★ 工程数学丛书

数学物理方程与特殊函数

Equations of Mathematical Physics and Special Functions

$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$

● 华中理工大学数学系

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\varphi^{\mu}\cos\left(\frac{\pi\mu}{4}\right)}{\mu!^2(\mu^2+\kappa)(\mu^2-\lambda)} = A$$

$$\int_0^{\infty} \mathrm{Ai}(x)^2\,\mathrm{Ai}(-x)^2\,dx = \frac{1}{24\pi}$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

$$r(A+B) \leqslant r(A) + r(B)$$

$$AX = \lambda X$$

CHEP
高等教育出版社

Springer
施普林格出版社

$$\int_0^1 \frac{\sin^{-1}(x)^5}{x}\,dx = \frac{\pi}{64}\left(2\pi^4\log(2) - 30\pi^2\zeta(3) + 225\zeta(5)\right)$$

工程数学丛书

数学物理方程与特殊函数

华中理工大学数学系

孙金海　编

CHEP
高等教育出版社

Springer
施普林格出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方程与特殊函数/华中理工大学数学系.—北京:高等教育出版社;海德堡:施普林格出版社,2001.8
(工程数学丛书)
理工科本科生各专业、非数学专业用
ISBN 7-04-010327-3

Ⅰ.数… Ⅱ.华… Ⅲ.①数学物理方程-高等学校-教材 ②特殊函数-高等学校-教材 Ⅳ.0411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 058461 号

责任编辑:徐 可 **封面设计**:李卫青
版式设计:杨 明 **责任印制**:陈伟光

数学物理方程与特殊函数
华中理工大学数学系

出版发行	高等教育出版社 施普林格出版社		
社 址	北京市东城区沙滩后街 55 号	**邮政编码**	100009
电 话	010-64054588	**传 真**	010-64014048
网 址	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn		
经 销	新华书店北京发行所		
印 刷	北京民族印刷厂		
开 本	880×1230 1/32	**版 次**	2001 年 8 月第 1 版
印 张	5.5	**印 次**	2001 年 8 月第 1 次印刷
字 数	160 000	**定 价**	10.00 元

责任编辑　徐　可
封面设计　李卫青
责任印制　陈伟光

序

在高等学校理工科专业的数学教育体系中,"工程数学"一直是属于具有重要地位的课程系列。当前,革新之风正吹遍高等教育界;课程重组、内容改造与学时调整的呼声日益高涨。在此形势下,工程数学课程经受了严峻的考验,它作为学习现代科学技术所不可缺少的重要基础课,其地位丝毫没有动摇。

然而,这绝不意味着现存的"工程数学"课程体系已经完美无缺;更不意味着数学教育界除了墨守成规之外别无所为。恰好相反,面对现代科学技术飞速发展的形势,面对教育界对数学训练质量的愈来愈高的期待,数学工作者革新"工程数学"课程的任务更为紧迫!正是意识到时代的需要与自己的职责,我们全力推出这套"工程数学"教材呈献给读者。

华中理工大学数学系几十年来一直在组织力量探索"工程数学"课程的新的内容体系与教学方法,先后编写了百余万字的教材与讲义,在多年使用过程中不断提炼,逐步趋于完善。应该说,本套教材正是这一长期探索过程的产物,它凝结了华中理工大学数学系几代教师的心血。当然,具体执笔的教师对教材的最终成型作出了决定性的贡献。

本套教材先分《线性代数》、《概率论与数理统计》、《计算方法》、《复变函数与积分变换》和《数学物理方程与特殊函数》五册出版。编者在取材上充分考虑到新世纪对科技人员数学知识的要求;在内容处理上力求联系理工科专业的实际需要,注重培养学生的基本运算能力、分析问题与解决问题的能力;在表述上力求清晰易读,便于教学与自学。本套教材配备了较丰富的例题与习题,它们大多源于教师在自身教学中的积累,既具有明显的启发性,又具有典型的应用意义。书末所附的习题答案与提示供教师与学生在教学中参考。本套教材可供高等学校理工科各专业(非数学)使用。

本套教材的编写自始至终得到华中理工大学教务处及数学系的支

持，也得到华中理工大学数学系全体教师的协助与鼓励。高等教育出版社 CHEP-Springer 编辑室的宝贵支持，使本套教材得以顺利出版。对此，我们一并表示衷心的感谢。

刘次华

2001 年 7 月于武汉

前　　言

在数学物理中研究各种物理过程，当研究像弹性体的振动、电磁波的传播、热的传导、粒子的扩散等物理过程和状态时，就归结出一些偏微分方程．由于这些方程是来自物理学、力学与工程技术问题中，所以就称为数学物理方程．数学物理方程是高等工业学校有关专业的一门基础课，通过本课程的学习，使学生获得有关偏微分方程的一些基本概念，掌握三个典型方程定解问题的解法，了解贝塞尔函数及勒让德多项式的一些基本知识与应用，为学习后继课程和进一步扩大数学知识面提供必要的数学基础．

编　者

2001 年 7 月于武汉

目　录

第一章　典型方程与定解条件

本章将从几个不同的物理模型出发，建立数学物理中的三类典型方程；并根据系统的边界所处的物理条件及系统的初始状态列出定解条件；尔后提出相应的定解问题．

为了建立方程，首先需要选定某个作为过程表征的物理量 u；例如在研究某个系统的振动过程时，我们就选取系统中各处的位移，当研究某个系统的传热过程时，自然就选取系统中各处的温度等等，其次从所研究的系统中任取一小部分，分析邻近部分与这个小部分的相互作用，通过物理量 u 以算式表达这个作用，并将算式适当整理与简化，那就是数学物理方程了．由于方程是邻近时间邻近点之间的联系，所以在建立方程时完全不必管边界上的物理条件和系统的初始状态．因此同一类物理过程，不论其具体条件如何的不同，都具有同样的数学物理方程．

§1.1　弦振动方程与定解条件

§1.1.1　弦的微小横振动方程

设有一根拉紧其长度为 l 的柔软的均匀弦．柔软的含义是：发生于弦中的张力的方向，总是沿着弦的瞬时侧影的切线方向．这条件表示弦不抵抗弯曲．由于弦被拉紧，弦上出现张力，因此弦就呈直线形状而静止，一旦弦上有任何一部分不是直线形状或不静止，由于张力的作用弦就开始振动．我们研究弦作微小横振动的规律．由于弦中的张力很大，以至于重力对弦的作用可以忽略不计．

为了导出弦的横振动方程，选择如图 1.1 所示的坐标系，弦的平衡位置为 x 轴，两端分别固定在 $x=0$ 及 $x=l$ 处．所谓横振动是指弦的运动发生在同一平面内，且弦上各点沿着垂直于 x 轴的方向移动．所谓微小指的是弦振动的幅度及弦上任意点切线的倾角都很小．设$u(x,t)$

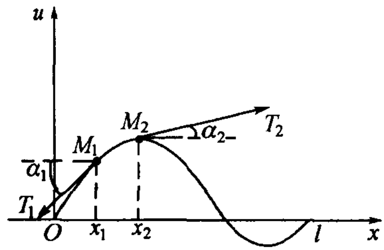

图 1.1

是弦上横坐标为 x 的点在时刻 t 时的位移.

我们首先证明张力为常数,为此在弦上任取一小段弧 $\overset{\frown}{M_1M_2}$,它的长度假定为 Δs,并且

$$\Delta s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + u_x^2}\,\mathrm{d}x,$$

其中 $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$. 由假定,弦只作微小振动,$(u_x)^2$ 与 1 相比可以忽略不计,从而 $\Delta s \approx x_2 - x_1$. 这样我们可以认为这段弦在振动过程中并未伸长,因此由胡克(Hooke)定律知道,弦上每一点所受张力在运动过程中保持不变,即张力与时间无关. 我们分别把在点 M_1, M_2 处的张力记作 T_1 和 T_2,由前所述知它们的方向分别是沿着弦在点 M_1 和 M_2 处的切线方向. 由假定弦只作横向振动,因此张力在 x 轴方向分量的代数和为零,即有

$$T_2 \cos \alpha_2 - T_1 \cos \alpha_1 = 0,$$

这里的 α_1 和 α_2 是曲线 $u(x,t)$ 的切线与 x 轴所成之角. 对于微小振动,$\alpha_1 \approx 0, \alpha_2 \approx 0$, 所以 $\cos \alpha_1 \approx 1, \cos \alpha_2 \approx 1$, 于是上式可写成 $T_2 = T_1$. 这就是说,张力也不随地点而异,综上所述,知张力是常数,以 T_0 记之.

现在来导出弦的横振动方程. 张力在 u 轴方向分量的代数和为

$$T_0 \sin \alpha_2 - T_0 \sin \alpha_1 = T_0(\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1).$$

对于小振动,有 $\sin\alpha_2 \approx \operatorname{tg}\alpha_2 = \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_2}$, $\sin\alpha_1 \approx \operatorname{tg}\alpha_1 = \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_1}$;应用微分中值定理上式可化成

$$T_0\left[\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_2} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x_1}\right] = T_0\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\xi}(x_2 - x_1)\ (x_1 < \xi < x_2).$$

设弦的线性密度为 ρ,由于弦段 (x_1, x_2) 很小,其上每点的加速度相差也不会太大,因此可用其中任一点 η 处的加速度 $\left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{\eta}$ 代替,于是该小段弦的质量与加速度的乘积为

$$\rho(x_2 - x_1)\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{\eta}(x_1 < \eta < x_2).$$

当弦不受外力作用时,应用牛顿(Newton)第二定律,得

$$\rho\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{\eta}(x_2 - x_1) = T_0\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\xi}(x_2 - x_1). \tag{1.1}$$

消去 $x_2 - x_1$,并令 $x_2 \to x_1$,上式化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1.2}$$

其中 $a^2 = T_0/\rho$. 这个方程称为弦的**自由横振动方程**.

若还有外力作用到弦上,其方向垂直于 x 轴,设其力密度为 $F(x,t)$,由于弦段 (x_1, x_2) 很小,其上各点处的外力近似相等,因此作用在该段上的外力近似地等于

$$F(\zeta, t)(x_2 - x_1)\ (x_1 < \zeta < x_2).$$

这样一来,方程(1.1)的右端还应添上这一项,于是得平衡方程

$$\rho\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{\eta}(x_2 - x_1) = T_0\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\xi}(x_2 - x_1) + F(\zeta, t)(x_2 - x_1).$$

消去 $x_2 - x_1$,并令 $x_2 \to x_1$,则得弦的**强迫横振动方程**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \tag{1.3}$$

其中 $f(x,t) = F(x,t)/\rho$.

弦振动方程中只含有两个自变量 x 和 t,其中 t 表示时间,x 表示位置. 由于它们描述的是弦的振动或波动现象,因而又称它为**一维波动**

方程.类似地可导出**二维波动方程**(例如薄膜振动)和**三维波动方程**(例如电磁波、声波的传播),它们的形式分别为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t), \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t). \tag{1.5}$$

均匀杆的纵振动问题,有一均匀杆,只要杆中任一小段有纵向位移或速度,必定导致邻段的压缩或伸长,这种伸缩传开去,就有纵波沿着杆传播了.以 $u(x,t)$ 表杆上各点的纵向位移,则杆的纵振动方程和弦的横振动方程一模一样,完全不同的物理过程中的规律,用数学表达出来竟是一样的!不同的是 $a^2=E/\rho$,E 为杨氏模量,ρ 为杆的密度.

§1.1.2　定解条件

对于一个确定的物理过程,仅由表征该过程的物理量 u 所满足的方程还是不够的,还要附加一定的条件,这些条件应该恰恰足以说明系统的初始状态以及边界上的物理情况,所提出的具体条件多了不行,少了也不行.

先谈初始条件.表征某过程"初始"时刻状态的条件称为**初始条件**.对于弦振动问题来说,初始条件指的是弦在"初始"时刻的位移和速度.若以 $\varphi(x)$,$\psi(x)$ 分别表示弦的初位移和初速度,则初始条件可以表达为

$$\begin{cases} u\big|_{t=0}=\varphi(x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x). \end{cases} \tag{1.6}$$

再谈边界条件.表征某过程的物理量在系统的边界上所满足的物理条件称为**边界条件**.常见而又比较简单的边界条件有三种基本类型,对于弦振动问题而言.

弦的一端(例如 $x=0$)的运动规律已知,若以 $\mu_1(t)$ 表示其运动规律,则边界条件可以表达为

$$u\big|_{x=0}=\mu_1(t); \tag{1.7}$$

若 $x = 0$ 端被固定,则相应的边界条件为

$$u\big|_{x=0} = 0.$$

像(1.7)这种类型的边界条件称为**第一类边界条件**.

若弦的一端(例如 $x = 0$)在垂直于 x 轴的直线上自由滑动,且不受到垂直方向的外力,这种边界称为**自由边界**.根据边界微元右端的张力沿垂直方向的分量是 $T_0\dfrac{\partial u}{\partial x}$,得出在自由边界时应成立

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} = 0.$$

若边界张力沿垂直方向的分量是 t 的一个已知函数,则相应的边界条件为

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \mu_2(t). \tag{1.8}$$

这种类型的边界条件称为**第二类边界条件**.

若将弦的一端(例如,$x = l$)固定在弹性支承上,并且弹性支承的伸缩符合胡克定律.如果支承的位置为 $u = 0$,则 u 在端点的值表示支承在该点的伸长.弦对支承拉力的垂直方向分量为 $-T_0\dfrac{\partial u}{\partial x}$,由胡克定律得

$$-T_0\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l} = ku\big|_{x=l}.$$

因此在弹性支承的情形,边界条件归结为

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u\right)\bigg|_{x=l} = 0,$$

其中 $\alpha = k/T_0$ 是已知正数.在数学中也可以考虑更普遍的边界条件

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u\right)\bigg|_{x=l} = \mu_3(t), \tag{1.9}$$

其中 $\mu_3(t)$ 是 t 的已知函数,这种边界条件称为**第三类边界条件**.

边界条件与初始条件总称为**定解条件**.

边界条件(1.7)、(1.8)、(1.9)称为**非齐次边界条件**.若等式右端的已知函数 $\mu_i(t)(i = 1,2,3)$ 恒为零,则称为**齐次边界条件**.

§1.2　热传导方程与定解条件

§1.2.1　方程的导出

众所周知,如果空间某物体 G 内各点处的温度不同,则热量就从温度较高的点处向温度较低的点处流动,这种现象就是热传导.现在我们就来考察 G 内的热传导问题.我们用函数 $u(x,y,z,t)$ 表示物体 G 在位置 (x,y,z) 处及时刻 t 的温度.

热的传播按傅里叶(Fourier)实验定律进行:物体在无穷小时段 $\mathrm{d}t$ 内流过一个无穷小面积 $\mathrm{d}S$ 的热量 $\mathrm{d}Q$ 与物体温度沿曲面 $\mathrm{d}S$ 法线方向的方向导数 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 成正比,即

$$\mathrm{d}Q = -k(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t, \tag{1.10}$$

其中 $k(x,y,z)$ 称为物体在点 (x,y,z) 处的热传导系数,它取正值.当物体为均匀且各向同性时,k 为常数,n 为曲面 $\mathrm{d}S$ 沿热流方向的法线.

为了导出温度 u 所满足的方程,在物体 G 内任取一闭曲面 Γ,它所包围的区域记作 Ω,则从时刻 t_1 到时刻 t_2 经过曲面 Γ 流入区域 Ω 的热量为

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2}\left[\iint_{\Gamma} k\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S\right]\mathrm{d}t, \tag{1.11}$$

其中 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 表示 u 对曲面的外法向导数.

流入的热量使区域 Ω 内部的温度发生变化,在时间间隔 (t_1,t_2) 中物体温度从 $u(x,y,z,t_1)$ 变化到 $u(x,y,z,t_2)$ 所需要的热量为

$$Q_2 = \iiint_{\Omega} c(x,y,z)\rho(x,y,z)\left[u(x,y,z,t_2) - u(x,y,z,t_1)\right]\mathrm{d}v, \tag{1.12}$$

其中 c 为物体的比热,ρ 为物体的密度.

如果所考察的物体内部没有热源,由于热量守恒,$Q_2 = Q_1$ 成立,

即

$$\iiint\limits_{\Omega} c\rho[u(x,y,z,t_2)-u(x,y,z,t_1)]\,\mathrm{d}v$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\left[\iint\limits_{\Gamma} k\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S\right]\mathrm{d}t. \tag{1.13}$$

今设函数 u 关于变量 x,y,z 具有二阶连续偏导数,关于变量 t 具有一阶连续偏导数,利用奥 - 高公式,Q_1 可化为

$$Q_1=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iiint\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]\mathrm{d}v\right\}\mathrm{d}t;$$

而 Q_2 可化为

$$Q_2=\iiint\limits_{\Omega} c\rho\left(\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}v=\int_{t_1}^{t_2}\left(\iiint\limits_{\Omega} c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}t,$$

因此(1.13) 化为

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iiint\limits_{\Omega}\left[c\rho\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]\mathrm{d}v\right\}\mathrm{d}t=0.$$

由于 t_1,t_2 与区域 Ω 都是任意取的,并且被积函数是连续的,于是得

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right). \tag{1.14}$$

(1.14) 式称为非均匀的各向同性体的**热传导方程**. 如果物体是均匀的,此时 k,c 及 ρ 为常数,记 $k/c\rho=a^2$,则得

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right). \tag{1.15}$$

如果所考察的物体内部有热源(例如物体中通有电流,或有化学反应等情况),设热源密度(单位时间内单位体积中所产生的热量)为 $F(x,y,z,t)$,则在时间间隔(t_1,t_2)中区域 Ω 内所产生的热量为

$$Q_3=\int_{t_1}^{t_2}\left(\iiint\limits_{\Omega} F(x,y,z,t)\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}t. \tag{1.16}$$

在这种情况下,由于热量要平衡,(1.13) 的右端应加上 Q_3 这一项,于是相应于(1.15) 的热传导方程应改为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t), \tag{1.17}$$

其中 $f(x,y,z,t)=F(x,y,z,t)/c\rho$. 方程(1.15)称为**齐次热传导方程**,而方程(1.17)称为**非齐次热传导方程**.上述热传导方程中,描述空间坐标的独立变量为 x,y 和 z,所以它们又称为**三维热传导方程**.但是当我们考察的物体是均匀细杆时,如果它的侧面绝热且在同一截面上的温度分布又是相同的,则我们易得**一维热传导方程**

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1.18}$$

同样,如考虑一个薄片的热传导,并且薄片的侧面绝热,则可得**二维热传导方程**

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right). \tag{1.19}$$

当我们考察像气体的扩散,液体的渗透,半导体材料中杂质扩散等物理过程时,若用 u 表示所扩散物质的浓度,则浓度 u 所满足方程的形式与热传导方程完全一样.由于它所描述的是物质的扩散现象,所以这样的方程就叫做扩散方程.

§1.2.2　定解条件

对于一个特定的传热过程,仅仅知道温度 u 所满足的方程是远远不够的,还需要知道物体在"初始"时刻的温度分布和物体在边界上的温度状况(或热交换状况),这样才可以完全确定物体在以后时刻的温度.

初始条件的提法显然为

$$u(x,y,z,t)|_{t=0}=\varphi(x,y,z), \tag{1.20}$$

其中 $\varphi(x,y,z)$ 为已知函数,表示在 $t=0$ 时物体内温度的分布.

至于边界条件常见的也有以下三种基本类型.设所考察的物体 G 的边界曲面为 S.

已知物体表面温度为 $f_1(x,y,z,t)$,即

$$u(x,y,z,t)|_S=f_1(x,y,z), \tag{1.21}$$

其中 $f_1(x,y,z,t)$ 是定义在 $(x,y,z)\in S, t\geqslant 0$ 上的已知函数.这种边界条件称为**第一类边界条件**.