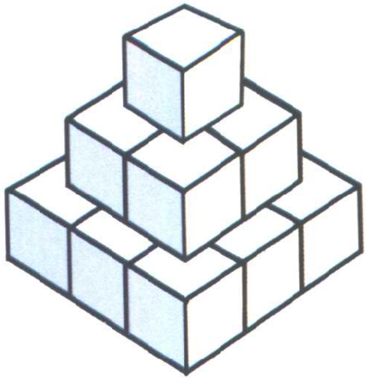
名师解惑丛书



数列 极限 数学归纳法

王　伟　编著

山东教育出版社

名师解惑丛书

数列 极限 数学归纳法

王　伟　编著

山 东 教 育 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

数列 极限 数学归纳法/王伟编著 .—济南:山东教育出版社,1998(2000 重印)

(名师解惑丛书)

ISBN 7-5328-2706-2

Ⅰ.数… Ⅱ.王… Ⅲ.代数课-高中-课外读物 Ⅳ.G634.623

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 02878 号

名师解惑丛书

数列 极限 数学归纳法

王伟 编著

出 版 者:山东教育出版社

(济南市纬一路 321 号 邮编:250001)

电　　话:(0531)2023919 传真:(0531)2050104

网　　址:http://www.sjs.com.cn

发 行 者:山东教育出版社

印　　刷:山东新华印刷厂临沂厂

版　　次:1998 年 9 月第 1 版

2001 年 1 月修订第 2 版

2001 年 1 月第 5 次印刷

规　　格:787mm×1092mm 32 开本

印　　张:7.625

字　　数:160 千字

书　　号:ISBN 7-5328-2706-2/G·2484

定　　价:7.10 元

如印装质量有问题，请与印刷厂联系调换

地址：临沂市解放路 76 号 邮编：276002

联系电话：(0539) 8222161 转 3009

再版说明

“名师解惑丛书”出版发行以来，以其新颖的编写体例和缜密的知识阐述，深受广大读者青睐，曾连续多次重印．

近几年来，基础教育正发生深刻的改革：“科教兴国”战略深入人心，素质教育全面推进，与此同时，以“普通高等学校招生全国统一考试试卷”为主要载体，所反映出的高考招生改革信息和发展趋势，迫切需要广大教师和莘莘学子以新的视角和思维，关注并投身到这场改革之中．

有鉴于此，我们对“名师解惑丛书”进行了全面修订．此次修订将依然保持被广大读者认同的，每一册书为一个专题讲座的模式，围绕“如何学”，“如何建立知识间的联系”，“如何学以致用”等，帮助广大学生读者解决在学习知识和考试答卷过程中可能遇到的疑难问题．更重要的是，最新修订的“名师解惑丛书”在如何培养学生的创新精神和创造能力，联系现代科学技术及其在日常生产生活中的应用方面，做了较大的充实和修订……

丛书的编写者和出版者相信，您正在翻阅的这本书，将有助于您目前的学习．

作者的话

数列、极限、数学归纳法是中学数学的重要内容．是由初等数学向高等数学过渡的桥梁．它们很好地体现了人们认识数学过程中由静止、孤立向变化、联系的转变．

数列，顾名思义即为顺序排列的一列数．如，我们熟悉的自然数的顺序排列 1，2，3，4，…即构成一个最常见、最有用的数列——自然数序列．若以较高的观点来看，数列的内容相对单纯：其核心内容是数列延伸、变化的规律．这一规律有三种相互等价的表现形式，我们称之为“一个中心两个基本点”．“一个中心”指数列的通项公式，它是数列延伸规律的最直接的摹写与抽象；“两个基本点”指数列的递推公式和前 n 项和，前者反映了数列内部各项间的相依关系，而后者则反映了数列诸项累积相加后的整体特征．这三种表现形式的相互转化与延拓构成了数列的主要内容．中学阶段，我们重点探讨两种最基本的数列——等差数列与等比数列，它们的名称反

映了它们各自延伸、递推的特征．

严格地讲，数学归纳法属于数理逻辑的范畴．它具有两个基本的步骤：第一步验证命题的起始正确性；第二步推证命题在第一步的基础上的可自动推演性．这样，两个步骤合并成一个逻辑上可自动重复的连续推理过程，这一过程可根据需要至于任一正整数．数学归纳法是用来证明与正整数有关的命题时最重要的方法之一．

极限反映了变量无限变化的一种趋势——无限接近于某定值(常量)．以 ε-δ 语言诠释的“无限接近”是整个极限理论的根基．在此基础上，高中数学中相继展开了数列的极限、函数的极限、函数的连续性、极限的四则运算等基本内容．其中，函数连续性的概念是高等数学中最重要、最核心的概念之一，须加以充分重视．

数列、极限、数学归纳法是中学数学中非常重要的内容，它们相互交叉并与函数、方程等内容相关联，在每年的高考数学试题中常有综合题出现．本书力求抓住相关重点、难点、疑点，排解“怎样学”、“怎样做”、“为何错”等学习中常见的迷惑，帮助学生更顺利地学好这部分内容．

由于作者水平所限，书中缺点、错误在所难免，还望广大读者不吝赐教．

2000 年 10 月

作者简介　王　伟，1948 年生，中学高级教师，特级教师。现任滕州二中副校长，枣庄市数学会理事，中国教育家协

会理事,中国教育写作协会特约编审,香港国际教育交流中心研究员。近年来,共在省级以上刊物发表学术论文60余篇,出版专著10余部,其中,《谈培养学生数学思维的批判性》等三篇论文获全国优秀论文一等奖,《数学教学艺术》被评为山东省优秀图书。

目　录

一　数　列

“数列”包括数列的概念及数列的通项公式两部分内容．数列的概念是学习数列的基础，由于用函数的观点认识数列比较抽象，因此，它是学习的难点．数列的通项公式是数列给出的一种主要形式，是数列的核心，因此，它是学习的重点．要能在理解数列概念的基础上，运用多种方法推出数列的通项公式，逐步具备由特殊到一般的归纳能力和整体观察能力．

（一）数列的概念

数列是按一定次序排列的一列数．“次序”决定了数列的有序性：数列中的项与其项数是对应的．学习这一概念，应注意以下两点：

1．用函数的观点看数列

数列是一类特殊的函数，它可看作定义域为自然数集或它的有限子集的函数当

自变量由小到大依次取值时对应的一系列函数值,即

$$a_n=f(n)(n=1,2,3,\cdots).$$

例1 (1)已知数列的通项公式为 $a_n=1+\cos\frac{n\pi}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$,计算 a_{10},并证明 $a_{k+4}=a_k(k\in\mathbf{N}^*)$;

(2)若数列的通项 $a_n=\frac{2n}{n^2+1}$,那么数列 $\{a_n\}$ 是否有界($|a_n|$恒小于定值)?其增减性如何?

解题指导:(1)这是数列周期性问题,可依周期函数的定义证明.

(2)这是数列的单调性问题,宜用研究函数增减性的方法判断其增减性.

解:(1)$\because a_n=1+\cos\frac{n\pi}{2}$,

$\therefore a_{10}=1+\cos5\pi=1+(-1)=0.$

$\because\quad a_{k+4}=1+\cos\frac{(k+4)\pi}{2}=1+\cos\frac{k\pi}{2}$,

而 $\quad a_k=1+\cos\frac{k\pi}{2}$,

$\therefore\quad a_{k+4}=a_k.$

(2)$\because a_n-a_{n+1}=\frac{2n}{n^2+1}-\frac{2(n+1)}{(n+1)^2+1}$

$$=\frac{2n[(n+1)^2+1]-2(n+1)(n^2+1)}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}$$

$$=\frac{2(n^2+n-1)}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}$$

$$>0,$$

$\therefore a_n>a_{n+1}.$

又 $|a_n|=\left|\frac{2n}{n^2+1}\right|=\frac{2n}{n^2+1}\leqslant\frac{2n}{2n}=1$,

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是递减而有界数列 .

[**导评**]数列是一类特殊的函数,因此,也常用研究函数性质的方法研究数列的有关性质(如周期性、增减性及极值等).

例 2 设函数 $f(x)=\log_2 x-\log_x 4(0<x<1)$,数列 $\{a_n\}$ 的通项满足 $f(2^{a_n})=2n(n\in\mathrm{N}^*)$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)数列 $\{a_n\}$ 有没有最小项? 若有,试求此项和相应的项数;若没有,请说明理由 .

解题指导:(1)由已知条件运用换底公式可求出数列 $\{a_n\}$ 的通项 .

(2)可运用函数思想,用判断函数增减性的方法判断数列随 n 的增大而变化的规律 .

解:(1)由已知,得

$$\log_2 2^{a_n}-\log_{2^{a_n}}4=2n,$$

利用对数换底公式,得

$$\log_2 2^{a_n}-\frac{\log_2 4}{\log_2 2^{a_n}}=2n,$$

即 $a_n-\frac{2}{a_n}=2n$.

$\therefore a_n^2-2na_n-2=0$,

$\therefore a_n=n\pm\sqrt{n^2+2}$.

又 $0<x<1$,即 $0<2^{a_n}<1$,故

$$a_n<0(n\in\mathrm{N}^*).$$

$\therefore a_n = n - \sqrt{n^2+2}(n \in \mathrm{N}^*)$.

(2)由(1),知

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1) - \sqrt{(n+1)^2+2}}{n - \sqrt{n^2+2}}.$$

分子、分母同时有理化,得

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n + \sqrt{n^2+2}}{(n+1) + \sqrt{(n+1)^2+2}} < 1,$$

又 $a_n < 0(n \in \mathrm{N}^*)$,

$\therefore a_{n+1} > a_n(n \in \mathrm{N}^*)$,

即 $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$

因此,数列$\{a_n\}$有最小值,为第一项:$a_1 = 1 - \sqrt{3}$.

例3 填空:从函数的角度研究数列的分类,可从它的定义域、值域、单调性这三个方面入手:

(1)若按定义域划分,可将数列分为____数列和____数列.

(2)若按值域划分,可将数列分为____数列和____数列.

(3)若按增减性划分,可将数列分为____数列,____数列,____数列,____数列.

答:(1)有穷数列,无穷数列.

(2)有界数列,无界数列.

(3)递增数列,递减数列,摆动数列,常数数列.

[**导评**]该例体现了数列的函数形象.

2. 了解数列的图象表示

数列既然是一种特殊的函数,那么它就可以用图象来表

示．数列的图象是一串孤立的点，可以在直角坐标平面内描出．

例 4　在直角坐标平面内，描出下列数列的图象，并说明图象散落在怎样的曲线上．

(1)$1,3,5,7,\cdots,(2n-1),\cdots$;

(2)$2,4,8,16,\cdots,2^n,\cdots$.

解：(1)数列的图象如图 1—1(a)，其图象散落在直线 $y=2x-1$ 上；

(2)数列的图象如图 1—1(b)，其图象散落在曲线 $y=2^x$ 上．

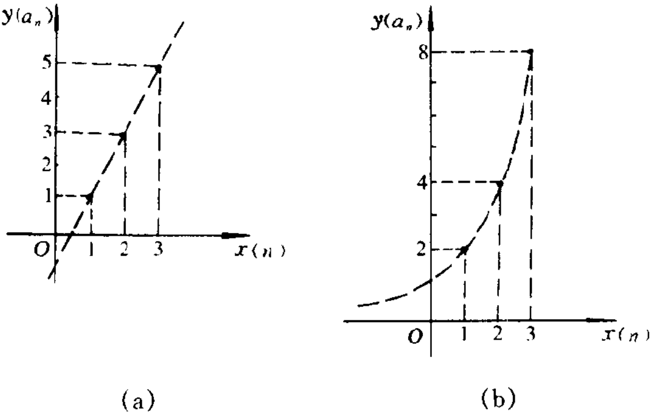


图 1—1

[导评]该例提出问题的本身并不重要，但它从函数的观点及“形”的角度帮助我们进一步认识了数列．

(二)通项公式的求法

数列的通项公式是数列的一种主要表现形式,它有多种求法.寻求数列的通项公式,有以下几种主要途径:

1. 用归纳法求通项

观察、分析数列各项中所含数字与其对应项数间的关系,注意到各项中所含数字间的区别和联系,并与一些已知通项公式的数列作比较,用来确定某些数列的通项公式的方法叫"归纳法".

例1 写出下列数列的一个通项公式:

(1)$1, -7, 13, -19, 25, \cdots$;

(2)$2, \frac{5}{2}, \frac{13}{4}, \frac{33}{8}, \frac{81}{16}, \cdots$;

(3)$\frac{2}{7}, \frac{4}{11}, \frac{1}{2}, \frac{4}{5}, 2, \cdots$;

(4)$1, 3, 3, 5, 5, 7, 7, 9, 9, \cdots$.

解:(1)原数列的各项可看成是数列

$$\{a_n\}: 1, -1, 1, -1, \cdots$$

与数列

$$\{b_n\}: 1, 7, 13, 19, 25, \cdots$$

对应项相乘的结果.

又 $a_n = (-1)^{n+1}, b_n = 1 + 6(n-1) = 6n - 5$,

故原数列的一个通项公式为

$$c_n = (-1)^{n+1}(6n-5).$$

(2)原数列可改写为

$$1+\frac{1}{2^0},2+\frac{1}{2^1},3+\frac{1}{2^2},4+\frac{1}{2^3},\cdots,$$

故其通项公式为

$$a_n=n+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

(3)这个分数数列中分子、分母的规律都不明显，不妨把分子变成4，然后看分母，从而有

$$\frac{4}{14},\frac{4}{11},\frac{4}{8},\frac{4}{5},\cdots,$$

分母正好构成等差数列，从而，原数列的通项公式为

$$a_n=\frac{4}{17-3n}.$$

(4)注意到此数列的特点：奇数项与项数相等，偶数项比项数大1. 故它可改写为

$$1+0,2+1,3+0,4+1,5+0,6+1,\cdots,$$

此数列可看成是数列

$$\{b_n\}:0,1,0,1,\cdots$$

与数列

$$\{c_n\}:1,2,3,4,5,\cdots$$

对应项相加的结果．又

$$b_n=\frac{1}{2}+\frac{(-1)^n}{2},$$

$$c_n=n,$$

所以原数列的通项公式为

$$a_n=n+\frac{1}{2}+\frac{(-1)^n}{2}.$$

[导评](1)观察是归纳的前提,合理的转换是完成归纳的关键.

(2)并非所有的数列都有通项公式.如无理数 π 的不足近似值形成的数列

$$3,3.1,3.14,3.141,3.1415,\cdots$$

就没有通项公式.

(3)由数列的前几项归纳出的通项公式不一定唯一.如数列 $5,0,-5,0,5,\cdots$ 的通项公式可为

$$a_n=5\sin\frac{n\pi}{2}(n\in\mathbf{N}^*),$$

亦可为

$$a_n=\frac{5}{2}[1-(-1)^n]\cdot(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n\in\mathbf{N}^*).$$

例2 根据下面各个数列的首项和递推公式,写出它的前4项并归纳出数列的一个通项公式.

(1) $a_1=1,a_{n+1}=2a_n+1(n\in\mathbf{N}^*)$;

(2) $a_1=1,a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+2}(n\in\mathbf{N}^*)$.

解:(1)由已知, $a_1=1$,

$$a_2=2a_1+1=3,$$

$$a_3=2a_2+1=7,$$

$$a_4=2a_3+1=15;$$

即

$$a_1=2-1,$$

$$a_2=2^2-1,$$

$$a_3=2^3-1,$$