高等学校试用教材

数学分析

上册

复旦大学数学系 陈传璋 金福临 朱学炎 欧阳光中 编

高等学校试用教材

数学分析

上册

复旦大学数学系 陈传璋 金福临 朱学炎 欧阳光中 编

高等学校试用教材
数　学　分　析
上　册
复旦大学数学系　陈传璋　金福临　朱学炎　欧阳光中　编
*
人民教育出版社出版
新华书店上海发行所发行
人民教育出版社印刷厂印装
*
开本 787×1092 1/32　印张 12　字数 289,000
1979 年 2 月第 1 版　1979 年 7 月第 1 次印刷
印数 1—70,000

前　言

书是以我校数学系主编的《数学分析》上、下册(上海科学技术出版社 1962 年出版)为基础,由原编者① 编写的,仍分上、下两册出版……为综合大学和师范院校数学系的数学分析课教材,也可作为理工科其他有关专业的教学参考书.

按照一九七七年十月理科数学教材会议精神,本书基本上以 220 学时为限度,因而在内容上作了一些精简.但为了适应各校的不同要求和学生的不同水平,本书也编入了一些选学内容(标有"*"的节以及相应的习题).

在内容顺序的安排上,作了较大的变动,主要是把单变量情形多变量情形分开,关于极限理论,虽然极限初论、续论以及多变量情形都安排在第一篇里,但分成独立的三部分,其余各篇也都分成两个部分,这样既可以照顾到一定的系统性,同时又希望在实际教学中便于教师灵活掌握,以适应不同的要求.例如第一篇第二部分极限续论在什么时候讲,至少有两种可供选择的不同方案:一是讲完第一篇第一部分极限初论后,紧接着讲第二篇单变量微分学,然后再讲极限续论和多元函数的极限论;另一种是按本书的章节次序讲.又如第四篇第一部分数项级数和广义积分,既可以按本书次序讲,也可以挪前到单变量微积分学之后,多变量微积分学之前讲.以上所说的各种方案,在复旦大学数学系的实际教学中都曾作过尝试.

参加审查本书的单位有:[illegible]主审),四川大学,北京师范大学,云南大学,内蒙古大[illegible]范学院,江苏师范学院.参

① 原编者胡家赣同志已调离复旦大学,此次未参加编写.

加审稿的同志对本书进行了认真的审阅，提出了许多宝贵的

我们表示衷心的感谢.

由于我们水平有限，编写时间又较匆促，一定还存在不少缺点和错误，殷切期待读者给予批评指正.

编　者

一九七八年十二月

目　录

第一篇　极　限　论

第一部分　极限初论

第二部分 极限续论

第三章 关于实数的基本定理及闭区间上连续函数性质的证明

第一篇　极　限　论

第一部分　极 限 初 论

第一章　变 量 与 函 数

§1. 函 数 的 概 念

一、变量

我们在观察各种自然现象或研究实际问题的时候，会遇到许多的量，这些量一般可分为两种：一种是在我们所考察的过程中保持不变的量，这种量称为常量．还有一种是在这一过程中会起变化的量，称为变量．例如，自由落体的下降时间和下降距离是变量，而落体的质量在这一过程中可以看为常量，再如将一密封容器内的气体加热，气体的体积和分子数目显然是常量，而气体的温度和压力是变量．高等数学的研究对象是变量．在数学上，我们常抽去变量或常量的具体意义来研究某一过程中这些量在数值上的关系．但尽管如此，在研究过程中有时还是需要注意它们的具体意义．

这些量，例如时间、质量、压力、温度、分子数等，都可以用实数来表示，所以应该称它们为实变量或实常量．本书的研究对象都是实变量和实常量．也简称它们为变量和常量．

在中学代数里已经知道，实数包括有理数和无理数两种．所

有整数、所有分数统称为有理数．换句话说，凡能表示为$\frac{p}{q}$（这里p，q为整数，$q>0$，并设p和q无公因子）形式的数就是有理数．除了这种形式的数以外，还存在着不能表示为上述形式的数，如$\sqrt{2}$，圆周率π等等，称为无理数．关于实数的严密理论，这里不叙述了，仅列举如下几个重要性质，提请读者注意：

（i）实数和直线上的点有着一一对应的关系，并称这条直线为实数轴．今后我们将经常利用实数轴上的点来表示实数，而把点和实数统一起来，不加区别．

（ii）有理数在实数中是稠密的，也就是说，在任何两个不同的实数之间必存在着有理数．同样无理数也是稠密的，在任何两个不同的实数之间也必存在着无理数．

（iii）有理数与有理数的和或差仍为有理数．有理数与无理数的和或差为无理数．无理数与无理数的和或差可能仍为无理数，也可能为有理数．

在观察各种运动过程的时候，我们还发现，有些变量具有一定的变化范围．例如自由落体的下降时间和距离只有在落体落到地面以前才有意义．

变量的变化范围，也就是变量的取值范围，在取实数值的时候，我们往往用区间表示：设a，b是有限数，$a<b$，所有满足不等式$a\leq x\leq b$的x的全体组成一个闭区间，记为$[a, b]$，也可以说：变量x的变化范围为闭区间$[a, b]$．所有满足不等式$a<x<b$的x的全体组成开区间(a, b)．而所有满足不等式$a<x\leq b$或$a\leq x<b$的x的全体组成半开半闭的区间$(a, b]$或$[a, b)$；如果变量x能够取实数轴上所有的数，我们把它的变化范围记为$(-\infty, +\infty)$，在这里"∞"并不表示数量，它只不过是一个记号，前面的"$+$"，"$-$"表示方向．有时候，在并不一定要指明是开的或闭的场

合，我们也常用 X，Y 等来表示区间.

二、函数

在同一现象所碰到的各种变量中，通常并不都是独立变化的. 它们之间存在着依赖关系，我们考察几个具体例子：

1．自由落体运动的规律. 根据自由落体公式

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

这里 s 表示下降距离，t 表示时间，g 是重力加速度. 这个公式指出了在物体自由降落的过程中，距离 s 和时间 t 之间的依赖关系.

2．用一块边长为 a 的正方形铁皮作为一个高为 x 的无盖小盒（图 1-1）.

在这盒的容积 V 和高 x 之间存在着依赖关系：

$$V=x(a-2x)^2$$

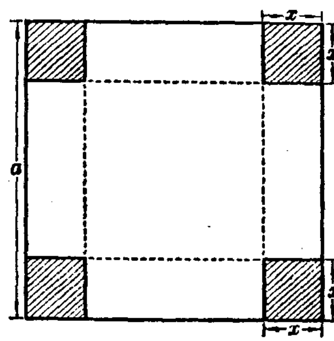

图 1-1

3．在中学的数学课程中，已经讲到过许多有用的函数，例如线性函数 $y=ax+b$，（其中 a，b 都是常数），又如 $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$，$y=5\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 等三角函数以及对数函数和指数函数 $y=\lg(1+x)$，$y=2^x$ 等等，它们给出了变量 x 和变量 y 之间的依赖关系.

在以上这些依赖关系中，我们看到一些共同的特征：

（i）在这些变量中，有些量称为**自变量**，如时间 t，盒高 x 以及 3. 中的 x 等，它们并有一定的变化范围. 例如 1. 中的时间 t，在这个运动过程中，如果我们把物体刚开始下落的时刻记为 $t=0$，把物体刚到达地面的时刻记为 $t=T$，那么时间 t 的变化范围

只能是在 0 与 T 之间，即 t 的变化范围是闭区间 $[0, T]$．又如 3．中的函数 $y=\lg(1+x)$，从对数函数的特性容易知道，自变量 x 的变化范围只能是 $x>-1$，即 x 的范围是 $(-1, +\infty)$，再如 $y=5\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，从余弦函数的特性知道 x 的变化范围是 $(-\infty, +\infty)$．

在依赖关系中，还有一些量是随着自变量的变化而起变化的，称为因变量，如落体下降距离 s，盒的容积 V，3．中的 y，它们也有一定的变化范围．在某一过程中，哪个变量是自变量或因变量并不是绝对的，例如在自由落体公式中，如果我们已经知道下降距离为 s 而要求出经过了多少时间，这时就视距离 s 为自变量，而

$$t=\sqrt{\frac{2s}{g}}$$

时间 t 就成为因变量了．

（ii）对自变量的变化范围内的每一个确定的值，通过依赖关系，总能得到一个确定的并且唯一的因变量的值．

把这种特征抽象出来，便得到函数的概念：

函数的定义　如果对某个范围 X 内的每一个实数 x，可以按

[illegible]，我们就

[illegible]为 $f(x)$，

[illegible] y 是 x 的象，称 x 是 y 的一个逆象．用数学记号把这件事表达出来就是：

$$f:\ X \to Y$$

$$x \mapsto f(x)$$

这个记号有两层意思：(i)它表明通过函数 f 的作用，把整个 X 变到 Y 里面去，我们用记号 $X \to Y$ 来表示这一层意思．(ii)对 X 内每一个实数 x，在 f 的作用下，变为 Y 内的唯一一个实数 y，记作

$f(x)$，或者说，在 f 的作用下，x 的象是 $f(x)$，也可以说 f 在 x 的函数值是 $f(x)$，我们用记号 $x \mapsto f(x)$ 来表示它．

我们并称 x 是自变量，y 是因变量，又称 X 是函数 f 的**定义域**，它表示对 X 内的任何实数 x，在 f 的作用下是有意义的，简单地说，$f(x)$ 是有意义的．当 x 遍取 X 内的所有实数时，相应的函数值 $f(x)$ 的全体所组成的范围叫做函数 f 的**值域**，要注意的是：值域并不一定就是 Y，它当然不会比 Y 大，但它可能比 Y 小．

例 1 中学里已经学过的正弦函数 f，用上述的记号写出来就是：（设 $X=Y=(-\infty, +\infty)$）

$$f:\ X \to Y$$

$$x \mapsto y=\sin x$$

它表示有一个函数 f，它把所有实数变成另一些实数，并且把每一个具体的实数 x 变成实数 $\sin x$，这个 $\sin x$ 就是函数 f 在 x 点的函数值．这时，f 的定义域是 $X=(-\infty, +\infty)$，而值域是 $[-1, -1]$，它比 Y 小．

例 2 设 $X=(0, +\infty)$，$Y=(-\infty, +\infty)$

$$\varphi:\ X \to Y$$

$$x \mapsto y=\lg x$$

它表示有一个函数 φ，把 $(0, +\infty)$ 内的实数变成另一些实数，对每一个正的实数 x，φ 在 x 点的函数值是 $y=\lg x$，这就是我们所熟习的对数函数，它的定义域是 X，值域是 $(-\infty, +\infty)$，值域等于 Y．

在通常的数学分析或微积分的课本中，为了省略，而略去上面所写的那些记号，干脆把函数 f：$X \to Y$，$x \mapsto y=f(x)$ 简单地记为 $f(x)$，或 $y=f(x)$，例如函数 $y=\sin x$，函数 $y=\lg x$ 等等，而不把它们写成刚才所写的那种形式，以后我们就用这种省略的写法，但要请读者注意的是：这仅仅是一种省略而已．

例3 函数

$$f(x)=\sqrt{\sin x}$$

只有当根号内的 $\sin x$ 非负时，这个函数才有意义，可见它的定义域为 $[2n\pi,\ (2n+1)\pi]$ $(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$，函数的值域为 $[0,\ 1]$.

特别地，当 $x=0$ 时，函数值是 0，即 $f(0)=0$，相仿地还有

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{\sin\frac{\pi}{2}}=1,\quad f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

把这个函数用定义中的记号写出来就是，设 X 是由区间 $[2n\pi,\ (2n+1)\pi]$ $(n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$ 所组成的，$Y=(-\infty,\ +\infty)$。

$$f:\ X\to Y$$
$$x\mapsto\sqrt{\sin x}$$

f 的定义域是 X，值域是 $[0,\ 1]$.

例4 函数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}$$

的定义域为满足下列不等式的全部 x 值：

$$x^2-x-2=(x-2)(x+1)>0$$

解之得 $x>2$ 和 $x<-1$，这就是定义域．如果用区间来表示，定义域为 $(-\infty,\ -1)$，$(2,\ +\infty)$．函数的值域为 $(0,\ +\infty)$．特别地有：

$$f(4)=\frac{1}{\sqrt{10}},\quad f(-2)=\frac{1}{2}$$

例5 设 $f:\ (a,\ b)\to(-\infty,\ +\infty)$

$$x\mapsto C\text{（常数）}$$

即对 $(a,\ b)$ 内的任何 x，都有 $f(x)=C$．它是一个在其定义域内取常数值的函数．

设有两个函数 f 和 g，何谓 f 和 g 相等呢？这是指：(i) 它们有

相同的定义域 X，(ii)对 X 内的每一个实数 x，它们有相同的函数值，即 $f(x)=g(x)$，这时，我们就说函数 f 和函数 g 相等，显然，它们的值域也必相同.

例 6 设有两个函数

$$y=\sin x \quad 和 \quad y=\frac{x\sin x}{x}$$

这时，前者的定义域为$(-\infty, +\infty)$；后者的定义域为$(-\infty, 0)$和$(0, +\infty)$．实际上第二个函数也就是：

$$y=\begin{cases}\sin x, & 当\ x\neq 0\ 时\\ 无定义, & 当\ x=0\ 时\end{cases}$$

因此，这两个函数并非相等的，因为它们的定义域不一样.

还应该注意的是，在函数概念中，并没有表明变量间的函数关系非得用一个公式来表达不可．事实上，例如火车时刻表，出站和进站的车次都是时间的函数，但它一般不用公式来表达，而是用列表的方法来表示这种函数关系．气象站中的温度记录器，记录了空气、温度与时间的一种函数关系，这种关系既不用一个公式来表达，也不用列表法来表达，而是借助仪器自动描绘在纸带上的一条连续不断的曲线来表达的．再如一个常用的函数关系(例 7)，它是用一句话来表示出 x 和 y 之间的依赖关系的.

例 7 “y 是 x 的最大整数部分”，这句话的意思是说，对任何一个实数 x，y 是小于或等于 x 的最大整数．这句话能不能确定一个函数关系呢？现在我们考察一下：因为对于任何实数 x，总可以把它表示为一个整数和一个非负小数之和，也就是：

$$x=[x]+(x)$$

这里$[x]$是一个整数，(x)是一个非负小数，$0\leqq(x)<1$，例如当 $x=\frac{7}{2}$ 时，$[x]=3$，$(x)=0.5$，而当 $x=-2.41$时，$[x]=-3$，$(x)=0.59$.

容易看出，$[x]$就是x的最大整数部分，它由x唯一确定．换句话说，对任何一个实数x，总有唯一的一个$y=[x]$和这个x对应．因而“y是x的最大整数部分”，这句话确定了一个函数f：

$$f:\ X=(-\infty,\ +\infty)\to Y=(-\infty,\ +\infty)$$
$$x\mapsto[x]$$

f的值域是一切整数．今后，我们记这个函数为(图1-2)

$$y=[x]$$

例如，当$x=2.17$时，

$$y=[2.17]=2$$

当$x=-3.91$时，

$$y=[-3.91]=-4$$

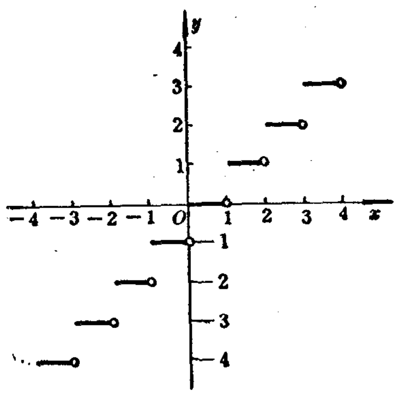

图 1-2

在具体问题中，函数的形式是各种各样的．自由落体的公式是一种形式，火车时刻表是一种形式，而圆的方程

$$x^2+y^2-1=0$$

又是一种形式，在这个方程中，虽然变量y并没有用仅含有变量x的明确公式表示出来，但我们确实知道，只要解这个方程就可以得到：

$$y=\sqrt{1-x^2}, \qquad \text{当 } y\geqq 0 \text{ 时}$$

或

$$y=-\sqrt{1-x^2}, \qquad \text{当 } y<0 \text{ 时}$$

也就是说，方程

$$x^2+y^2=1$$

能够在 $y\geqq 0$ 或 $y<0$ 的时候确定 y 是 x 的函数. 对于圆的方程而言，这是很容易看出来的，但也有不是那么很容易看出来的方程. 例如开普勒(Kepler)方程

$$y-x-\varepsilon\sin y=0$$

(这里 ε 为常数，$0<\varepsilon<1$). 在这方程中甚至不可能将 y 用 x 的 "显公式表示出来. 尽管如此，我们以后将会知道 y 确是 x 的函数. 一般说，凡是能够由方程

$$F(x, y)=0$$

确定的函数关系，称为**隐函数**. 开普勒方程就确定一个隐函数. 需要注意的是：随便写一个方程并不一定就是一个隐函数. 究竟在什么条件下能够由一个方程来确定一个隐函数呢？这将在第三篇的隐函数存在定理中专门讨论. 隐函数的理论在微分方程和几何学中有重要应用.

三、函数的一些几何特性

关于函数还有几个常用的概念必须叙述一下，这些概念都和函数图形的特性有关，例如单调函数、奇函数、偶函数、周期函数. 其中有些概念在中学课程里已经叙述过，因此，这里只是简单地提一下.

1. 单调函数 如果对于某区间 X 内的任何两点 $x_1<x_2$，总成立着 $f(x_1)\leqq f(x_2)$ (或 $f(x_1)\geqq f(x_2)$)，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 X 内为**单调增加**(或**单调减少**)，有时亦称**单调上升**(或**单调下降**). 如果等号恒不成立，则称为**严格单调增加**(或减少)，它们的图形如图 1-3.

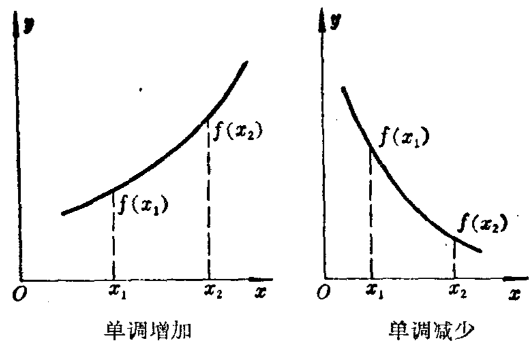

图 1-3

如何判断一个函数是否单调呢？这可以利用我们已经熟悉的函数图形从直观上来加以考察，也可以利用单调的定义证明不等式成立，但这样做，往往不容易，在本书第二篇一元函数微分学的应用中，将给出判断函数是否单调的一种相当有效而又简便的方法．

2．奇函数和偶函数 如果$f(x)$的定义域为$(-a, a)$（这里$a>0$），并且对定义域内的任何x，满足$f(-x)=-f(x)$，就称$f(x)$为**奇函数**，它的图形关于原点对称（图 1-4），如果对定义域内的任何x，$f(x)$满足$f(-x)=f(x)$，就称它为**偶函数**，它的图形关于y轴对称（图 1-4）．例如$y=x^n$，当n为奇数时为奇函数，当n为偶数时为偶函数．这正是奇函数、偶函数名称的由来．

3．周期函数 凡成立着等式$f(x+\omega)=f(x)$的函数（这里

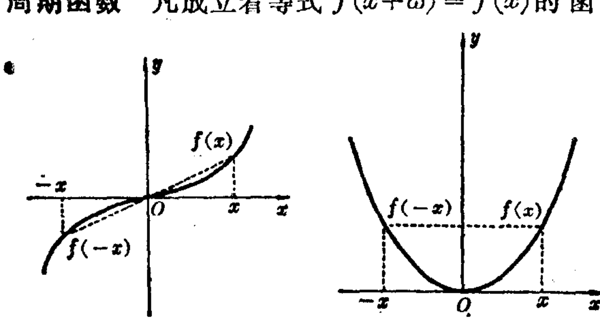

图 1-4