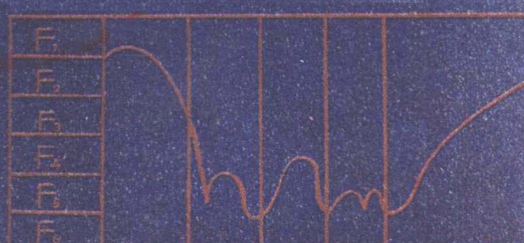
经济管理常用数学方法

线性规划法

李吉桂　王汉强编著



科学普及出版社广州分社

经济管理常用数学方法——

线 性 规 划 法

李吉桂　王汉强　编著

科学普及出版社广州分社

内　容　提　要

科学的经济管理是现代化建设所必不可少的，而提高经济管理干部的水平则是搞好经济管理的基础。本书就是出于这一考虑而出版的一本介绍线性规划的基本方法及其实际应用的普及读物。

本书综合经济管理中经常遇到的实际问题，通俗地介绍了线性规划的基本方法，并且深入浅出地叙述了有关的原理。各章均附有习题及答案。

本书主要供经济管理干部阅读，也可供科技人员及财经学院、电视大学、业余大学经济管理类的教师、学生阅读、参考。

经济管理常用数学方法——

线　性　规　划　法

李吉桂　王汉强　编著

科学普及出版社广州分社出版

广州市应元路大华街兴平里3号

韶关粤北印刷厂印刷

广东省新华书店发行

开本：787×1092毫米　1／32　印张：8　字数：175千字

1983年11月第一版　1983年11月第一次印刷

印数：9200册　统一书号：13051·60220

定价：0.83元

前　　言

本书为介绍线性规划的基本方法及其实际应用的普及读物。主要对象是经济管理干部、科技人员和财经学院、电视大学、业余大学经济管理类的教师、学生。

书中以较大的篇幅，结合实际问题通俗地介绍了线性规划的基本方法，并且深入浅出地叙述了有关的原理。这样做就使有一定数学基础的读者，能够在弄清原理的基础上，灵活地运用这些方法。为了使读者能够巩固所学的书中知识，各章均配有适量思考习题，书末附有答案，为了使读者能够处理较大型的经济管理问题，书中还给出了用计算机解题的方法和程序。

在本书的编写过程中，广东省数学学会普及工作委员会副主任叶世雄老师认真地审阅了书稿，蔡永桓老师绘制了插图，在此表示衷心的感谢。

由于水平所限，书中不当之处，请读者不吝指正。

编著者

一九八三年四月

目　录

第一章　**什么叫线性规划**……………………（1）
§1.1　引言……………………………………（1）
§1.2　线性规划问题的标准形式…………（3）
§1.3　线性规划问题的基本定理…………（6）
§1.4　习题……………………………………（13）
第二章　**线性规划问题的解法**……………（14）
§2.1　向量与矩阵的简单知识……………（14）
§2.2　单纯形法的计算步骤………………（31）
§2.3　单纯形法的原理……………………（46）
§2.4　求初始基本可行解的方法…………（57）
§2.5　习题……………………………………（64）
第三章　**对偶线性规划问题**…………………（68）
§3.1　对偶线性规划问题…………………（68）
§3.2　原始问题与对偶问题的基本关系………（72）
§3.3　对偶单纯形法…………………………（76）
§3.4　对偶问题的经济模型举例…………（87）
§3.5　习题……………………………………（92）
第四章　**线性规划问题的灵敏度分析**……（93）
§4.1　线性规划问题的灵敏度分析的内容……（93）
§4.2　目标函数的系数 C_j 的灵敏度分析……（96）
§4.3　约束条件的常数项变化时的灵敏度分析
……………………………………………（101）

§4.4　增加新的变量时的灵敏度分析 ……… (105)
§4.5　增加一个新的约束条件时的灵敏度分析 …………………………………… (106)
§4.6　习题 …………………………………… (115)
第五章　整数线性规划问题 …………………… (117)
§5.1　凑整数解法 …………………………… (118)
§5.2　分枝界限法 …………………………… (120)
§5.3　习题 …………………………………… (136)
第六章　运输问题 …………………………… (138)
§6.1　运输问题的数学模型 ………………… (138)
§6.2　运输问题的表上作业法 ……………… (141)
§6.3　运输问题的某些推广 ………………… (154)
§6.4　习题 …………………………………… (164)
第七章　工作安排与供销员旅程问题 ……… (167)
§7.1　工作安排问题 ………………………… (167)
§7.2　供销员旅程问题 ……………………… (178)
§7 3　用分枝界限法求解 …………………… (184)
§7.4　习题 …………………………………… (194)
第八章　投入——产出分析简介 …………… (196)
§8.1　模型假设 ……………………………… (196)
§8.2　开放的投入产出模型的建立 ………… (197)
§8.3　投入——产出表的若干应用举例 …… (205)
§8.4　企业系统的投入产出模型 …………… (208)
第九章　计算机解题举例 …………………… (214)
§9.1　修正单纯形法 ………………………… (214)
§9.2　一般线性规划问题的计算机程序 …… (224)
习题答案 ……………………………………… (240)

第一章　什么叫线性规划

§1.1　引　言

什么是线性规划问题？为了回答这个问题，我们先来研究下面的例子。

例1．某工厂制造A、B两种产品，已知制造A种产品1公斤需要劳动力7人（指标准工作日，下同），原料5公斤，电力2度；制造B种产品1公斤需要劳动力5人，原料8公斤，电力5度。在一个月内，工厂能够使用的劳动力最多3500人，原料最多有4000公斤，电力最多有2000度；又已知生产1公斤A、B产品的经济效益（以货币折算）分别为6元和7元。问在工厂现有条件下，应如何安排A、B产品的生产，才能使获得的经济效益最高？

很明显，可以采用许多方案来安排A、B产品的生产，然而，合理的方案，应该是所花的劳动力、原料和电力都不超过该厂最大可能提供的数量。具体地，如果设生产A、B产品的数量分别为x_1公斤与x_2公斤（x_1、x_2称为变量或未知数，x_1、x_2的不同数值的组合表示不同的方案），则这时消耗的劳动力、原料与电力的数量分别为

$7x_1+5x_2$　（人）　（劳动力）

$5x_1+8x_2$　（公斤）　（原料）

$2x_1+5x_2$　（度）　（电力）

为了使这些方案是合理的，就必须使上式表示的数量都不超

过该厂可能提供的最大数量，即应满足：

$$\begin{cases} 7x_1+5x_2\leqslant 3500 \\ 5x_1+8x_2\leqslant 4000 \\ 2x_1+5x_2\leqslant 2000 \end{cases} \tag{1.1}$$

在数学上称不等式组（1.1）为约束（限制）条件，另外，因为在大量的实际问题中，变量（例如这里代表生产量的x_1与x_2）都是非负的，所以约束条件还经常加上非负要求。因此，例1的约束条件可以用下面的不等式组表示：

$$\begin{cases} 7x_1+5x_2\leqslant 3500 \\ 5x_1+8x_2\leqslant 4000 \\ 2x_1+5x_2\leqslant 2000 \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

其次，根据例1提供的情况，为了判断哪些方案优，哪些方案劣，就要确定一个衡量的标准，显然，这个标准就是各个方案获得的经济效益。一般地，经济效益大的方案比经济效益小的方案优，而各个方案获得的经济效益都可以用下式表示：

$$6x_1+7x_2 \quad （元） \quad （经济效益） \tag{1.3}$$

在数学上称（1.3）式为目标函数。

综上所述，例1提出的问题，就是要确定x_1、x_2的数量，使（1.3）式取最大值，且使x_1，x_2满足不等式组（1.2）。整个问题可以将（1.2）式与（1.3)式合并记为：

$$\begin{aligned} \max \quad & 6x_1+7x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 7x_1+5x_2\leqslant 3500 \\ & 5x_1+8x_2\leqslant 4000 \\ & 2x_1+5x_2\leqslant 2000 \\ & x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0 \end{aligned} \tag{1.4}$$

其中max表示使（1.4）式中的第一个式子取最大值，即使目标函数取最大值；s.t、是英文Subject to的缩写，读作"受约束（限制）于"。同时，为简便起见，在（1.4）式中将不等式组前的括号省略。由于（1.4）式以数学式子的形式表示了例1，所以常称（1.4）式为实际问题例1的"数学模型"。

一般地，在满足约束条件的前提下，使目标函数达到极大（极小）值的问题称为"数学规划问题"，特别地，当约束条件为变量的线性等式（方程）或不等式，而且目标函数为变量的线性函数时，就称其为线性规划问题（例如(1.4)式）。本书研究的对象，就是只限于线性规划问题。

§1.2 线性规划问题的标准形式

按照上一节介绍的线性规划问题的定义，线性规划问题可以有各种形式（使目标函数取最大或最小，在约束条件的式子中有"等号"、"大于号"或"小于号"等等）。然而，为了研究的方便，我们只深入研究如下线性规划问题的标准形式：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \\
\text{s.t.} \quad & a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\
& a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \\
& x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ \cdots,\ x_n\geqslant 0
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

其中"min"为使目标函数取最小值，a_{ij}、c_j为常数，$i=1, 2, \cdots m$；$j=1, 2, \cdots n$；$b_i\geqslant 0$，$i=1, 2, \cdots, m$。

而将其他形式的线性规划问题转变为标准形式后，再加以研究。因此，我们首先介绍如何将线性规划问题转变为标准形式（1.5）式的方法：

1．对于使目标函数取最大的问题，因为使

$$\max \quad c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

成立的x_1，x_2，…，x_n必然使

$$\min -c_1x_1-c_2x_2-\cdots-c_nx_n$$

成立，所以，只须将求最大值的线性规划问题的目标函数的系数变号，就变为等价的求最小值的问题了。

2．如果约束条件为不等式，这又可分为两种情况：

①．约束条件的某个不等式为

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n\leqslant b_i$$

的形式。这时可以在上式左边加上一个非负变量$x_{n+1}\geqslant 0$，使其变为等式：

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n+x_{n+1}=b_i$$

习惯上称上式的非负变量x_{n+1}为“松弛变量”。

②．约束条件的某个不等式为

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n\geqslant b_i$$

的形式，这时可以在上式左边减去一个非负变量$x_{n+1}\geqslant 0$，使其变为等式：

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n-x_{n+1}=b_i$$

习惯上称上式的非负变量x_{n+1}为“剩余变量”（有的文献也统称为“松弛变量”）。

3．如果某个变量，例如x_i没有非负限制，则习惯上称这个变量x_i为自由变量。这时为了将它变为标准形式，可以引进两个新的非负变量$u_i\geqslant 0$与$v_i\geqslant 0$，并设：

$$x_i=u_i-v_i$$

通过代换，便可以将问题变为标准形式。

为了具体说明上述方法，我们考察如下例子：

例 1. 将 §1.1中的（1.4）式变为标准形式。

解：因为是求最大值问题，所以将目标函数的系数变号后变为求最小值问题，再引进松弛变量 x_3，x_4 与 x_5，便将（1.4）式变为如下标准形式：

$$
\begin{aligned}
\min\ & -6x_1-7x_2 \\
\text{s.t.}\ & 7x_1+5x_2+x_3 = 3500 \\
& 5x_1+8x_2 + x_4 = 4000 \\
& 2x_1+5x_2 + x_5 = 2000 \\
& x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0,\ x_4\geqslant 0,\ x_5\geqslant 0
\end{aligned}
\qquad (1.6)
$$

例 2. 试将下述问题变为标准形式。

$$
\begin{aligned}
\max\ & x_1+3x_2+4x_3 \\
\text{s.t.}\ & x_1+2x_2+x_3\leqslant 5 \\
& 2x_1+3x_2+x_3\geqslant 6 \\
& x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0
\end{aligned}
\qquad (1.7)
$$

解：①将（1.7）式中的max $x_1+3x_2+4x_3$变为

$\min\ -x_1-3x_2-4x_3$

②引进松弛变量 x_4 将（1.7）式中的

$x_1+2x_2+x_3\leqslant 5$

变为

$x_1+2x_2+x_3+x_4=5$；

引进剩余变量 x_5 将（1.7）式中的

$2x_1+3x_2+x_3\geqslant 6$

变为

$2x_1+3x_2+x_3-x_5=6$

③注意到 x_1 是自由变量，为此引进非负变量 x_6 与 x_7，

令$x_1=x_6-x_7$，将其代入目标函数及以上两式后便得（1.7）式的标准形式：

$$\begin{aligned}
\min\quad & -x_6+x_7-3x_2-4x_3 \\
\text{s.t.}\quad & 2x_2+x_3+x_4+x_6-x_7=5 \\
& 3x_2+x_3-x_5+2x_6-2x_7=6 \\
& x_2\geqslant 0,\ x_3\geqslant 0,\ x_4\geqslant 0,\ x_5\geqslant 0,\ x_6\geqslant 0, \\
& x_7\geqslant 0
\end{aligned} \tag{1.8}$$

§1.3 线性规划问题的基本定理

为了叙述线性规划问题的基本定理，我们首先以（1.6）式为例引进几个新概念，为方便起见，将（1.6）式重新列出：

$$\begin{aligned}
\min\quad & -6x_1-7x_2 \\
\text{s.t.}\quad & 7x_1+5x_2+x_3=3500 \\
& 5x_1+8x_2+x_4=4000 \\
& 2x_1+5x_2+x_5=2000 \\
& x_i\geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5
\end{aligned} \tag{1.9}$$

我们考察（1.9）式中的线性方程组。

$$\begin{aligned}
7x_1+5x_2+x_3 &=3500 \\
5x_1+8x_2+x_4 &=4000 \\
2x_1+5x_2+x_5 &=2000
\end{aligned} \tag{1.10}$$

如上所述，（1.10）式的任一组非负解，对应于一个合理方案。易知，如果一个实际问题无合理的方案，或只有一个合理方案，则没有必要谈最优方案，因此，我们总假设所研究的实际问题存在许多合理的方案，也即，在数学上，一般地，总假设线性规划问题的标准形式的方程组

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\cdots \qquad \cdots & \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned} \tag{1.11}
$$

的方程的个数m小于变量的个数n，即有 $m<n$，而且m个方程是线性无关（即其中任一方程不能由其他方程或它们的组合来代替）的，否则，在数学上将会推出（1.11）式无解、有唯一解和有多余的方程等三个结论中的一个成立。前两种情况不是我们的研究范围，而对于后一种情况，总可以将多余的方程去掉，变为（1.11）式。因此，（1.11）式有无穷多个解，对于其中的一部分解，我们定义：

定义1：满足（1.5）式的非负条件的（1.11）式的解，称为线性规划问题（1.5）式的可行解。

易知

$$x_1 = x_2 = 0, x_3 = 3500, x_4 = 4000, x_5 = 2000, \tag{1.12}$$

便是（1.9）式的一个可行解。

另外，若在（1.10）式中令 $x_1 = 0$，$x_5 = 0$，则（1.10）式变为

$$
\begin{aligned}
5x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 3500 \\
8x_2 \qquad + x_4 &= 4000 \\
5x_2 \qquad\qquad\quad &= 2000
\end{aligned} \tag{1.13}
$$

由于（1.13）式的系数行列式为

$$
\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 5 \neq 0
$$

故（1.13）式有唯一解*：

*参阅高中数学课本第三册第一章。

$x_2=400$, $x_3=1500$, $x_4=800$

易知上式与$x_1=x_5=0$一齐组成（1.10）式的一个解：

$$x_1=0,\ x_2=400,\ x_3=1500,\ x_4=800,\ x_5=0, \qquad (1.14)$$

若在（1.10）式中再令 $x_4=x_5=0$，则（1.10）式变为

$$\begin{aligned} 7x_1+5x_2+x_3&=3500\\ 5x_1+8x_2\quad&=4000\\ 2x_1+5x_2\quad&=2000 \end{aligned} \qquad (1.15)$$

（1.15）式的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} 7 & 5 & 1\\ 5 & 8 & 0\\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & 8\\ 2 & 5 \end{vmatrix}=9\neq 0$$

因此（1.15）式有唯一解：

$$x_1=\frac{4000}{9},\quad x_2=\frac{2000}{9},\quad x_3=-\frac{6500}{9}$$

上式与$x_4=0$，$x_5=0$一齐组成（1.10）式的一个解：

$$x_1=\frac{4000}{9},\ x_2=\frac{2000}{9},\ x_3=-\frac{6500}{9},x_4=0,x_5=0, \quad (1.16)$$

我们还可以继续这样做，从而得出（1.10）式的解，对于这类解，我们给出一般的定义：

定义2．在(1.11)式中，若令其中任意的$(n-m)$个变量为零后，得到新的方程组有唯一解（由于必须是唯一解，故只能令$(n-m)$个变量为零），则这个唯一解与令其为零的$(n-m)$个变量一齐组成(1.11)式的解，称为(1.11)式的基本解．新的方程组中的变量称为基本变量，令其为零的变量称为非基本变量．

例如(1.12)，(1.14)，(1.16)式都是(1.10)式的基本解．对应于(1.13)式，x_2、x_3、x_4是基本变量，x_1、x_5是

非基本变量；而对应于（1.15）式，x_1、x_2、x_3 为基本变量，x_4、x_5为非基本变量。

对于基本解的一部分，我们进一步给出如下两个定义：

定义 3．如果基本解又是可行的，则称其为线性规划问题（1．5）式的基本可行解。

例如(1.14)式是 (1.9) 式的基本可行解，而 (1.16) 式则不是（1.9）式的基本可行解，因为 $x_3 = -\frac{6500}{9} < 0$，不满足非负约束条件。

定义 4．如果基本解中存在一个基本变量$x_i = 0$，则称其为退化的基本解，如果退化的基本解又是可行的，则称为退化的基本可行解。

为了进一步弄清上述概念，再考察下例：

例 1．
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 5 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 10 \end{aligned} \tag{1.17}$$

令$x_3 = x_4 = 0$得新的方程组

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 5 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 10 \end{aligned} \tag{1.18}$$

(1.18)式虽然是两个变量、两个方程的方程组，但由于它的解不是唯一的，因此，由它得到的解（例如$x_1 = 1$，$x_2 = 2$）与$x_3 = x_4 = 0$一齐组成的解，不是(1.17)式的基本解。同理，令$x_1 = x_4 = 0$得到的新方程组

$$\begin{aligned} 2x_2 + x_3 &= 5 \\ 4x_2 + 2x_3 &= 10 \end{aligned}$$

的解与$x_1 = x_4 = 0$一齐组成的解，也不是(1.17)式的基本解。而令$x_1 = x_2 = 0$得到的新方程组

$$x_3 + x_4 = 5$$
$$2x_3 + 4x_4 = 10 \tag{1.19}$$

的唯一解（因为系数行列式不等于0）$x_3 = 5$，$x_4 = 0$ 与 $x_1 = x_2 = 0$ 一齐组成(1.17)式的一个基本解。又因为存在基本变量 $x_4 = 0$ 和满足非负条件，所以由定义4可知，它又是退化的基本可行解。

在给出基本定理之前，还须给出如下定义：

定义5．对于(1．5)式，使目标函数达到最小值的可行解称为最优可行解，如果最优可行解又是基本解，则称它为最优基本可行解。

现在我们给出线性规划问题的基本定理：

定理1．对于线性规划问题(1．5)式，以下的结论成立：

① 若(1．5)式存在一个可行解，则必存在一个基本可行解；

② 若(1．5)式存在一个最优可行解，则必存在一个最优基本可行解。

证明：（由于须用较专门的数学知识，这里从略）

由定理1的第②个结论可知：如果(1．5)式存在最优可行解，则一定可以在基本可行解中找到最优基本可行解。按照定义5，最优基本可行解必是基本可行解，而按照定义3，基本可行解必是基本解。因此，如果基本解的个数是有限的，因而可以将有限个基本可行解分别代入目标函数，直接进行比较而得出最优的基本可行解。

事实上，在(1.11)式中，已设定 $n > m$，且 m 个方程是线性无关的。按照定义2，在 n 个变量中选出 m 个变量，令

其余$(n-m)$个变量为零，有$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$（其中$n!=n\times(n-1)\times\cdots\times2\times1$，例如$4!=4\times3\times2\times1$）个选法，又由于每个选法得到的新的方程组（m个方程，m个变量）不一定都是有唯一解，因此，基本解最多有C_n^m个，即基本解的个数是有限的。例如，在(1.17)式中，因为当$x_4=0$时，所得的方程组

$$x_1+2x_2+x_3=5$$
$$2x_1+4x_2+2x_3=10$$

的两个方程是线性相关（即其中一个方程可用另一个方程来代替）的，不管再令x_1、x_2、x_3中哪个为零，得到的新的方程组的解都不是唯一的，因而不是基本解，故(1.17)式仅有3个基本解（小于$C_4^2=6$）。作为用上述(并不方便的)原则求解线性规划问题的例子，我们将§1．1例1给出的(1.10)式的$C_5^3=10$个基本解逐一列出：

$$x_1=0,\ x_2=0,\ x_3=3500,$$
$$x_4=4000,\ x_5=2000, \tag{1.20}$$
$$x_1=0,\ x_2=400,\ x_3=1500,$$
$$x_4=800,\ x_5=0, \tag{1.21}$$
$$x_1=\frac{4000}{9},\ x_2=\frac{2000}{9},\ x_3=-\frac{6500}{9}$$
$$x_4=0、x_5=0, \tag{1.22}$$
$$x_1=0,\ x_2=500,\ x_3=1000,$$
$$x_4=0,x_5=-500, \tag{1.23}$$
$$x_1=800,\ x_2=0,\ x_3=-1900,$$
$$x_4=0,\ x_5=400, \tag{1.24}$$