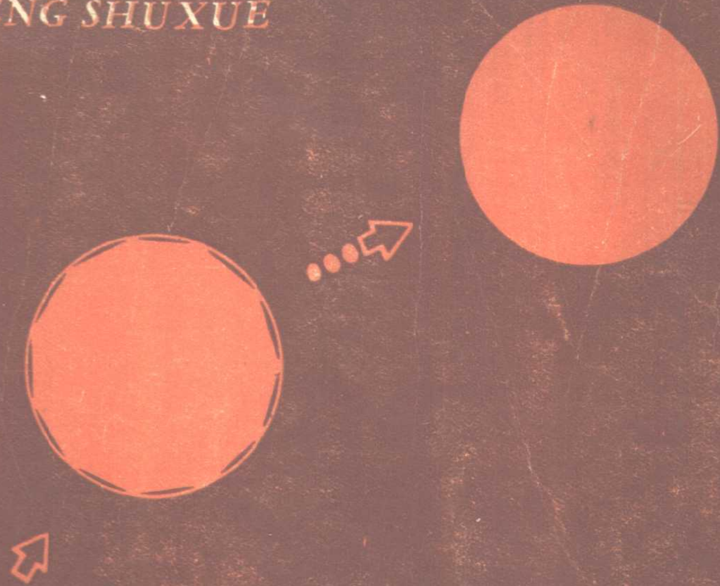
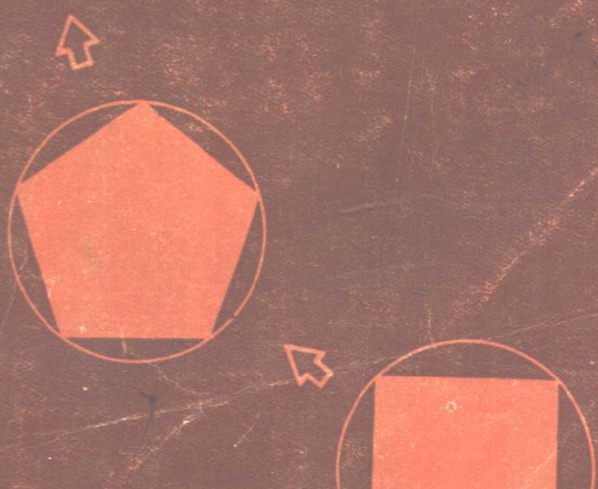
GAODENG SHUXUE



高等学校教材

高等数学

（第二版）上册　南京工学院数学教研组编



高等教育出版社

内容提要

本书是作者参照1980年高等学校工科数学教材编审委员会审订的《高等数学教学大纲》对第一版进行修订的. 全书仍分为上、下两册出版，上册内容在编排上有所调整，将原来下册的级数内容编入本册后合并为六章，包括集合与函数，极限，导数与微分，不定积分与定积分，常微分方程及无穷级数. 内容经修订后也有充实，如增加了柯西收敛准则，一致连续，泰勒公式及一致收敛等小节.

本书上册修订稿仍由任荣祖先生任主审，高等学校工科数学教材编审委员会于1982年扩大会议上审阅后，又委托王福楹编委任复审.

本书可作为高等工科院校各专业师生的高等数学教材，也可作为工程技术人员参考书.

高等学校教材

高等数学

（第二版）

上　册

南京工学院数学教研组 编

*

高等教育出版社出版

新华书店上海发行所发行

上海商务印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 18　字数 433,000

1979年4月第1版

1985年4月第2版　1985年4月第1次印刷

印数 00,001—15,200

书号 13010·01042　　定价 3.65 元

再版前言

本书是根据高等学校工科数学教材编审委员会(简称编委会)的意见,并参考高等数学教学大纲修改而成的. 在修改中,我们吸取了兄弟院校同志和广大读者的宝贵意见以及我院几年来教学实践的经验.

这次修改时,在内容上注意到与中学数学的衔接,精减了一些内容,同时又适当地增加了一些章节,以便能更广泛地适应高等工科专业与理科非数学专业的教学需要, 在方法上力求能使广大读者易于理解,便于自学.

本书与第一版比较, 变动的地方很多. 其中在内容上变动较大的如:在连续函数性质中,增讲了一致连续(标以*号作为选学); 在微分方程一章中, 增讲了二阶常系数线性微分方程的算子法和参数变易法; 在重积分一章中, 增讲了一般换元法; 把行列式从空间解析几何一章中删去, 将场论的有关内容插入曲线积分与曲面积分一章中讲授; 根据编委会的意见, 将第一版中的线性代数与概率论两章抽出另出单行本, 增讲了含参变量积分一章内容. 其它变动的地方,就不一一列举. 全书经过这样修改后, 在系统、内容、方法等方面可能更宜于教学. 在教学中,除星号内容外,如按教学大纲所规定的时数,可教完全书所有内容.

最后,我们对主审任荣祖同志、参加审稿的编委及提过宝贵修改意见的同志们表示衷心地感谢.

由于我们的水平所限,本书一定还存在许多缺点和错误,希望读者批评指正.

编　　者

目　录

第一章 集合与函数

§1-1 集合的概念

集合是现代数学中一个十分重要的概念，这不仅是由于集合论已经发展成为内容极其丰富的一个数学分支，而且由于它已渗透到数学的各个领域，成为现代数学的基础. 因此，我们先来扼要地介绍集合与映射的一些基本知识.

1. 集合的概念

集合是数学中最基本的概念之一. 一般可以把集合了解为具有某种共同性质的一些对象组成的全体. 例如，某班全体学生；某页书中的所有文字；一克水所含有的氧原子；某个已知方程的所有的根；所有的三角函数；正切为 $\sqrt{3}$ 的所有角等都是集合.

我们把组成某一集合的那些对象，叫做这个集合的**元素**，例如，上面所述的一些集合例子中，学生、文字、原子、数、三角函数、角等都分别为相应集合的元素.

习惯上用大写字母 A、B、C 等表示集合，而用小写字母 a、b c 等表示集合的元素. 如果 a 是集合 A 的元素，就记为 $a\in A$，读作“a 属于 A”，否则记为 $a\notin A$，读作“a 不属于 A”.

如果一个集合的元素可以一一列举出来，我们通常用一个花括弧 { } 把这些元素括起来，以表示这个集合，这种方法叫做**列举法**. 例如集合 S 包含 1, 2, 3, 4 这四个数，就可记为

$$S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}.$$

仅含有限多个元素的集合叫做**有限集合**，含有无限多个元素的集合叫做**无限集合**. 例如，由全体自然数 1, 2, 3, … 所组成的集合就是一个无限集合，记为

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}.$$

表示集合的第二种方法是将集合中元素 x 所具有的共同性质 p 写在括号内，这种方法叫做**描述法**. 如果集合 S 是由具有某种已知性质 p 的元素 x 组成，则记为

$$S=\{\text{元素 } x \mid x \text{ 具有性质 } p\},$$

或者省去“元素”两字，简记为

$$S=\{x \mid x \text{ 具有性质 } p\}.$$

例1 全体偶数所构成的集合 E 可记为

$$E=\{x \mid x=2n,\ n\in N\}.$$

其中 N 是全体自然数构成的集合.

例2 xOy 平面上一切平行于直线 $x+y=3$ 的直线 l 所成的集合 A 可记为

$$A=\{\text{直线 } l \mid l \parallel \text{直线 } x+y=3\}.$$

只含一个元素 x 的集合叫做**单元素集**，记为 $\{x\}$. 不含任何元素的集合叫做**空集**，记为 $\emptyset$. 例如，方程 $x^2+1=0$ 的实数解的集合就是一个空集.

2. 子集

定义1 如果集合 A 的每一个元素都属于集合 B，便称 A 为 B 的子集，记为

$$A\subseteq B \quad \text{或} \quad B\supseteq A,$$

读作“A 包含于 B”或“B 包含 A”.

例3 设 B 表示某班全体学生的集合，A 表示该班全体男学生的集合，则 $A\subseteq B$，即 A 为 B 的子集.

由定义 1 可知，任何一个集合 A 是它自己的子集，即 $A\subseteq A$. 空集是任何一个集合 A 的子集，即 $\emptyset\subseteq A$.

易证 给定集合 A、B、C，若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$.

定义1′ 如果集合 A 是集合 B 的子集，而 B 中至少有一个

元素不属于 A，便称 A 是 B 的**真子集**(图 1-1)，记为 $A\subset B$.

在例 3 中，如果 B 中有女学生，那么 A 便是 B 的真子集.

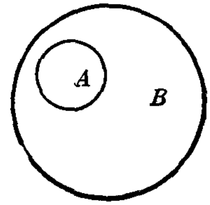


图 1-1

定义 2 设有集合 A 与 B，如果 $A\subseteq B$，$B\subseteq A$，便称 A 与 B 相等，记作

$$A=B.$$

据此定义立即可知，含有相同元素的两个集合相等. 例如，$A=\{2, 3\}$，B 为方程式 $x^2-5x+6=0$ 的根所组成的集合，因 A，B 含有相同元素，故 $A=B$.

又如 $\{1, 2, 3, 4\}=\{3, 1, 2, 4\}=\{1, 4, 3, 2\}$ 等等

在考虑某集合 S 的一切子集时，要注意把 S 本身及空集 $\emptyset$ 都要算在内. 例如，集合 $S=\{0, 1, 2\}$ 的一切子集是

$\emptyset$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, $\{1, 2\}$, $\{0, 1, 2\}$.

这里要注意 0 是一个数，所以 $\{0\}$ 是一个单元素集，而不是空集 $\emptyset$，不能把 $\{0\}$ 和 $\emptyset$ 混为一谈.

3. 区间

设 a, b 为任意两个实数，且 $a<b$. 有下列四种区间：

(1) 满足不等式

$$a<x<b$$

的所有实数 x 的集合

$$I_1=\{x\,|\,a<x<b\}$$

叫做**开区间**，并记为 (a, b) 或 $a<x<b$；

(2) 满足不等式

$$a\leqslant x\leqslant b$$

的所有实数 x 的集合

$$I_2=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$$

叫做**闭区间**，并记为 $[a, b]$ 或 $a\leqslant x\leqslant b$；

(3) 满足不等式

$$a<x\leqslant b$$

的所有实数 x 的集合

$$I_3=\{x|a<x\leqslant b\}$$

叫做**左开区间**，并记为$(a,\ b]$或 $a<x\leqslant b$；

(4) 满足不等式

$$a\leqslant x<b$$

的所有实数 x 的集合

$$I_4=\{x|a\leqslant x<b\}$$

叫做**右开区间**，并记为$[a,\ b)$或 $a\leqslant x<b$.

上述的区间都是有限区间. 除此外，还有无限区间，其意义规定如下：

(1) $(a,\ +\infty)$或 $a<x<+\infty$ 表示集合

$$\{x|x>a\};$$

(2) $(-\infty,\ a)$或 $-\infty<x<a$ 表示集合

$$\{x|x<a\};$$

(3) $(-\infty,\ +\infty)$或 $-\infty<x<+\infty$ 表示全体实数集合 R.

同样可以规定$[a,\ +\infty)$和$(-\infty,\ a]$.

习　题　一

1. 在数轴上给出下列集合的几何表示：

(1) $A=\{x|x^2=9\}$；　　(2) $B=\{x|x+2=4\}$；

(3) $C=\{x|x^2<9\}$；　　(4) $D=\{x|x^2-x-6=0\}$.

2. 在 xOy 平面上给出下列集合的几何表示：

(1) $A=\{$点$(x,\ y)\,|\,1<x^2+y^2<4\}$；

(2) $B=\{$点$(x,\ y)\,|\,2xy=1\}$.

3. 设 $U=\{a,\ b,\ c\}$，下列记法是否正确，为什么？

(1) $a\in U$；　(2) $a\subset U$；　(3) $\{a\}\in U$；　(4) $\{a\}\subset U$.

4. 用集合的记号表示以下各个集合:

(1) 小于 100 的正整数集合;

(2) 圆 $x^2+y^2=1$ 的内部一切点的集合.

§1-2 集合的运算

如同几个实数结合起来(例如通过加法或乘法)可以产生其它的数一样，几个集合也可以按一定的方式结合起来产生其它的集合. 下面介绍集合的几种基本运算——并、交以及差.

1. 集合的并

定义 1 把集合 A 的元素与集合 B 的元素全部集中起来所成的集合，叫做 A 与 B 的并(图 1-2)，记为 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x|x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

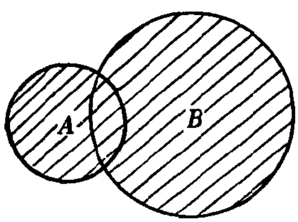


图 1-2

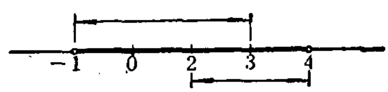


图 1-3

例如，$\{1, 3, 2\}\cup\{6, 3, 4, 2\}=\{1, 2, 3, 4, 6\}$;

$\{1, 3, 2\}\cup\{7, 8, 9\}=\{1, 2, 3, 7, 8, 9\}$;

$(-1, 3)\cup(2, 4)=(-1, 4)$(图 1-3).

很明显，集合的并具有以下简单性质(图 1-2):

(1) $(A\cup B)\supseteq A$;　　(2) $(A\cup B)\supseteq B$.

集合的并的概念可以推广到三个以至更多个集合上去，例如

$\{1, 3, 2\}\cup\{2, 4, 6\}\cup\{9, 7\}=\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9\}$.

2. 集合的交

定义 2 把既属于 A 又属于 B 的元素集中起来所成的集合，叫做 A 与 B 的交(图 1-4)，记为 $A\cap B$，即

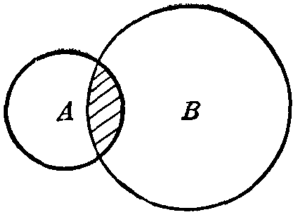


图 1-4

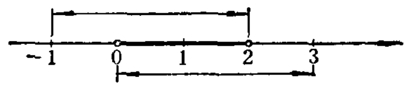


图 1-5

$$A\cap B=\{x\,|\,x\in A,\ \text{同时}\ x\in B\}.$$

例如 $\{1,\ 3,\ 2\}\cap\{2,\ 4,\ 6,\ 1\}=\{1,\ 2\}$;

$[-1,\ 2)\cap(0,\ 3]=(0,\ 2)$(图 1-5).

如果 $A\cap B=\emptyset$, 就说 A, B 不相交. 例如

$$\{2,\ 4,\ 6\}\cap\{5,\ 7\}=\emptyset.$$

很明显,集合的交具有以下简单性质(图 1-4):

(1) $(A\cap B)\subseteq A$; (2) $(A\cap B)\subseteq B$.

3. 集合的差与补集

定义 3 由属于 A 但不属于 B 的元素所组成的集合, 叫做 A 与 B 的差(图 1-6), 记为 $A\backslash B$, 即

$$A\backslash B=\{x\,|\,x\in A\ \text{但}\ x\notin B\}.$$

注意,在差的定义中并没有要求 $B\subseteq A$. 例如

$$\{1,\ 2,\ 4,\ 5\}\backslash\{3,\ 4,\ 5,\ 7\}=\{1,\ 2\};$$

$$[0,\ 2]\backslash[1,\ 3]=[0,\ 1)\text{(图 1-7)}.$$

如果所讨论的集合都是某一集合 U 的子集,则称 U 为全集.

定义 4 如果 A 是全集 U 的子集, 则 U 中不属于 A 的元素

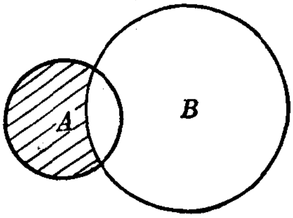


图 1-6

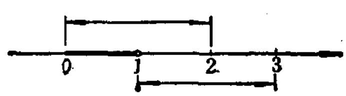


图 1-7

所组成的集合，叫做 A 的**补集**(或余集)，记为 $\overline{A}$，即

$$\overline{A}=U\backslash A.$$

补集具有以下一些性质：

(1) $\overline{(\overline{A})}=A$； (2) $\overline{\emptyset}=U$；

(3) $\overline{U}=\emptyset$； (4) $A\cup\overline{A}=U$；

(5) $A\cap\overline{A}=\emptyset$.

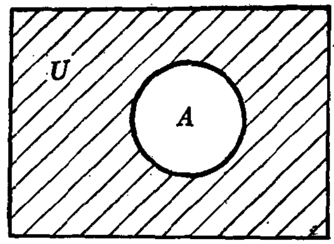


图 1-8

上述这些性质是很明显的，参看图 1-8. 现在从定义出发证明(1)，其余证法类似，请读者自证.

证(1)：设 $x\in\overline{(\overline{A})}$，则 $x\notin\overline{A}$，因此 $x\in A$，故 $\overline{(\overline{A})}\subseteq A$；反之，若 $x\in A$，则 $x\notin\overline{A}$，因此 $x\in\overline{(\overline{A})}$，故 $A\subseteq\overline{(\overline{A})}$. 由 §1-1 定义 2 得 $\overline{(\overline{A})}=A$.

4. 并与交的一些基本性质

(1) 可交换性：

$$A\cup B=B\cup A;$$

$$A\cap B=B\cap A.$$

(2) 可结合性：

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C;$$

$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C.$$

(3) 可分配性：

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

性质(1)、(2)成立是明显的，现就(3)证明如下：

设 $x\in A\cap(B\cup C)$，则 $x\in A$，同时 $x\in(B\cup C)$，因此 $x\in A$ 同时 $x\in B$，或 $x\in A$ 同时 $x\in C$，也就是 $x\in(A\cap B)$ 或 $x\in(A\cap C)$. 即 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$，所以

$$(A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C);$$

另一方面，设 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$，则 $x\in A\cap B$ 或 $x\in A\cap C$，因此 $x\in A$ 同时 $x\in B$，或 $x\in A$ 同时 $x\in C$，也就是 $x\in A$ 同

时 $x\in B\cup C$, 即 $x\in A\cap(B\cup C)$, 所以

$$A\cap(B\cup C)\supseteq(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

由 § 1-1 定义 2, 知性质(3)成立.

5. 德·摩尔根定律

在集合运算中,常遇到所谓德·摩尔根定律. 这个定律的特点是,利用补集把并与交联系起来.

设 A、B 都是全集 U 的子集,则有

$$\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cap\overline{B} \tag{1}$$

$$\overline{(A\cap B)}=\overline{A}\cup\overline{B} \tag{2}$$

这就是德·摩尔根定律. 现证(1)式如下:

设 $x\in\overline{(A\cup B)}$则 $x\notin A\cup B$, 即 $x\notin A$ 同时 $x\notin B$, 即 $x\in\overline{A}$, 同时 $x\in\overline{B}$, 故 $x\in\overline{A}\cap\overline{B}$, 因此$\overline{(A\cup B)}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B}$; 反之,若 $x\in\overline{A}\cap\overline{B}$, 即 $x\in\overline{A}$, 同时 $x\in\overline{B}$, 故 $x\notin A$ 且 $x\notin B$, 所以 $x\notin A\cup B$, 即 $x\in\overline{(A\cup B)}$, 故$(\overline{A}\cap\overline{B})\subseteq\overline{(A\cup B)}$, 于是(1)式成立.

至于(2)式, 可用类似方法加以证明, 但有了(1)式, 读者也可以直接从(1)式推出(2)式.

习 题 二

1. 设 $A=\{a, b, c, d\}$, $B=\{b, c, e, f\}$, $C=\{a, b, d, f, g\}$.

(1) 求 $B\cup C$, $A\cap B$, $A\cap C$, $A\backslash B$;

(2) 验证 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

$A\cup(B\cap C)\neq(A\cup B)\cap C$.

2. 求下列各题集合的并、交与差:

(1) $A=[0, 1]$, $B=[1, 3]$;

(2) $A=[-1, 4]$, $B=[2, 4]$.

3. 证明$\overline{(A\cap B)}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

4. 设 $U=\{a, b, c, d, e, f\}$, $A=\{a, b, c\}$, $B=\{a, c, f\}$,

(1) 求 $\overline{A}$; (2) 求 $\overline{B}$;

(3) 求 $\overline{A}\cup\overline{B}$; (4) 求 $\overline{A}\cap\overline{B}$.

(5) 就 A 与 B 验证德·摩尔根定律.

5. 证明下列关系

(1) $A\cup(A\cap B)=A$;

(2) $A\cap(A\cup B)=A$;

(3) $(A\cup B)\setminus(A\cap B)=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

6. 判断以下命题是否正确,若不正确,举出一个反例:

(1) $(A\cup B)\setminus A=B$;

(2) $(A\cup B)\cap C=A\cup(B\cap C)$;

(3) $(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)=A\cap B\cap C$.

7. 在德·摩尔根定律的(1)式中,分别用 $\overline{A}$、$\overline{B}$ 代替 A、B 证明(2)式.

§1-3 集合的映射概念

定义 1 设有两个集合 A 与 B, f 表示某种确定的对应规律,使得对于每一个元素 $x\in A$, 通过 f 都有唯一的元素 $y\in B$ 与之对应, 便说 f 是由 A 到 B 的**映射**, 记为

$$x\xrightarrow{f}y \quad 或 \quad f(x)=y,$$

y 叫做 x (在 f 下)的**象**, 而 x 叫做 y (在 f)下的**原象**(图 1-9).

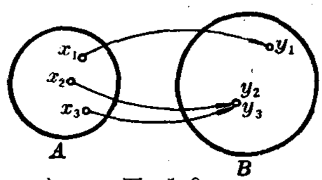


图 1-9

由 A 到 B 的映射 f 也常记为

$$A\xrightarrow{f}B \quad 或 \quad f:A\to B,$$

A 叫做 f 的**定义域**, $B_f=\{y\,|\,y=f(x),\ x\in A\}$ 叫做 f 的**值域**. 显然 $B_f\subseteq B$.

例 1 设 A、B 分别表示某校全体学生及他们的学号所成的集合, f 表示对于 A 中每一个元素(学生)取他的学号的对应规律,则 f 就是一个由 A 到 B 的映射.

例 2 设 T 表示平面上所有三角形的集合, 记号 R_+ 表示所有正实数的集合, f 表示对于 T 中每一个元素(三角形)取它的面积的对应规律,则 f 便是一个由 T 到 R_+ 的映射.

例 3 对于每一个 $x\in R$, 映射

$$x\xrightarrow{f}x^2 \quad 或 \quad f(x)=x^2=y$$

是一个由 R 到 R 的映射.

$x=0$ 的象是 $y=0$; $x=1$, $x=-1$ 的象都是 $y=1$. 反过来, $y=0$ 的原象是 $x=0$; 而 $y=1$ 的原象有两个, 即 $x=1$, $x=-1$. 这个例子说明不同的 x 可以有相同的象.

例 4 对于每一个 $x\in R_+$, 映射

$$x\xrightarrow{f}\lg x \quad 或 \quad f(x)=\lg x$$

是一个由 R_+ 到 R 的映射.

对于定义, 应注意以下几个问题:

(1) 映射是由 A、B、f 三者确定的. 对于两个映射, 即使对应的规律相同, 而 A 不相同, 这两个映射也不同. 例如

$$f(x)=1+x^2 \ (0\leqslant x\leqslant 1), \quad g(x)=1+x^2 \ (0\leqslant x\leqslant 3)$$

是两个不同的映射;

(2) 记号"f"与"$f(x)$"是有区别的, f 表示由 $x(x\in A)$ 产生 $y(y\in B)$ 的对应规律, $f(x)$ 表示在映射 f 下 x 的象 y, 即 $f(x)=y$;

(3) 若 $B_f\subset B$, 便说 f 是由 A 到 B **内的映射**; 或简称**内射**.

若 $B_f=B$, 便说 f 是由 A 到 B **上的映射**, 或说 f 是**映上的**, 或简称**满射**, 如例 1, 例 4.

从例 3 可知, 对于映射 f 虽然 A 中每一个元素 x, 在 B 中都必有唯一的元素与之对应, 但 A 中不同的元素却可以有相同的象, 如果假设 A 中不同的元素在 B 中必有不同的象与之对应, 即若 $x\neq y$, 则 $f(x)\neq f(y)$, 这样的映射称为**单一的**或简称为**单射**.

例 5 设 $A=[-1, 1]$, $B=[0, 1]$, 设 $f: A\to B$ 由 $f(x)=x^2=y$ 所定义, 则 f 是满射, 但不是单射; 若将 A 改为 $[0, 1]$, $B=[0, 2]$, 则上式所确定的 f 是单一的, 但不是映上的; 若 $A=[0,$

1], $B=[0, 1]$, 则 f 既是映上的, 又是单一的.

如果从 A 到 B 的映射既是满射又是单射, 便称映射 $f: A \to B$ 为**一一映射**或**一一对应**. 这时对于 B 中每一个元素 y 都在 A 中有一个原象且只有一个原象, 因此就产生一个由 B 到 A 的映射, 称为 f 的逆映射, 记为 $f^{-1}: B \to A$, 或简记为 f^{-1}.

为了形象地理解映射概念, 我们可以设想 $f(x)=y$ 中的 f 是某一个自动装置, A 看作是输入集合, B 是输出集合, 把 A 中元素 x 送进自动装置 f 的输入端, 则在输出端便有 B 中元素 y 自动输送出来, 此时 y 就是 x 的象 (图 1-10)

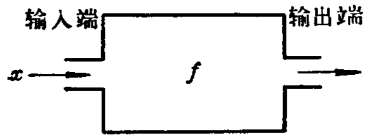


图 1-10

例如, 计算器中的平方装置, 输入一个实数 x, 输出的就是实数 x^2.

习　题　三

1. 为什么说例 3 中的 f 是由 R 到 R 内的映射? 如果 f 改成是由 R 到 R_+° 的映射, 那末是 R 到 R_+° 上的映射呢? 还是由 R 到 R_+° 内的映射呢? ($R_+^\circ = R_+ \cup \{0\}$).

2. 例 2 中的映射是由 T 到 R_+ 的映射, R_+ 中每一个元素有没有原象? 有多少原象?

3. 下列各映射都是由 R 到 R 的映射, 哪些是满射, 哪些是单射, 哪些是一一映射?

(1) $f(x)=2x+5$;　　(2) $f(x)=x^3$;

(3) $f(x)=x^2-1$;　　(4) $f(x)=10^x$;

(5) $f(x)=\sin x$;　　(6) $f(x)=\lg(x^2+1)$.

4. 设 $A=\{a, b, c, d\}$, 一个从 A 到 A 的映射 f 由下列规定给出: $f(a)=a$, $f(b)=c$, $f(c)=a$, $f(d)=a$. 问 A 中每一个元素是否都有原象?

5. 从映射的观点看来, 解方程就是找原象. 试就下列各题加以说明:

(1) $\lg x=2$;　　(2) $x^2+3x-28=0$;

(3) $\sin x=\frac{1}{2}$.

6. 映射 $x \xrightarrow{f} x^2$ 或 $f(x)=x^2$ 是一个由 R 到 R_+° (R_+° 同第 1 题) 的映射，求下列 R_+° 中各个集合的原象(集合的原象是指由集合中每一个元素的原象所成的集合):

(1) $B_1=\{4\}$; (2) $B_2=\{0\}$.

7. 映射 $x \xrightarrow{f} \sin x$ 或 $f(x)=\sin x$ 是一个由 R 到 R 的映射，求下列 R 中的各个集合的原象:

(1) $B_1=\{0\}$; (2) $B_2=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$;

(3) $B_3=\{y \mid -1\leqslant y\leqslant 1\}$.

§1-4 实 数 集

在高等数学中所研究的问题，绝大多数是在实数范围内进行的. 下面简单地介绍一下实数集的一些属性.

1. 自然数与有理数

在人类历史上，由于生产的发展，首先产生了自然数 1, 2, 3, …. 在自然数集 N 中可以进行加法和乘法运算. 由于实践的需要，自然数不够用，继而产生了有理数(正、负整数，正负分数及零)，我们把有理数集合叫做**有理数集**，记为 F，而 F 中每一个元素(有理数都可以表示为 $\frac{p}{q}(q\neq 0)$ 的形式，其中 p、q 是互质(即除 1 之外没有公因数的两个整数. 有理数可以进行四则运算(零不能作除数)，运算的结果，仍然属于 F.

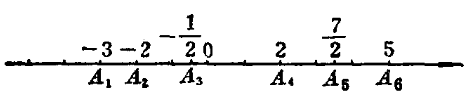


图 1-11

任何一个有理数都可以在数轴上找到一个点代表它，如图 1-11 中的 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 等点分别代表有理数 -3, -2, $-\frac{1}{2}$, 2, $\frac{7}{2}$, 5 等. 我们把代表有理数 x 的点叫做有理点 x.