照这个法则,有 B 中惟一一个元素 a'与之对应,那么我们就说这个法则是从 A 到 B 的映射.可用随便一个英文字母来代表映射.设 T 是集 A 到集 B 的映射,$a\in A$ (读作 a 属于 A).按照法则 T,在 B 中那个与 a 对应的元 a'叫做 a 在映射 T 下的象,记做 $T(a)$.用符号$\{T(a):a\in A\}$表示 A 的一切元的象的全体所成的集合,简记为 $T(A)$,叫作 A 在 T 下的象(或值域).

定义 1.1(数列)　若 f 是从$\mathbb{N}_+$到$\mathbb{Q}$的映射,则称 f 为(有理)数列,记做 $f=\{f(n)\}_{n=1}^{+\infty}$.当然,也可用其他记号,如 a_n,b_n 等来代表 $f(n)$.也可以把数列展开来写成

$$(f(1),f(2),f(3),\cdots).$$

注意,f 的值域 $f(\mathbb{N}_+)=\{f(n):n\in\mathbb{N}_+\}$与数列 $f=\{f(n)\}_{n=1}^{+\infty}$是两回事.例如,当 $f(n)$恒等于 1 时,数列 $f=(1,1,1,\cdots)$,但 $f(\mathbb{N}_+)=\{1\}$是一个只含数 1 为其元素的单元素集.

定义 1.2(数列的极限)　设 $f=\{f(n)\}_{n=1}^{+\infty}$是(有理)数列.

(1) 如果有一个有理数 l,使得对于任意的 $k\in\mathbb{N}_+$,总找得到 $n_k\in\mathbb{N}_+$,当 $n>n_k$ 时$|f(n)-l|<\frac{1}{k}$,那么,就说数列 f 收敛到极限 l,记做 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(n)=l$.

(2) 如果对于任意的 $k\in\mathbb{N}_+$,总找得到 $n_k\in\mathbb{N}_+$,使得当 $n>n_k$ 时 $f(n)>k$,

那么,就说数列 f 发散到极限 $+\infty$(读做正无穷),记做 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)=+\infty$.

(3) 如果对于任意的 $k\in\mathbb{N}_+$,总找得到 $n_k\in\mathbb{N}_+$,使得当 $n>n_k$ 时 $f(n)<-k$,那么,就说数列 f 发散到极限 $-\infty$(读做负无穷),记做 $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)=-\infty$.

(4) 不收敛的情形都叫做发散.

从定义看到,$\{f(n)\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛到 l 与 $\{f(n)-l\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛到 0 等价,也与 $\{|f(n)-l|\}_{n=1}^{+\infty}$ 收敛到 0 等价.

说明一下,$+\infty$ 和 $-\infty$ 都只是符号而不是数.但为了方便,我们规定,对于任意的数 a,

$$-\infty<a<+\infty.$$

例 1 自然数列 $\{n\}_{n=1}^{+\infty}$ 发散到 $+\infty$.

例 2 设 $q\in\mathbb{Q}$,$q>0$.数列 $\{q^n\}_{n=1}^{+\infty}$ 是我们熟知的公比(即后一项与前一项的比)为 q 的等比数列.显然,当 $q>1$ 时

$$\lim_{n\to+\infty} q^n=+\infty,$$

而当 $0<q<1$ 时

$$\lim_{n\to+\infty} q^n=0.$$

例 3 设 $q\in\mathbb{Q}$, $0<q<1$.令 $s_n=\sum\limits_{k=0}^{n} q^k$, $n\in\mathbb{N}_+$.这个符号的意思是

$$\sum_{k=0}^{n} q^k:=1+q^1+\cdots+q^n.$$

(我们用":="表示等号右边的内容是等号左边的符号的定义).

我们来考察数列 $\{s_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 的极限.我们知道,

$$s_n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

显然

$$0<\frac{1}{1-q}-s_n=\frac{q^{n+1}}{1-q},\ \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1-q}-s_n\right)=0.$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty} s_n=\frac{1}{1-q}.$$

定义 1.3(基本列——Cauchy 列) 设 $f=\{f(n)\}_{n=1}^{+\infty}$ 是数列.如果对于任意的 $k\in\mathbb{N}_+$,总找得到 $n_k\in\mathbb{N}_+$,使得当 $m,n>n_k$ 时 $|f(m)-f(n)|<\dfrac{1}{k}$,那么,就说数列 f 是基本列(或 Cauchy 列).

定理 1.1 收敛数列必是基本列.

证 设数列 f 收敛到 l.那么,不管 $k\in\mathbb{N}_+$ 多大,总找得到 $n_k\in\mathbb{N}_+$,使得当 $n>n_k$ 时,$|f(n)-l|<\frac{1}{2k}$.于是,当 $m,n>n_k$ 时,

$$|f(m)-f(n)|<|f(m)-l|+|l-f(n)|<\frac{1}{k}.\square$$

定义 1.4 设 f 和 g 都是数列.如果 $\lim\limits_{n\to+\infty}(f(n)-g(n))=0$ 那么就说 f 和 g 等价.

显然,数列的等价关系具有反身性、对称性和传递性.也就是说,任何数列 f 必与自己等价;若 f 与数列 g 等价,则 g 与 f 等价;若 f 与 g 等价,且 g 与数列 h 等价,则 f 与 h 等价.

定义 1.5(子列) 设 f 和 g 都是数列,g 只取正整数值且严格增,即对于一切 $n\in\mathbb{N}_+$,有$\mathbb{N}_+\ni g(n)<g(n+1)$.那么,称数列$\{f(g(n))\}_{n=1}^{+\infty}$为 f 的子列,记之为 $f\circ g$.

(在定义 1.5 中,我们用了倒写的属于号$\ni$).

定理 1.2 若 f 是基本列,则它的子列与它等价.

定理的证明是简单的,留作习题.

定理 1.3 若 f 和 g 分别收敛到 a 和 b,且 $c,d\in\mathbb{Q}$,那么

$$\lim_{n\to+\infty}(cf(n)+dg(n))=ca+db,\ \lim_{n\to+\infty}(f(n)g(n))=ab.$$

如果还知 $b\neq 0$,那么

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=\frac{a}{b}.$$

注 由于 $b\neq 0$,当 n 充分大时必有 $g(n)b>0$ 成立,所以$\frac{f(n)}{g(n)}$对于大的 n 有定义.那么,谈到它的极限,总把前有限项使 $g(n)=0$ 者略去不要.

定理的证明是简单的,留作习题.

最后我们规定,说一个数列$\{f(n)\}_{n=1}^{+\infty}$是有上界的,指的是存在一个数 a,使得对于每个 $n\in\mathbb{N}_+$ 都有 $f(n)<a$;说一个数列$\{f(n)\}_{n=1}^{+\infty}$是有下界的,指的是存在一个数 b,使得对于每个 $n\in\mathbb{N}_+$ 都有 $f(n)>b$;说一个数列 f 有界,指的是它既有上界又有下界.显然,极限为$+\infty$的数列无上界,而极限为$-\infty$的数列无下界.收敛的数列是有界的(见**习题 1.1**,题 6).

习 题 1.1

1. 请给出定理 1.2 的证明.
2. 请给出定理 1.3 的证明.
3. 设

$$t_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}:=\frac{1}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}.$$

求 $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n$.

4. 设 $a\in\mathbb{Q}$, $a>1$, $k\in\mathbb{N}_+$. 求

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^k}{a^n}.$$

5. 设有理数列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 和 $\{y_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 分别收敛到有理数 x 和 y.

求证:

$$\lim_{n\to+\infty}\max(x_n,y_n)=\max(x,y).$$

注意,max(…)表示( )中的数之最大者,max 是 maximum 的略写.

6. 证明:基本列一定是有界的.
7. 设 f,g 都是有极限的数列.若对于每个 $n\in\mathbb{N}_+$ 都有 $f(n)\leqslant g(n)$,那么

$$\lim_{n\to+\infty}f(n)\leqslant\lim_{n\to+\infty}g(n).$$

§2 有理数的小数表示

下面我们从极限的观点对于有理数的十进计数制表示(简称为十进表示),做一个严格的讨论.

定义 2.1 设 $a_k\in\{0,1,\cdots,9\}$, $k\in\mathbb{N}_+$,并且不管 N 多大,都存在 $k>N$ 使得 $a_k<9$. 设 $p\in\mathbb{Z}$. 称记号

$$p+0.a_1a_2a_3\cdots\cdots \tag{1}$$

为**十进小数**(简称为**小数**),称 p 为它的**整部**.

定义 2.2 设 $p+0.a_1a_2a_3\cdots\cdots$是一个十进小数,简记之为 A.令

$$A_n=p+0.a_1\cdots a_n=p+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{10^k},\quad n\in\mathbb{N}_+.$$

称有理数列

$$\{A_n\}_{n=1}^{+\infty} \tag{2}$$

为**与小数(1)对等的数列**.与一个小数对等的数列叫做**标准列**.

命题 2.1 标准列是基本列.

证 设 $g=\{p+f(n)\}_{n=1}^{+\infty}$是标准列,其中

$$f(n)=0.a_1a_2\cdots a_n,\ n\in\mathbb{N}_+.$$

对于任给的 $k\in\mathbb{N}_+$,当 $\mu,\nu\in\mathbb{N}_+$ 且 $\mu,\nu>k$ 时显然有

$$|g(\mu)-g(\nu)|=|f(\mu)-f(\nu)|<10^{-k}<\frac{1}{k}.\square$$

定义 2.3 设 $m\in\mathbb{N}_+,a_1,\cdots,a_m$ 是 m 个不全为 9 的取值于$\{0,1,\cdots,9\}$的数字.设 $p\in\mathbb{Z}$.把小数

$$p+0.a_1\cdots a_ma_1\cdots a_m\cdots \tag{3}$$

叫做以 $a_1\cdots a_m$ 为循环节的(十进)**循环小数**,简记之为

$$p+0.\dot{a}_1\cdots\dot{a}_m.$$

把以数字 0 为循环节的小数叫做有限小数,常略去其循环节而记之为通常的有限小数的形式,如 $0.2\dot{0}=0.2$.如果 $b_1,\cdots,b_\mu\in\{0,1,\cdots,9\}$ $(\mu\in\mathbb{N}_+)$,则也把小数

$$p+0.b_1\cdots b_\mu a_1\cdots a_ma_1\cdots a_m\cdots \tag{4}$$

叫做以 $a_1\cdots a_m$ 为循环节的(十进)**循环小数**,简记之为

$$p+0.b_1\cdots b_\mu\dot{a}_1\cdots\dot{a}_m.$$

注 按定义 2.3,同一个循环小数可以有不同的记法(和不同的循环节).例如小数

$$0.01010101\cdots$$

既可以写成$0.\dot{0}\dot{1}$也可以写成$0.0\dot{1}\dot{0}$.而且,$0.\dot{2}$和$0.\dot{2}\dot{2}$表示同一个数.但无论如何,单个数字 9 不可以是循环节.

设$\{A_n\}_{n=1}^{+\infty}$是与小数(3)对等的数列.那么

$$A_{mn}=p+0.a_1\cdots a_m\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{10^{mk}},$$

从而,根据§1 例 3 讨论过的事实,有理数列$\{A_n\}_{n=1}^{+\infty}$收敛到下述极限:

$$\lim_{n\to+\infty}A_n=\lim_{n\to+\infty}A_{mn}=p+\frac{0.a_1\cdots a_m}{1-\dfrac{1}{10^m}}\in\mathbb{Q}. \tag{3'}$$

同理,与小数(4)对等的数列收敛到

$$p+0.b_1\cdots b_\mu+\frac{0.a_1\cdots a_m}{\left(1-\dfrac{1}{10^m}\right)10^\mu}\in\mathbb{Q}. \tag{4'}$$

定义 2.4　把循环小数(3) 和(4)分别叫做它们所对等的有理数列(标准列)的极限(3′)和(4′)的小数表示.

命题 2.2　不同的循环小数所表示的有理数是不同的.

证　设 $p+0.c_1c_2c_3\cdots$和 $q+0.d_1d_2d_3\cdots$是两个(形如(3)或(4)的)不同的循环小数，$\{C_n\}_{n=1}^{+\infty}$和$\{D_n\}_{n=1}^{+\infty}$分别是与他们对等的有理数列.

如果 $p\neq q$，无妨认为 $p>q$,那么,我们可以找到某 $k\in\mathbb{N}_+$，$k>2$,使得 $d_k<9$.于是当 $n>k$ 时，

$$C_n\geqslant p,\ D_n\leqslant q+0.9\cdots9(d_k+1)\leqslant q+\frac{10^k-1}{10^k}.$$

那么,当 $n>k$ 时

$$C_n-D_n\geqslant p-q-1+\frac{1}{10^k}\geqslant\frac{1}{10^k}.$$

从而

$$\lim_{n\to+\infty}C_n\geqslant\lim_{n\to+\infty}D_n+\frac{1}{10^k}.$$

设 $p=q$，那么存在一个正整数 l,使得 $c_l\neq d_l$,且当正整数 $j<l$ 时 $c_j=d_j$.无妨认为 $c_l>d_l$.那么,我们可以找到某 $k\in\mathbb{N}_+$，$k>l$，使得 $d_k<9$.于是当 $n>k$ 时，

$$C_n\geqslant p+0.c_1\cdots c_l\cdots c_k,\ D_n\leqslant p+0.d_1\cdots d_l\cdots(d_k+1).$$

那么,当 $n>k$ 时

$$C_n-D_n\geqslant\frac{1}{10^k}.$$

从而

$$\lim_{n\to+\infty}C_n\geqslant\lim_{n\to+\infty}D_n+\frac{1}{10^k}.$$

证毕.□

从另一方面来说,我们有下述命题.

命题 2.3　任意一个有理数都可以表示成形如(3)或(4)的十进循环小数.

证　我们只需证明每个正的真分数都可以表示成形如(3)或(4)的十进循环小数.

设 $r=\dfrac{m}{n}$是即约分数,$m,n\in\mathbb{N}_+$，$m<n$.那么,存在 r_1，$m_1\in\mathbb{N}$,满足

$$10m=r_1n+m_1,0\leqslant r_1\leqslant 9,\quad 0\leqslant m_1<n.$$

同理,存在 r_2，$m_2\in\mathbb{N}$,满足

$$10m_1=r_2n+m_2,0\leqslant r_2\leqslant 9,\quad 0\leqslant m_2<n.$$