目　录

第一章　　n阶行列式

行列式是研究线性代数的一个重要工具，在初等数学中已经学过二阶和三阶行列式，并利用它来解二元、三元线性方程组。本章中我们要把行列式推广到n阶，讨论n阶行列式的性质和计算方法，并给出n个方程、n个未知数的线性方程组的一种解法。

§1. n阶行列式的定义

我们已经知道二阶、三阶行列式的定义和计算方法。二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

三阶行列式

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &\quad + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} \\ &\quad - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} \\ &\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}\end{aligned}$$

在上面的三阶行列式的计算中，若记

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},\quad M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

其中M_{11}是在原来的三阶行列式中，划去了元素a_{11}所在的行和列后，余下的元素所组成的二阶行列式；M_{12}是在三阶行列式中

划去了元素 a_{12} 所在的行和列后，余下的元素所组成的二阶行列式；M_{13} 是在三阶行列式中划去了元素 a_{13} 所在的行和列后，余下的元素所组成的二阶行列式。M_{11}, M_{12}, M_{13} 分别称为第一行元素 a_{11}，a_{12}，a_{13} 的**余子式**，又记

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11},\quad A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12},$$
$$A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}$$

A_{11}，A_{12}，A_{13} 分别称为第一行元素 a_{11}，a_{12}，a_{13} 的**代数余子式**。

引进了这些记号后，三阶行列式可表为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13}$$
$$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

此式称为三阶行列式按第一行元素的展开式，它表明，三阶行列式等于它的第一行的每个元素与它们的代数余子式的乘积之和。

下面讨论 n 阶行列式

n 阶行列式记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1}$$

D 中横排的称为行，竖排的称为列。n 阶行列式有 n 行 n 列。每个数 a_{ij} 称为行列式的**元素**。a_{ij} 的第一个下标 i 表示 a_{ij} 所在的行，第二个下标 j 表示 a_{ij} 所在的列，元素 a_{ij} 是位于第 i 行第 j 列的元素。例如 a_{23} 是位于第二行第三列的元素；a_{n2} 是位于第 n 行第二列的元素，等等。

用 M_{ij} 表示元素 a_{ij} **的余子式**，它是在 D 中划去了元素 a_{ij} 所在的行和列后，余下的元素按原来的顺序组成的 $n-1$ 阶行列

式。又记

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij} \tag{2}$$

A_{ij} 称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**

例如对四阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

有

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A_{24}=(-1)^{2+4}M_{24}=+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

等等。

与三阶行列式按第一行元素的展开式相类似，我们定义 n 阶行列式如下:

定义 1 n 阶行列式定义为它的第一行的每个元素与它们所对应的代数余子式的乘积之和，即

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\ldots+a_{1n}A_{1n} \tag{3}$$

(3)式称为 n 阶行列式 D 按它的第一行元素的展开式。注意，因为 $A_{1k}=(-1)^{1+k}M_{1k}\ (k=1,2,\ldots,n)$ 而每个 M_{1k} 都是 $n-1$ 阶的行列式，所以(3)式表明 n 阶行列式的计算化为 n 个 $n-1$ 阶行列式的计算，而每个 $n-1$ 阶行列式 M_{1k}，再按这个定义可化

为 $n-1$ 个 $n-2$ 阶的行列式，如此下去，最后化为三阶或二阶行列式的计算。

例 1　计算的四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{vmatrix}$$

解　$D=1A_{11}+0A_{12}+(-1)A_{13}+2A_{14}$

$$=(-1)^{1+1}M_{11}-(-1)^{1+3}M_{13}+2(-1)^{1+4}M_{14}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)-(-1)-2(-1)=2$$

例 2　计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & 0 & 0\\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}$$

解　$D=a_{11}A_{11}+0A_{12}+0A_{13}+0A_{14}$

$$=a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & 0 & 0\\ a_{32} & a_{33} & 0\\ a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}\begin{vmatrix}a_{33} & 0\\ a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

例 2 中的行列式称为**下三角行列式**，这结果表明：下三角行列式的值等于它的主对角线上的元素的乘积．这个结论对 n 阶下三角行列式也正确。

行列式非但可以按第一行元素展开，而且可以按第二行、第三行或任何一行的元素展开，还可以按任何一列的元素展开，其结果都是相同的，即有如下的定理：

定理 1　n 阶行列式 D 等于它的任一行(或任一列)的每个元素与它们所对应的代数余子式的乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \qquad (i = 1,2,\dots,n) \tag{4}$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} \qquad (j = 1,2,\dots,n) \tag{5}$$

定理 1 的证明略去

例 3　上面的例 1 中，如按第四行元素展开，得到

$$\begin{aligned} D &= 0A_{41} + 1A_{42} + 0A_{43} + (-1)A_{44} \\ &= (-1)^{4+2}M_{42} - (-1)^{4+4}M_{44} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 3 - 1 = 2 \end{aligned}$$

如按第一列元素展开，得到

$$\begin{aligned} D &= 1A_{11} + 0A_{21} + (-1)A_{31} + 0A_{41} \\ &= (-1)^{1+1}M_{11} - (-1)^{3+1}M_{31} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$= -1+3=2$$

可以验证，按任何一行或任何一列展开的结果都相等，都等于2。

例4 计算上三角行列式

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}$$

解 逐次按第一列元素展开可得

$$D' = a_{11}A_{11} = a_{11}M_{11}$$
$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{44} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

所以上三角行列式和下三角行列式的值都等于主对角线上各元素的乘积，特别地，行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \dots d_n$$

但是注意

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}0&0&\dots&0&d_1\\0&0&\dots&d_2&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\d_n&0&\dots&0&0\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}d_1d_2\dots d_n$$

所以 Δ_n 的值不一定等于 $d_1d_2\dots d_n$。

例 5　用数学归纳法证明

$$D_n=\begin{vmatrix}2\cos\theta&1&0&\dots&0&0\\1&2\cos\theta&1&\dots&0&0\\0&1&2\cos\theta&\dots&0&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&\dots&2\cos\theta&1\\0&0&0&\dots&1&2\cos\theta\end{vmatrix}$$

$$=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

证　当 $n=2$ 时，有

$$D_2=\begin{vmatrix}2\cos\theta&1\\1&2\cos\theta\end{vmatrix}=4\cos^2\theta-1=\frac{4\cos^2\theta-1}{\sin\theta}\sin\theta$$

$$=\frac{2\sin2\theta\cos\theta-\sin\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin3\theta+\sin\theta-\sin\theta}{\sin\theta}$$

$$=\frac{\sin3\theta}{\sin\theta}$$

所以当 $n=2$ 时结论成立。

设当 $n<k-1$ 时，结论成立,下证当 $n=k$ 时结论也成立。将 D_k 按第一行元素展开得

$$D_k = 2\cos\theta D_{k-1} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2\cos\theta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= 2\cos\theta D_{k-1} - D_{k-2}$$

$$= 2\cos\theta \frac{\sin k\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin(k-1)\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin(k+1)\theta + \sin(k-1)\theta - \sin(k-1)\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}$$

这表明 $n=k$ 时结论也成立，所以由数学归纳法知对一切自然数 n 结论都成立($n=1$ 时，结论显然成立)。

§2. n 阶行列式的性质

从行列式的定义知道，计算一个三阶行列式需要计算三个二阶行列式，计算一个四阶行列式需要计算四个三阶行列式，依此类推，计算一个 n 阶行列式，需要计算 n 个 $n-1$ 阶行列式。当 n 很大时，这个计算量是相当大的，所以行列式的计算应该另想办法。为此我们要研究行列式的性质，利用行列式性质可简化行列式的计算。当然行列式的性质在理论上也是很有用的。

记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式 D'称为行列式 D 的转置行列式。

性质 1 行列式与它的转置行列式相等．即 $D=D'$。

证 对行列式的阶数 n 作数学归纳法。

当 $n=2$ 时，命题显然成立．设命题对 $n-1$ 已经成立，下证对 n 也成立。

将 D 和 D'分别按第一行和第一列元素展开得到

$$D=\sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{1+k}a_{1k}M_{1k} \tag{1}$$

$$D'=\sum_{k=1}^{n} a_{1k}B_{k1}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_{1k}N_{k1} \tag{2}$$

其中 A_{1k}，M_{1k} 是 D 的第一行元素的代数余子式和余子式；B_{k1}，N_{k1} 是 D'的第一列元素的代数余子式和余子式。

M_{1k} 和 N_{k1} 都是 $n-1$ 阶行列式，而且显然可看出 N_{k1} 是 M_{1k} 的转置行列式，所以由归纳法的假设知 $M_{1k}=N_{k1}$，从而由(1)、(2)知 $D=D'$，即命题对 n 也成立。

由数学归纳法，命题对一切 n 都成立。

性质 1 说明，在行列式中，行与列的地位是对称的，因此凡行所具有的性质，列也具有同样的性质，所以下面在叙述和证明行列式的性质时，我们都只对行来做。

性质 2 互换行列式的两行(列)，行列式变号，即

$$
\begin{vmatrix}
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{vmatrix}
= -
\begin{vmatrix}
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{vmatrix}
$$

证　还是对行列式的阶数 n 用数学归纳法。

对二阶行列式，很容易验证性质 2 成立。设对于 $n-1$ 阶行列式性质 2 已成立，下面证明对 n 阶行列式也成立。

把左右两端的行列式分别记为 D 和 Δ，注意 D 和 Δ 中除去第 i 行与第 j 行的位置互换外，其余各行均相同。由定理 1，n 阶行列式可以按任意一行展开，现在将 D 和 Δ 都按第 k 行展开 $(k\neq i,j)$，有

$$D=\sum_{l=1}^{n}a_{kl}A_{kl}=\sum_{l=1}^{n}(-1)^{k+l}a_{kl}M_{kl} \tag{3}$$

$$\Delta=\sum_{l=1}^{n}a_{kl}B_{kl}=\sum_{l=1}^{n}(-1)^{k+l}a_{kl}N_{kl} \tag{4}$$

其中 A_{kl} 和 M_{kl} 是 D 中元素 a_{kl} 的代数余子式和余子式，B_{kl} 和 N_{kl} 是 Δ 中元素 a_{kl} 的代数余子式和余子式。M_{kl} 和 N_{kl} 都是 $n-1$ 阶行列式，且除去两行元素互换外，其余各行都相同，所以由归纳法假设有 $M_{kl}=-N_{kl}$（即 $A_{kl}=-B_{kl}$），于是由(3)、(4)知 $D=-\Delta$，从而命题对一切 n 都成立。

推论 1　若行列式中有两行(列)元素对应相等，则行列式为零。

证　记这个行列式为 D，把元素对应相等的两行互换后所得的行列式记为 $-D$(性质 2)，因为这两行的对应元素相等，所以两行互换后的行列式就是原来的行列式，于是 $D=-D$，所以 $D=0$。

性质 3　行列式中某一行(列)若有公因子，则可将公因子提

到行列式外，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证　将等号左、右两边的行列式分别记为 D 和 D_1，将 D 按第 i 行展开，得

$$\begin{aligned} D &= ka_{i1}A_{i1} + ka_{i2}A_{i2} + \ldots + ka_{in}A_{in} \\ &= k(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}) \\ &= kD_1 \end{aligned}$$

推论 2　若行列式中有一行(列)元素全为零，则行列式为零。

证　元素全为零的那一行显然有公因子零，把它提到行列式外即得。

推论 3　若行列式中有两行(列)元素对应成比例，则行列式为零，即

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0$$

证　由性质 3 和推论 1 即得。

性质 4　若行列式的某一行(列)的每个元素都是两数之和

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \leftarrow \text{第}i\text{行}$$

则此行列式等于下列两行列式之和

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证　与性质 3 的证明类似，将 D 按第 i 行展开即可证得。

性质 5　把行列式的某一行(列)加上另一行(列)的一个倍数，行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

证　由性质 4 和推论 3 即可证得。

性质 6　行列式的某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元

素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = 0(i \neq j)$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \dots + a_{ni}A_{nj} = 0(i \neq j)$$

证　记

$$D = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \longleftarrow\ i\text{行} \\ \\ \longleftarrow\ j\text{行} \\ \\ \end{array}$$

作辅助行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

因为 D_1 中第 i 行与第 j 行对应元素相同，由推论 1 知 $D_1=0$。另一方面，D_1 按第 j 行展开得

$$D_1 = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn}$$

所以

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = 0 \qquad (i \neq j)$$

上述证法如按行列式的列进行，则可得

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \dots + a_{ni}A_{nj} = 0 \qquad (i \neq j)$$

由性质 6 和 § 1 的定理 1，我们得到代数余子式的重要结果:

行列式的任一行(列)的元素与它们自己的代数余子式的乘积之和等于行列式的值，而任一行(列)的元素与另一行(列)对应元

素的代数余子式的乘积之和等于零，即

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = D \cdot \delta_{ij} = \begin{cases} D & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = D \cdot \delta_{ij} = \begin{cases} D & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

其中

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

下面举例说明如何用行列式的性质来计算行列式，为方便起见，我们用记号 r_i+kr_j 表示把 i 行的每个元素加上 j 行每个对应元素的 k 倍，用记号 c_i+kc_j 表示把 i 列的每个元素加上 j 列每个对应元素的 k 倍。

例 1　计算四阶行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

解:　利用性质 5，可以在行列式中“制造”出一些零，考虑到第二列中已经有一个零，所以就在第二列中再制造一些零。由性质 5 可得到

$$\Delta \xlongequal[r_4+5r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -8 & 0 & 4 & -6 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 16 & 0 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

接着按第二列展开得

$$\Delta = 1 \cdot A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -8 & 4 & -6 \\ 2 & 1 & -1 \\ 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

在这个三阶行列式中，第一行和第一列都有公因子2，把它提出来，得到

$$\Delta=(-1)\times 2\times 2\begin{vmatrix}-2 & 2 & -3\\ 1 & 1 & -1\\ 8 & -2 & 7\end{vmatrix}$$

再在第二行中制造零，由性质5得到

$$\Delta\xlongequal[c_3+c_1]{c_2-c_1}-4\begin{vmatrix}-2 & 4 & -5\\ 1 & 0 & 0\\ 8 & -10 & 15\end{vmatrix}$$

然后按第二行展开得

$$\Delta=-4\times 1\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}4 & -5\\ -10 & 15\end{vmatrix}$$

$$=4(60-50)=40$$

例2　计算行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 3\end{vmatrix}$$

解　这个行列式的特点是各行元素的和都是6，所以

$$\Delta\xlongequal{c_1+c_2+c_3+c_4}\begin{vmatrix}6 & 1 & 1 & 1\\ 6 & 3 & 1 & 1\\ 6 & 1 & 3 & 1\\ 6 & 1 & 1 & 3\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 3\end{vmatrix}$$