

第2章 應用幾何畫法

2.1 概說

藉直尺及圓規的幫助,所有的純粹的幾何問題均可解決。幾何的原理在機械製圖上是常用的,然而幾何畫法,與製圖者所用的方法多少有所不同。製圖者應用更省時而捷便的用具,例如,向已知直線作垂線的幾種幾何的方法,除非必不得已的場合,如在地板上畫金屬薄板模型線時,均不使用,一般均用丁字尺及三角板來畫。本章僅僅講述最常用的幾何畫法,而不注重原理的說明。

關於各種幾何圖形的名稱,請參照第2.1圖。

2.2 二等分已知線 AB 或圓弧 AB

第一法(第2.2圖a) 以A點和B點各為中心,以大於AB二分之一的半徑,畫二弧,交於C和D點。直線CD等分直線AB及弧AB。

第二法(第2.2圖b) 以 45° 三角板之長邊靠在與已知直線或已知弧的弦平行的丁字尺上,如圖所示,畫二 45° 線,交在C點。變換 45° 三角板方向,過C點畫垂直線,與直線及弧分別交在等分點D及C。

第三法(第2.2圖c) 在第1.3節(第1.18圖)中已講過。

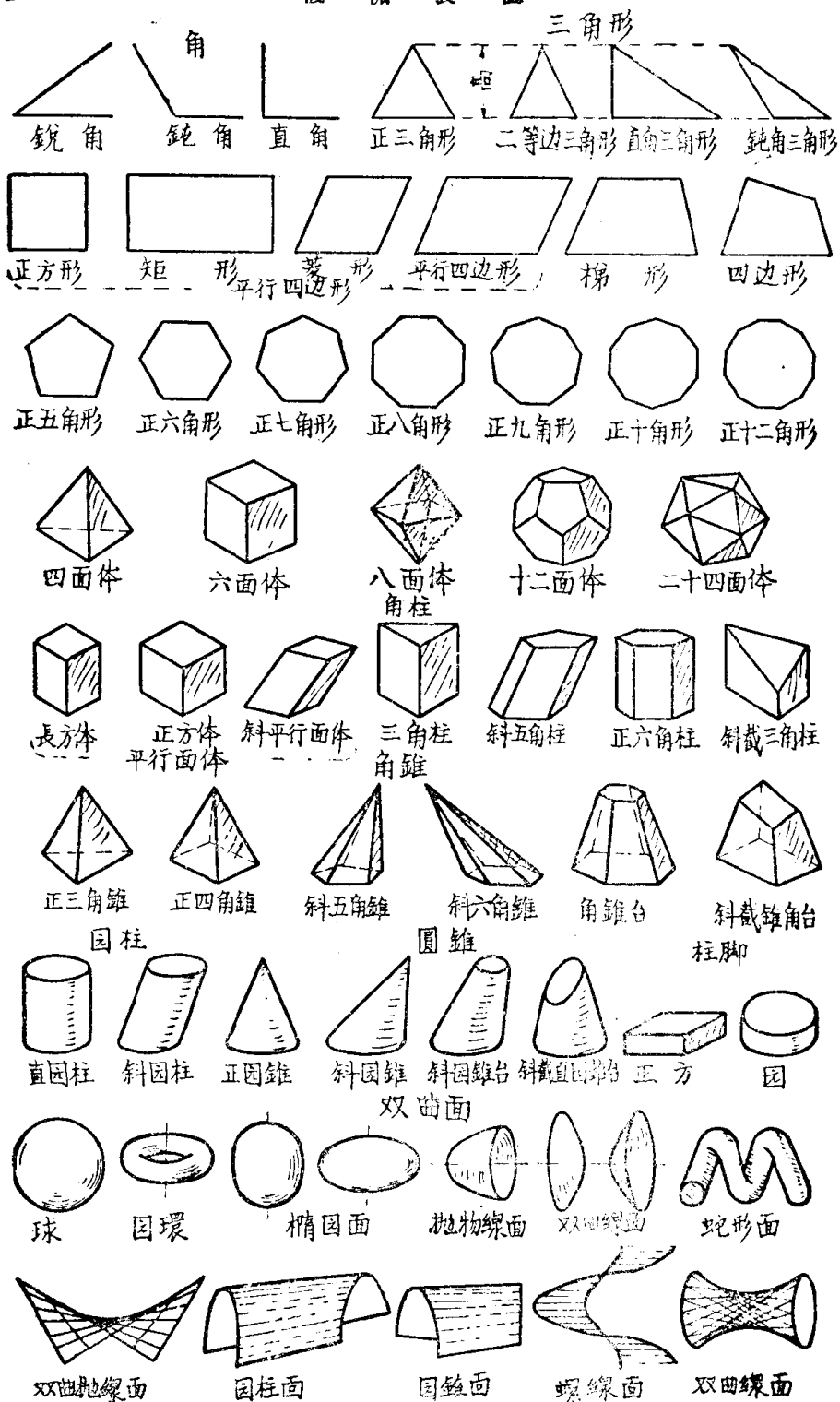
2.3 在直線 AB 上任意 P 點,作一垂直線(第2.3圖)

以P為中心。用任意半徑,截取Pa等於Pb。

以a點b點為中心畫二弧,交於m及n點,垂直線mn即通過P點。

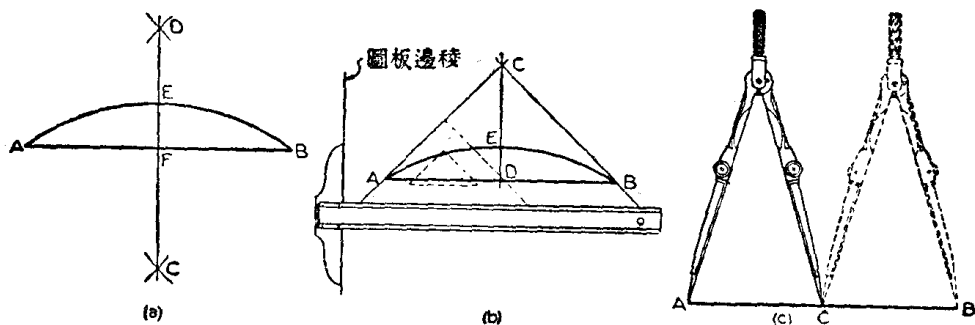
2.4 由線外 P 點向直線 L 畫一垂直線(第2.4圖)

以P點為中心,用任意半徑畫弧與直線L相交於a,b二點。以a



第 2.1 圖 幾何圖形

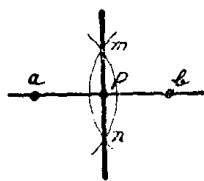
和 b 各為中心，以大於二分之一 ab 的半徑，畫弧相交於 m 點， Pm 即為所求垂直線。



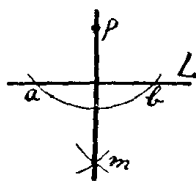
第2.2圖 二等分一直線或一圓弧法

2.5 在直線 L 的一端點上，作一垂直線，但不延長此直線(第2.5圖)

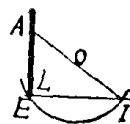
以任意 O 點為中心， OE 為半徑，畫弧和直線 L 相交在 I 點。連 OI 並延長之，截取 OA 等於 OI 。連直線 AE ，即所求的垂直線，因為 $\triangle AEI$ 內接於半圓周內。



第2.3圖



第2.4圖

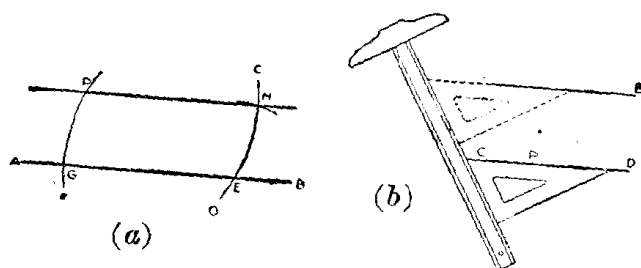


第2.5圖

2.6 過已知 P 點畫直線和已知直線 AB 平行

第一法(第2.6a圖) 以 P 點為中心，用任意半徑畫弧，和直線 AB 相交於 E 點。再以 E 為中心，用同半徑畫弧， GP 與 AB 交在 G ，從 E 截取 EH 等於 GP 。連 PH ，即所求的平行線。

第二法(第2.6圖b) 使三角板之一邊靠緊丁字尺或另一三角板，它邊與已知直線 AB 相合併。按住丁字尺或另一三角板，沿着邊緣移動三角板，至點 P 後，畫通過點 P 的直線，即所要求平行線 CD 。



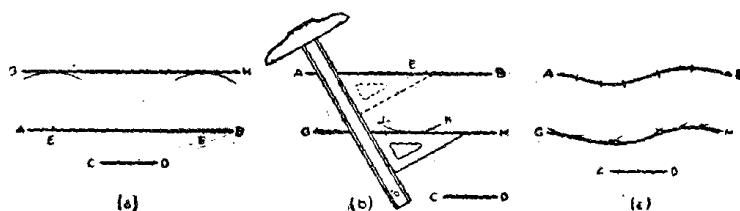
第2.6圖 過已知點畫一線與已知線平行法

2.7 以一定的距離 CD 畫一線與已知線 AB 平行

第一法(第2.7圖a) 分別以接近 A 和 B 的點 E 和 F 為中心, 已知距離 CD 為半徑, 畫二弧。與二弧相切的線 GH 為所求之線。

第二法(第2.7圖b) 以線上任意點 E 為中心, 已知距離 CD 為半徑畫弧 JK 。使三角板之一邊與直線 AB 相合併, 它邊靠住丁字尺滑動, 畫成與弧 JK 相切的所求平行線 GH 。

AB 為曲線時(第2.7圖c), 以 AB 上許多點為中心, 已知距離為半徑, 畫一組圓弧, 用曲線板連此組圓弧的包絡線, 即得所求平行線。

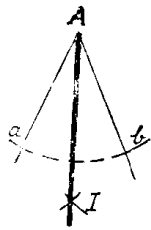


第2.7圖 畫距已知線已知距離的平行線法

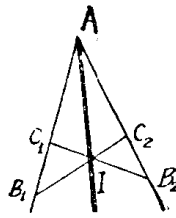
2.8 二等分已知角

第一法(第2.8圖) 以頂點 A 為中心, 取任意半徑畫弧, 和已知角的二邊, 分別交在 a 和 b 點。用大於二分之一 ab 的半徑, a 和 b 為中心, 分別畫弧相交在 I 點。 AI 便是此角的二等分角線。

第二法 僅用一尺, 也可以把一已知角分為二等分, 如第2.9圖。在兩邊上取 $AB_1 = AB_2$ 和 $AC_1 = AC_2$, 連 B_1C_2 和 B_2C_1 。交點 I , 便是所求二等分角線 AI 上的一點。連 AI , 即為所求二等分角線。



第2.8圖



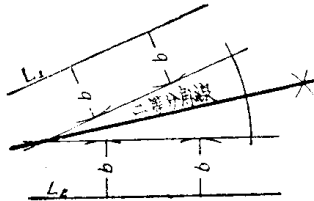
第2.9圖

2.9 畫頂點不落在紙面內的已知角的二等分角線(第2.10圖)

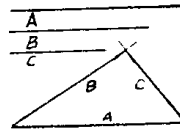
以任意距離 b 畫直線 L_1 和 L_2 的平行線, 在紙內相交於一點。再以上法求此角的二等分角線, 就解答了本問題。

2.10 已知三邊畫此三角形(第2.11圖)

取已知邊為 A, B 及 C 。畫一邊 A 於適當的位置, 以兩端為中心, 並以它二邊為半徑, 分別畫圓弧相交, 此交點即所求三角形頂點。



第2.10圖



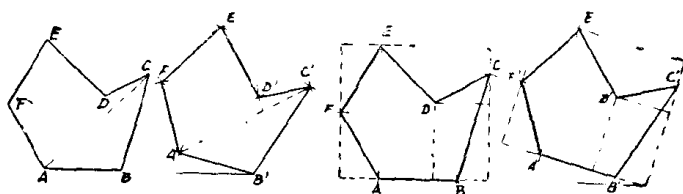
第2.11圖 畫三角形

2.11 移畫已知多角形於新基線上

三角形法(第2.12圖) 已知多角形 $ABCDEF$, 及其底的新位置 $A'B'$, 把每二邊的交點都看作以 AB 為底的三角形的頂點。以中心 A' 與 B' 及半徑 AC 及 BC , 畫同圓弧交在 C' 。同樣以半徑 AD 及 BD 決定 D' 。連 $B'C'$ 及 $C'D'$ 。同法, 仍以 A' 及 B' 為中心, 完成所移畫之圖。

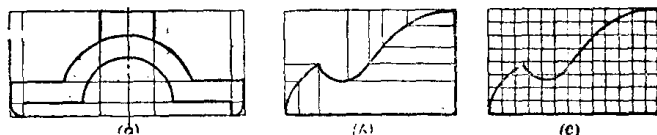
箱距法(第2.13圖) 納已知多角形於一箱中, 把此箱以新底畫出來。在上邊決定出 $ABCE$ 。再用同法決定出 D 點。

第2.14圖為以上二法聯合使用之例。



第 2.12 圖 三角形法

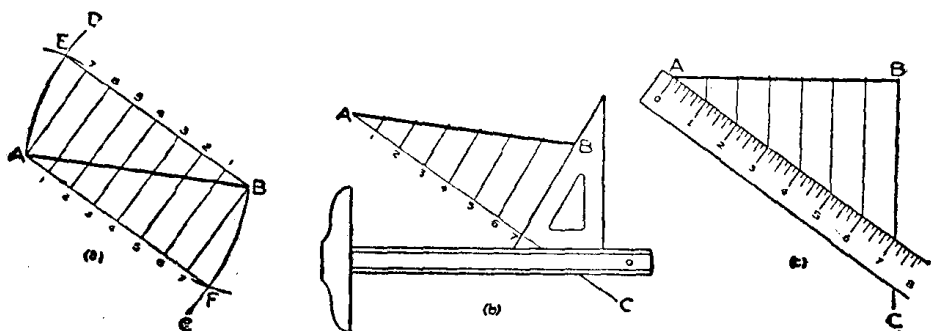
第 2.13 圖 箱距法



第 2.14 圖 為以上二法用於不規則圓形的實例

2.12 分已知直線為任意等分

第一法 用分規試分，已於第 1.3 節(第 1.18 圖)中講過了。



第 2.15 圖 另一線為任意等分法

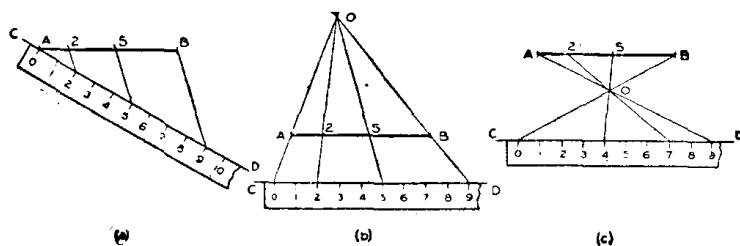
第二法(第 2.15 圖 a) 以已知直線 AB 二端點為中心， AB 為半徑，分別畫圓弧 BC 及 AD 。再以 A 及 B 為中心，任意半徑，分別畫弧和它們交在 E 和 F 。引直線 AF 及 BE ，並以分規在每條線上截出要分的等分(例如 7 等分)。用直線連各分點，如圖所示。這些直線把 AB 分成所要的等分。

第三法第(2.15圖 b) 過已知線 AB 之一端點，畫任意直線 AC ，並沿着 AC 取 7 等分點(譬如說)。連 $7B$ ，用丁字尺及三角板，照圖上樣子畫平行線。此組平行線把 AB 分成所要 7 等分。

第四法(第2.15圖c) 過已知線 AB 一端點畫任何直線 CB , 最好是一直立線。使尺的第一分畫與 AB 一端相合併, 並使第7個分畫在 BC 線上。標出中間六點來, 並過此六點畫 CB 的平行線, 即把 AB 分成7等分。

2.13 按一定比例分一已知線(第2.16圖)

例如按比例 2:3:4 把已知直線 AB 分成3份。



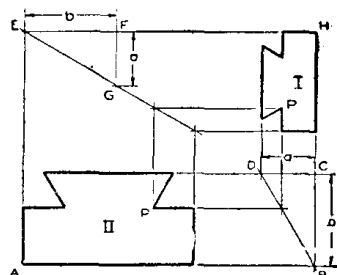
第2.16圖 按一定比例分一線

第一法(第2.16圖a) 過 A 點畫任意直線 CD , 用尺標出 2, 3, 4 單位的分點來, 連 $9B$, 畫它的平行線 5-5 和 2-2。

第二法(第2.16圖b及c) 引線 CD 與 AB 平行, 在 CD 上用尺的分畫取出 2, 3, 4 單位的分點來。過首末二分點分別引線交在點 O 。連 O 與它等分點, 即把 AB 照所給比例分開了。

2.14 放大或縮小一圖形(第2.17圖)

按 $a:b$ 放大圖 I。設放大的圖的隅點在 A , 畫長方形 $ABHE$ 。畫二三角形 BCD 及 EFG , 使邊分別等於 a 和 b 。從圖 I 投射下來, 在 BD 線上, 得到圖 II 的高; 從圖 I 投射向左, 在 EG 上得到圖 II 的寬。畫法如圖所示。



第2.17圖 放大或縮小圖形法

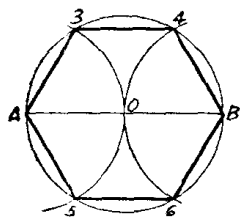
2.15 正六角形的畫法

(1) 已知對角間的距離 AB

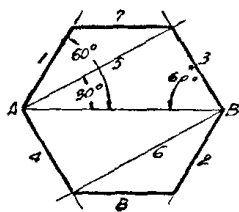
第一法(第 2·18 圖) 以 AB 為直徑畫圓。用同半徑以 A 及 B 為中心畫圓弧與該圓相交,連各交點。

第二法(不用圓規) 以 $30^\circ-60^\circ$ 三角板畫三角形,按照第 2·19 圖所示順序,完成此圖。

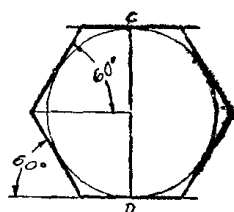
(2) 已知對邊間的距離 以此距離畫內接圓,以 $30^\circ-60^\circ$ 三角板畫此圓的切線,如第 2·20 圖,完成所畫正六角形。



第 2·18 圖 六角形



第 2·19 圖 六角形



第 2·20 圖 六角形

2.16 畫圓的內接多角形(第 2·21 圖)

畫半徑 OC 垂直於直徑 AB 。二等分 OB 。以等分點 D 為中心, DC 為半徑,畫圓弧 CE 。以中心 C 及半徑 CE 畫圓弧 EF 。 CF 弦為五角形的一邊。以此距離用分規在圓周上截出各邊。普通的製圖者,不喜用此幾何法,而多用分規試分此圓周為五等分而連成之。

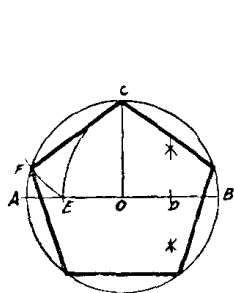
2.17 分圓周為任意等分的近似法(第 2·22 圖)

AB 為已知圓周的直徑。假設為 7 等分。分 AB 為七等分,記入 1, 2, 3, ..., 6。次求以 AB 為邊的等邊三角形的頂點 C 。由 A 起,每隔一點和 C 連起。 $C2$ 與圓周相交於 D 點, AD 就是 $1/7$ 圓周的弧的弦長。連 $C4, C6$ 又各決定出二等分點。連各等分點即得一正七角形。同樣可畫任意正多角形。

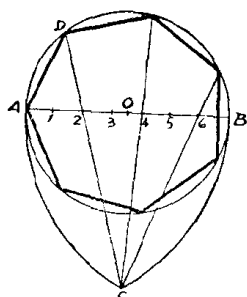
2.18 已知一邊,畫任意正多角形法(第 2·23 圖)

茲取所畫正多角形為七角形。以 AB 為半徑, A 為中心畫半圓,並把它分成七等分。過自左方的第二等分點畫輻射線 $A2$ 。過 3, 4, 5, 6,

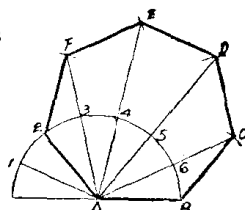
引輻射線。以 AB 為半徑， B 為中心，畫圓弧交 $A6$ 於 C 。以 C 為中心，並以同半徑割 $A5$ 於 D ，同樣得 E 及 F 。連起各點。或於 $A2$ 求出之後畫外接圓，完成之亦可。



第 2.21 圖 五角形



第 2.22 圖 內接多角形



第 2.23 圖 多角形

2.19 過三點畫一圓周(第 2.24 圖)

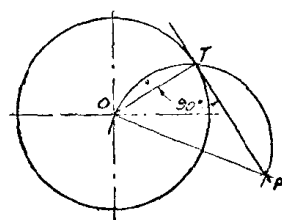
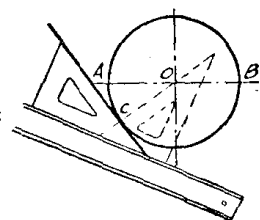
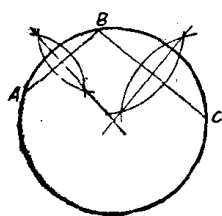
已知點為 A ， B 及 C 。 AB 及 BC 的垂直二等分線的交點為所求圓的中心。

2.20 過圓周上一點畫切線(第 2.25 圖)

ABC 為已知弧，於 C 點畫切線。用三角板與丁字尺(或其它三角板)組合起來，使其斜邊過 O 點及 C 點。將丁字尺按住，沿丁字尺邊稜，移轉三角板，直至斜邊過 C 點為止。如此則所求切線為沿斜邊之線了。(在畫較小的圖時，照第 1.7 圖(第 1-3 頁) B 的樣子置三角的斜邊，更便當)。

2.21 過圓外一點向圓周畫切線(第 2.26 圖)

連已知點與圓心。以此線 OP 為直徑畫半圓。此半圓與已知圓

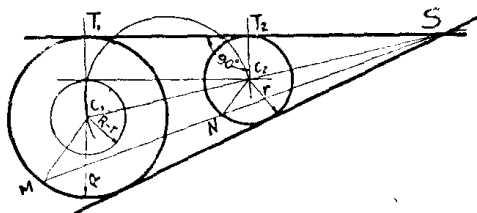


第 2.24 圖 過三點畫圓 第 2.25 圖 畫切線 第 2.26 圖 畫切線

的交點爲切點。

2.22 畫二不等圓的公共外切線(第 2.27 圖)

以大圓 C_1 的中心爲中心，二半徑之差 $R-r$ 爲半徑畫圓。過小圓 C_2 的中心，向半徑 $R-r$ 的圓周畫切線。由 C_1 向所畫切線作垂直線 C_1T_1 ，由 C_2 向同切線作垂直線 C_2T_2 。 T_1T_2 即爲所求的公共外切線。



第 2.27 圖 外切線

S 點爲兩切線和中心線的交點，叫外相似點 (Exterior center of similitude)。

假使兩圓周爲已知， C_1M 和 C_2N 爲平行半徑，連 MN 直線必通過 S 點(請參考幾何學)。

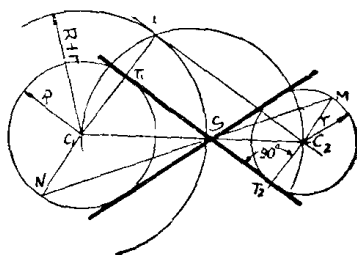
如兩圓周相等時，則連垂直中心線的二半徑的末端點，所得之直線，就是所求的切線，自不待言了。

2.23 畫二不等圓的公共內切線(第 2.28 圖)

以大圓之中心 C_1 爲中心，二半徑的和 $R+r$ 爲半徑，畫一輔助圓周。由 C_2 向此輔助圓周，畫一切線 C_2I 。畫 C_1T_1 與 C_2I 垂直，過 T_1 點畫切線 T_1T_2 與 C_2I 平行。 T_1T_2 就是所求切線。

本題有二解答，一望就知道了。兩切線的相交點 S ，必在兩圓的中心線上。 S 點被叫做內相似點 (Interior center of similitude)。

在兩圓周內，畫 C_1N 和 C_2M 平行，但一在中心線上方，一在其下方，連 MN



第 2.28 圖 內切線

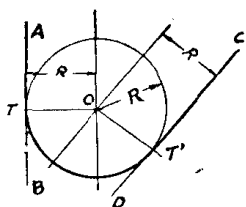
必通過 S 點(參看幾何學)。

2.24 畫已知半徑的圓弧與二已知直線相切

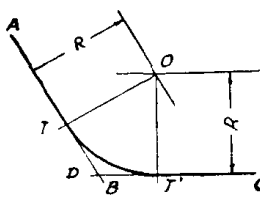
(1) 二直線成銳角時(第2.29圖),以 R 距離分別畫 AB 及 CD 的平行線。它們的交點即為所求圓弧的中心。切線可由 O 向 AB 及 C D 作垂線求得。

(2) 二直線成鈍角時(第2.30圖),畫法與前者同。

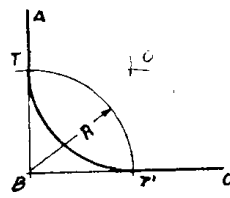
(3) 二直線成直角時(第2.31圖),用前法雖可,但最快的辦法,如第2.31圖。以 AB 與 BC 的交點 B 為中心,以 R 半徑畫圓弧,交二直線於切點 T 及 T' 。再以 T 及 T' 為中心,用同半徑 R 分別畫弧,交於 O 點。 O 即所求中心。



第2.29圖 切弧



第2.30圖 切弧



第2.31圖 切弧

2.25 畫半徑 R 的圓弧與一已知圓及一直線相切(第2.32圖)

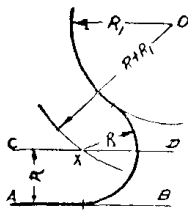
取 AB 為已知線及 R_1 為已知圓的半徑。畫線 CD 距 R 遠而與 AB 平行。以 O 作中心, $R + R_1$ 作半徑畫一弧與 CD 交於 X 。 X 即所求的中心。 AB 的切點必在由 X 向 AB 所作的垂線上;二圓的切點必在連它們的中心 X 及 O 的線上,因為二圓彼此相切,其切點必在連它們中心的線上。

2.26 畫已知半徑 R 的圓弧與已知二圓周相切

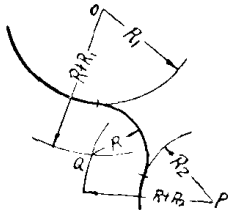
(1) 已知圓心在所求圓之外(第2.33圖) 取 R_1 及 R_2 為已知圓的半徑,且分別取其中心為 O 及 P 。以 O 為中心, $R + R_1$ 為半徑畫一弧。以 P 為中心,用 $R + R_2$ 半徑畫另一弧,與前弧交於 Q 點, Q 即為可求

圓弧的中心。在直線 OQ 及 QP 上記明切點。

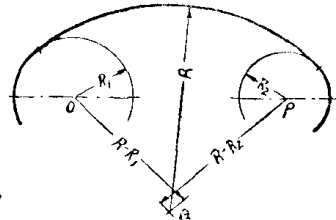
(2) 已知圓心在所求圓之內(第2.34圖) 以 O 及 P 為中心, $R-R_1$ 及 $R-R_2$ 為半徑, 分別畫弧交於所求中心 Q 。同上。



第2.32圖 切弧



第2.33圖 切弧



第2.34圖 切弧

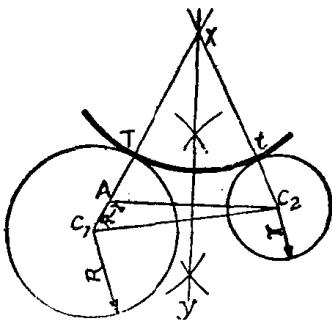
2.27 畫圓弧和二已知圓 C_1 和 C_2 相切, 但已知一切點為 T

如第2.35圖所示, 中心 x 在 C_1T 的延長線上, 自不待言了。取 AT 等於 r 。 AC_2 的垂直二等分線, 和 C_1T 的延長線相交在 X 點。 X 點就是所求圓弧的中心。 XT 為其半徑。

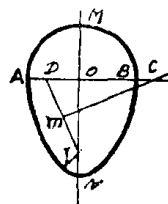
如第2.36圖所示, 應用同理可畫已知長軸 MN 和短軸 AC 的蛋形。在短軸 AC 上畫半圓, 過長軸的端點 N , 以 r 為半徑, 畫圓弧。

如此, 本問題就變為和第2.35圖的場合一樣了。但須注意, 如自 A 至 M 移動切點, 所畫的切弧為外切凸弧, 反方向移動, 則為凹弧。

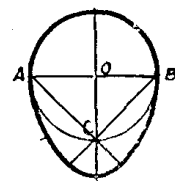
這種畫法, 泥水匠常用來畫蛋形剖面。在這種場合, 除已知兩軸外, 通常更已知半徑 r 。如果已知條件僅為短軸 AB , 則此蛋形的畫法更簡單了, 如第2.37圖。以 A 及 B 為中心, 用半徑 AB 畫二圓弧, 在 A 和 B



第2.35圖 切弧



第2.36圖 蛋形

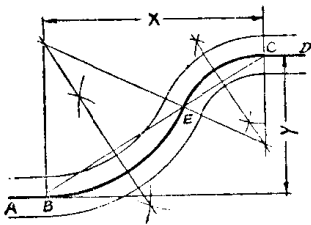


第2.37圖 蛋形

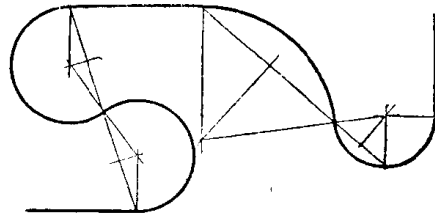
點與已知圓相切，或以 AB 左右延長線上的對稱點為中心，自右方該點到 A 或自左方該點到 B 的距離為半徑，畫二圓弧在 A 及 B 點與已知圓相切。再以 C 為中心，以自 C 至所畫弧與 AC 或 BC 的交點之距離畫圓弧，完成此蛋形。

2.28 畫反向弧(第2.38圖)

已知平行線 AB 及 CD ，連直線 BC ，在 B 及 C 上分別作垂線。而與 AB 及 CD 線在 B 及 C 點相切的任何圓弧之中心，必在此垂線上。在線 BC 上，取 E 點為所求弧通過之點。以垂線等分 BE 及 EC 。通過 B 及 C 的任何弧，其中心必在自其中點所作的垂線上。故此垂直二等分線與方才所畫的二垂直線的交點，為弧 BE 及 EC 的中心。此線可為路的或管子的中心線。連二中心的線又必過 E 點，故可作校核之用。第2.39圖為此反向弧畫法的組合應用。



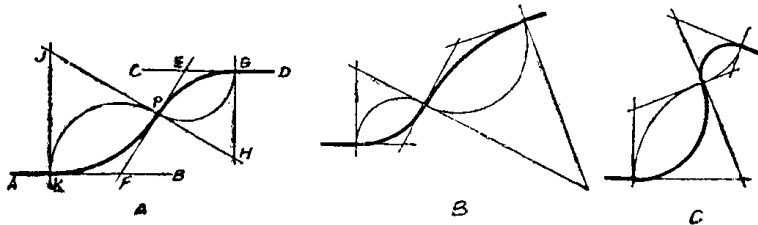
第2.38圖 反向弧。



第2.39圖 反向弧的應用

2.29 畫一反弧在已知點與二直線及一截線相切(第2.40圖A,B,C)

已知兩直線 AB 及 CD ，被另已知線 EF 截交於 E 及 F 點。過 EF 上的點 P 畫 EF 的垂線 JH 。以 E 為中心， EP 為半徑畫弧交 CD 於



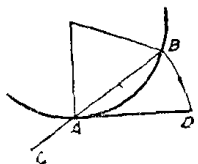
第2.40圖 與三線相切的反弧

G. 以 F 為中心, FP 為半徑畫弧交 AB 於 K . 由 K 畫對 AB 的垂線交 JH 於 J . 同樣求出 H . 則 H 及 J 為所求與三線相切的弧的中心.

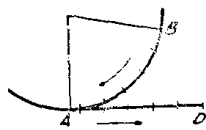
2.30 在直線上截取圓弧的近似長(第 2.41 圖)

AB 為已知弧. 在 A 點畫切線 AD , 並將弦 AB 向切線方向延長至 C , 使 AC 為二分之一 AB . 以中心 C , 半徑 CB 畫弧交 AD 於 D . AD 的長等於弧 AB (非常近似). 假設已知弧在 45° 與 90° 之間, 使 AC 等於 AB 弧的二分之一的弧的弦, 不用 AB 弧的弦的二分之一, 更為精確.

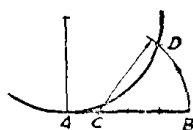
普通截弧長法, 為使用分規. 使腳針間的距離小到弦與弧近似等長程度, 由 B 點向 A 點量若干次, 至近於 A 點不足一分時, 再反轉在切線上向 D 量同樣次數, 故 AD 近似等於 AB . 畫法如第 2.42 圖.



第2.41圖 截弧長法

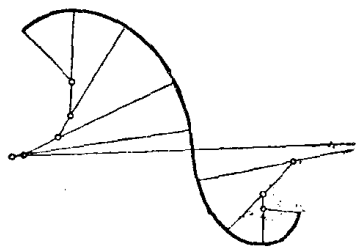


第2.42圖 截弧長法



第2.43圖 截弧長法

2.31 在已知圓周上截取直線的近似長(第 2.43 圖)



第2.44圖 非圓複曲線的近似連法

取直線 AB 在 A 點與圓相切. 截 AC 等於四分之一 AB . 以 C 為中心, CB 為半徑畫圓弧交該圓於 D 點. 弧 AD 的長近似地等於 AB . 假設弧 AD 大於 60° , 則用二分之一 AB .

用分規按第 2.43 圖法, 反過來由直

線截弧長亦可.

2.32 以相切的圓弧近似的連任何非圓弧曲線法(第2.44圖)

用試求法選中心及半徑, 使所要畫的圓弧與已知曲線上的弧一小

段近似地相合後，再連起此小段來。所求的中心必在對此要畫的那小段曲線中點的法線上。用許多這樣的彼此相切的小圓弧，把已知任何的曲線，近似而圓滑地連起來。摹圖員喜用此法。用曲線板連亦可。

2.33 橢圓的畫法

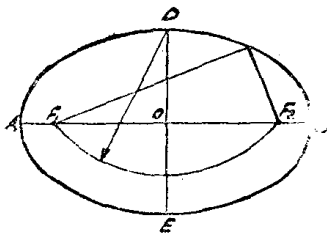
橢圓為一合口平面曲線，從曲線內長軸上兩定點（焦點）到曲線上任一點距離之和為一定，即等於長軸之長。

已知橢圓長短二軸求二焦點時，如第2.45圖，以短軸之一端 D 為中心，長軸之半 OB 為半徑，畫圓弧和長軸交在 F_1 和 F_2 二點， F_1, F_2 即所求焦點。（證明： $F_1D + F_2D = 2OB = AB$ ）。

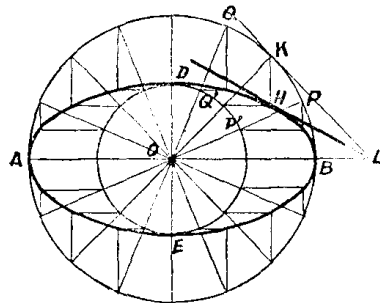
已知橢圓的長短軸 AB 和 DE ，畫橢圓的方法很多，常用的如下：

(a) 同心圓法（第2.46圖）

這可以說是最好的方法。以 O 為中心，用長短軸分別畫同心圓。從外圓周上各點如 P, Q 等，連半徑 OP, OQ 等與內圓周交在 P', Q' 等。從 P 點畫直線平行 OD ，從 P' 畫直線平行 OB ，二者的交點，便是橢圓周上的一點。同樣可求出許多點，連成橢圓。



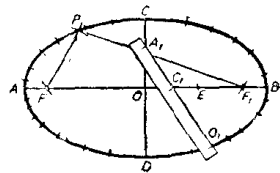
第2.45圖 求焦點法



第2.46圖 同心圓法

(b) 橢圓規法（第2.47圖）

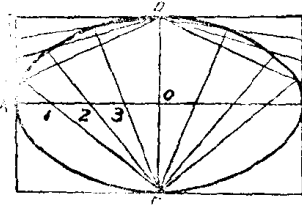
在一圖紙條上記出 $A_1C_1O_1$ ，使 A_1O_1 等於長軸之半， O_1C_1 等於短軸之半。分別保持 A_1 點及 C_1 點在短軸及長軸上，移動紙條，定出若干點來，如 O_1 。連起這些點來為橢圓。



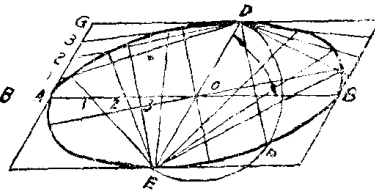
第2.47圖 橢圓規法

(c) 平行四邊形法 (第 2.48 圖及第 2.49 圖)

已知長短軸, 或一對共軛軸(通過中心互相垂直的一對軸)時, 可用此法。過已知軸的兩端, 畫一平行四邊形。分 AO 為任何等分, 再分 AG 為同等分, 從 A 向雙方分別記入數字, 自 D 和 E 分別和各點連起來, 各對應直線的交點, 都在橢圓上。

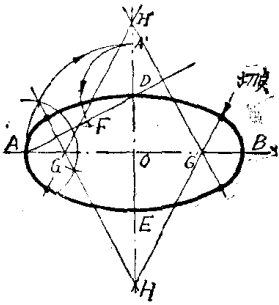


第 2.48 圖 平行四邊形法



第 2.49 圖 平行四邊形法

(d) 近似橢圓的畫法(四心近似法)(第 2.50 圖)



第 2.50 圖 近似橢圓

連 AD 。以 O 為中心, OA 為半徑, 畫圓弧與 OD 的延長線相交於 A' 。再以 D 為中心, $A'D$ 為半徑, 畫圓弧和 AD 直線交在 F 點。畫 AF 的垂直二等分線, 和長軸交在 G 點, 和 DE 的延長線交在 H 點。 G 與 H 為所用圓弧的二中心。利用對稱性, 求出其它二中心 G' 及 H' 。

照圖完成此橢圓, 亦即以 $GA (=G'B)$ 為半徑, G 及 G' 為中心, 分別畫切點間的弧。再以 $HD (=H'E)$ 為半徑, H 及 H' 為中心分別畫弧, 在切點與前二弧相切地接起。

2.34 拋物線的畫法

拋物線是一平面曲線, 為由於自一定點(焦點)及自一定線(準線)永遠保持相等距離的動點所畫成的。

(1) 第一畫法(第 2.51 圖) 已知準線 AB 及焦點 F , 畫軸 CE 與準線 AB 在 C 點垂直。以 F 為中心, CD 為半徑畫圓弧交 DT 於 T 點 T 即為拋物線上的一點。同樣求出若干點連成曲線。