离散数学结构导论

北京工业学院　王遇科　编

国防工业出版社

离散数学结构导论

北 京 工 业 学 院

王 遇 科 编

国 防 工 业 出 版 社

离散数学结构导论

北京工业学院 王遇科 编

国防工业出版社出版

北京市书刊出版业营业许可证出字第074号

解放军七二二六工厂印刷 内部发行

*

$787 \times 1092^{1}/_{16}$ 印张 19 448 千字

1979 年第一版 1979 年 12 月第一次印刷 印数 1—20,000 册

统一书号：N15034（四教013） 定价1.95元

内 容 简 介

“离散数学结构”是计算机科学的数学基础。全书共分九章，介绍了数理逻辑、集合论、代数结构、格论、布尔代数和图论，还涉及到了“离散数学结构”在计算机科学中的应用。附有习题和英汉术语对照表。

本书是计算机系统软件和系统硬件专业的试用教材。可供计算机工作者、应用计算机的工程技术人员、讯息科学工作者和数学工作者等参考。

前　言

如果说蒸汽机的发明，开辟了人类体力劳动机械化和自动化的新时代；那么，电子数字计算机的问世，则可以说是开辟了脑力劳动的机械化和自动化的新纪元。已经有大量事实证明了这一点，现在很少再有人表示怀疑了。

原有形式的体力劳动机械化和自动化了以后，又会产生新形式的体力劳动。这种不断替代而又不断产生的过程，不停地推动着社会生产力的快速发展和劳动生产率的持续提高。同样，原有形式的脑力劳动机械化和自动化了以后，又会产生新形式的脑力劳动。这种不断取代而又持续产生的过程，正在以空前的速度在前所未见的范围内，推动着社会生产力的发展和劳动生产率的迅速提高，并在某些方面改变着人类本身的生活方式。事实上，计算机的应用范围在迅速开拓和日渐扩大，这反过来又极大地推动着计算机科学本身的发展。无疑，这些都要求把计算机建立在强有力的理论基础之上。

自从电子计算机诞生以来，人们就在为它的进一步发展创建新的理论。自动机理论的建立，就是这样一种尝试。它对计算机功能的发展，建立新的计算机体系，逻辑设计以及编译过程自动化等等，都是很有益处的。与此同时，为了建立相应的理论，就要寻找合适的数学工具。例如，为了描述新开拓的应用领域中的各种数据结构，就需要有适宜的数学工具，以期在计算机上加以表达，并进行满足给定要求的运算等等。又如，也需要有适当的数学工具来描述计算机本身结构中的逻辑关系，并能在计算机上加以处理。

今天，计算机以空前未有的速度发展着，计算机科学中各分支领域的各种理论问题，交错地使用着现代数学的各种不同论题。为了计算机科学和讯息科学各专业的学生集中地掌握必备的数学工具，以便学习后续各门课程，在本书中，选中了一些必要的主干论题，可称之为“离散数学”。

在本书里，既不打算详尽地讨论计算机科学所涉及的全部数学论题，也不准备对选定的每一个论题作足够全面深入地阐述；相反，它仅是一个“导论”。本书的目的在于，尽可能地以数学的严谨方式，说明所选数学论题的基本术语、各种基本概念、基本定理、某些运算技巧以及这些论题在计算机科学某些方面的应用的举例。对数学论题应用方面的讨论，会帮助了解数学的抽象思想与计算机科学实践之间的内在联系，从而获得运用这些思想去解决实际问题的一定能力。

计算机工作者、对计算机感兴趣的工程技术人员、计算机科学与技术专业的学生，通过本书可对“离散数学”主干论题有个中等程度的了解，并可知道在现阶段上计算机科学运用着那些数学工具，为进一步钻研点明了目标；另一方面，对于掌握了这些论题的数学工作者来说，通过本书可以了解这些论题在计算机科学中的某些应用。

本书所阐述的数学论题是：数理逻辑、集合论、代数结构、格论、布尔代数和图论。无疑，所选的这些论题，不仅能为计算机系统软件专业与硬件专业的后续必修课提供比较坚实的数学基础，而且也会提供必要的数学手段。这些课程包括数据结构、自动机理论、可计算性理论、人工智能、形式语言及语法分析、开关理论、讯息管理与检索、高级程序设计语言

等等。

对组合、矩阵运算和数系有个粗浅的了解，就可以学习这门课程。当然，凡是接受过数学分析培训的初学者，在学习本门课程时，会感到更容易一些。

本书是一本专业基础课教材的试用本，适用于电子计算机系统软件和系统硬件专业。全书可供授课八十至一百学时。

浙江大学的俞瑞钊等同志和参加“离散数学”讨论班的三十九所高等院校的本门课主讲教师，对本书的手稿进行了认真的审阅，并提出了宝贵的修改意见。在此，编者对上述各位同志表示衷心的感谢。根据所提出的意见，编者对本书的手稿进行了修改。由于时间紧迫，有些意见待修订时再加以采纳。由于编者的业务水平所限，书中还会有错误和缺点，敬请读者指正。在编写过程中，深得贺仲雄和吴鹤龄二同志的大力帮助。有关高等院校的老师，在资料和初审方面，都给了大力的帮助和支持，这里一并表示感谢。在编写过程中，编者还参阅了吉林大学和上海师大编写的同类型教材，在此顺便表示谢意。

编　者

一九七九年八月

目　录

第一章　命题逻辑

引　　言

数理逻辑又名符号逻辑，是一门用数学方法研究推论过程的科学。

逻辑学很早就发展成了一门独立的科学，甚至先于算术和几何学。在其发展过程中，经历过一个长时期的停滞不前，近几十年来才开始得到巨大的发展。由于逻辑学中建立了符号体系，它就走上了发展的新阶段，完成了从旧逻辑学到新逻辑学(数理逻辑)的转变。符号体系的建立，对逻辑学的发展起了重大作用。这一本质性的转变，使逻辑学变成了数学性质的科学。它不但具有完善的方法，而且还为它建立了丰富的概念和定理。

公元前四世纪，希腊思想家亚里斯多德（Aristotle，公元前384～322)首创了逻辑学。而数理逻辑的创立人，则是十七世纪的德国哲学家莱布尼兹（Leibniz）。十九世纪中叶，英国数学家乔治·布尔（George Boole，1815～1864）发表了逻辑系统，此后，数理逻辑才开始真正发展起来。

逻辑学研究各种论证，可能是些有意义的一般论证，也可能是些科学理论中的数学证明或结论。建立逻辑学的主要目的，是在于探索出一套完整规则，按照这些规则就可以确定任何特定论证是否有效。这种规则，通常称为推论规则。

常常要把上述推论规则应用到各种领域中去，因而必须用概括性很强的语言表述它们，而且这种表述语言还必须独立于任何特定论证或所涉及到的学科。在逻辑学中，与其说注重的是论证本身，不如说注重的是论证形式。和其它科学理论一样，也可以把推论理论公式化。这样，依据各项规则并使用机械方法，不难确定论证的有效性。显然，这种确定论证有效性的过程，并不依赖于人们的主观世界对该论证的感觉如何。因此，用这种方法进行推论时，所遵守的规则必须是非二义性的。

为了表述任何成套规则或理论，都需要为它配置一种语言。几乎所有自然语言都具有二义性。具有二义性的自然语言，是不能正确地和充分地陈述上述的规则或理论。为此首先应该制定一种形式语言，或称为客观语言。在这种形式语言中，必须明确地和严格地定义好它的语法。事实上，科学领域中的所有学科都拥有自己的客观语言。这种客观语言包括有严格定义了的术语，以及使用这些术语的严格规定。例如数学中的情况就是如此。今天，代数学之所以能够获得如此巨大的进步，可以说主要是在于为它创造了一套形式语言。在数学中，用形式语言能够科学地处理它的对象；在数理逻辑中，形式语言也发挥着同样的有效作用。

在这一章的前半部分里，主要是叙述形式语言的制定和分析。在开关理论和计算机的逻辑设计中，这种形式语言得到了有成效的应用。

在研究客观语言时，需要使用一种自然语言。理所当然，应选定现代汉语作为工具，用它来描述客观语言中的各种命题。这里，现代汉语这个自然语言，称为元语言。在这个过程中，预期会遇到某些固有的困难。这是因为在研究一种严谨的语言时，却使用着一种不太严谨的语言。无疑，使用任何一种自然语言作为元语言，都会发生类似的情况，并不是现代汉

语所特有的。

为了避免前述的二义性，在客观语言中将使用一些符号，并给这些符号明确地作出定义。使用符号还有另外的意义，符号很容易书写和处理。由于在逻辑学中使用了符号，故数理逻辑也称为符号逻辑。

§1-1 命 题

命题逻辑的研究对象是命题。在本小节中，将阐明什么是命题，以及与命题相关联的若干基本问题。

1-1.1 命题和联结词

所谓命题，就是指具有真假意义的语句。例如：

"计算机科学是一门新兴科学"。

前面已经谈到客观语言。客观语言是由基本单元组成。设想客观语言中包含一些陈述性的语句。若再也不能把这种陈述性语句分解成更为简单的语句时，则这类最简单的语句就是些基本单元，通常称为原子命题或本原命题。命题可以是真的或者是假的，但不能同时为真又为假。也就是说，命题仅具有两种可能的真值："真的"和"假的"，且只能取其中之一。通常用大写英文字母 T 和 F 分别表示"真的"和"假的"真值；有时也用 1 和 0 表示它们。命题的真值具有客观性质。因为只有两种真值，所以这种逻辑有时称为二值逻辑。

在客观语言中，除了陈述性语句之外，不允许出现其它类型语句，例如感叹句、疑问句等等。下面给出一些语句的实例，并结合实例说明上述情况。

(1) 十是整数。

(2) 上海是一个村庄。

(3) 本命题是假的。

显然，命题(1)的真值是"真的"；而命题(2)的真值是"假的"。命题(3)乃是一个不符合前述定义的命题，因为无法给它指派适当的真值。如果给它指派"真的"真值，则语句(3)说明命题(3)是"假的"；若给它指派"假的"真值，则语句(3)暗指命题(3)是"真的"。下面再考察一些语句实例。

(4) $1+101=110$。

(5) 向右看齐！

(6) 我们这个地区四季如春。

(7) 今天是十五号。

不难看出，命题(4)的真值依赖于全文中的关系。若语句中的数是十进制的，则它是一个假命题；反之，若数是二进制的，则它是一个真命题。语句(5)不是一个命题，而是一个口令。命题(6)的真值因地区而异，只是在部份地区看是对的。命题(7)的真值因时间而异，每年只有十二天是真的。统观上述实例可以说，不是要事先估计到命题的实际真值，而感兴趣的是它有一个真值。

下面对命题的定义作进一步的说明。在客观语言中，有两类陈述语句：第一类是本原语句，常用大写英文字母 A，B，$C\cdots$，P，Q，$\cdots$表示它们；第二类语句是复合语句。使用称为联结词的符号和某些标点符号如圆括号等，把本原语句联结起来，就可构成复合语句。也可以给复合陈述语句指派两种可能的真值之一，且仅取其一。这种陈述性语句就是命题，由它的内容就可断定是真的或是假的。

前面所考察过的命题实例，都是些本原命题或原子命题。使用适当的联结词，可以把原子命题组合成复合命题或分子命题。

在现代汉语中，常使用一些联结词，不过人们经常在不同的意义上使用它们。因此，需要给某些具有确定意义的联结词集合作出严格定义，并用符号表示它们。将会看到，可以把命题与联结词定义成一种代数，它能够满足各种性质的要求。

前面曾经提到过用大写英文字母表示命题。可以用一个字母表示任意的命题。因此，可以用“P”表示某个特定命题，也可以把“P”用作任意命题的位置标志符。这就是说，可以用同一个符号表示称为常量的确定命题，也可以用它来表示称为变元的任意命题。

若用“P”表示现实命题，则“P”的真值就是现实命题的真值。若把“P”用作命题变元，则它没有真值。在符号逻辑中，它不代表一个命题。可以用一个命题取代它，这样才能确定出“P”的真值。在这种情况下，常称呼“P”是一个“命题公式”。为了简便起见，常常把“命题公式”也称为命题。

下面就来定义某些联结词。

如果用“P”表示一个命题，那么可以把“P”的否定写成“$\neg P$”，并读作“非 P”。“非P”是真，当且仅当“P”是假。这就是说，若“P”的真值是 **T**，则“$\neg P$”的真值是 **F**；反之，如果“P”的真值是 **F**，则“$\neg P$”的真值是 **T**。可以用表 1-1.1 说明否定的定义。

表 1-1.1 否定的真值表

P	¬P	P	¬P
F	**T**	0	1
T	**F**	1	0

下面就来说明如何构成命题的否定。为此考察命题

P：天津是一个城市。

于是 $\neg P$ 是命题

$\neg P$：天津不是一个城市。

这里用符号“$\neg$”表示命题的否定。在逻辑学的书籍中和某些程序语言中，普遍采用了这种表示法。例如，程序设计语言 **PL/1** 中的情形就是如此。

虽然否定仅修改了命题，但仍然称它为联结词。在这种意义上讲，否定是一个一元运算。它对一个单独的命题或变元进行运算，从而能够生成其它新的命题。

另外一个联结词是合取。给定两个命题 P和Q，P 和 Q 的合取生成一个新的命题$P\wedge Q$，

读作“P与Q”。当且仅当P和Q的真值全是T，命题$P\wedge Q$的真值才是T；否则，$P\wedge Q$的真值是F。可以用表1-1.2定义联结词合取。

表1-1.2 合取真值表

P	Q	P∧Q
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

P	Q	P∧Q
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

例1. 生成下列命题的合取：

P：我们去植树。

Q：房间里有一台电视机。

解：我们去植树与房间里有一台电视机。

在日常语言中，常把合取“与”用于具有某种关系的两个命题之间；而在逻辑学中则不然。这样，命题“今天下大雨与$3+3=6$”听起来是很奇特无味的；但在逻辑学中，完全允许用两个原子命题“今天下大雨”和“$3+3=6$”生成新的命题。

例2. 将下列命题变换成符号形式的命题：

张明与李华在吃饭

解：为了写成两个命题的合取，应首先把上述命题译义成

张明在吃饭与李华在吃饭。

如果再表示成

P：张明在吃饭。

Q：李华在吃饭。

则可把给定命题写成符号形式的命题$P\wedge Q$。

不难看出，可以把符号∧看成是现代汉语中联结词“与”、“和”、“并”等的翻译。然而在现代汉语中，有时在各种不同意义上使用联结词“与”，因此不能一概用符号∧去翻译它们。为了说明这种区别，试考察命题：

(1) 苹果是红的与香蕉是黄的。

(2) 他打开箱子并拿出一件衣服来。

(3) 张小明与张小华是堂兄弟。

命题(1)中的合取“与”同符号∧具有同样的意义。命题(2)中，“拿出一件衣服来“所描述的行动，是发生在“他打开箱子”所描述的行动之后，因此，字词“并”是“于是”的意思。命题(3)中的字词“与”，不是一个合取。就P和Q而论，合取的定义是对称的。也就是说，对于P和Q的规定值，$P\wedge Q$和$Q\wedge P$的真值相同。如果把命题(1)改写成

香蕉是黄的与苹果是红的，

则不会改变命题的真值。另一方面，绝不可以把命题(2)改写成

拿出一件衣服来与他打开箱子。

这些实例表明，符号∧具有特定的意义。可以看出，在联结两个命题从而形成新的命题这个意义上说，合取是一个二元运算。

还有一个常用联结词是析取。给定两个命题P和Q。P和Q的析取是命题$P\vee Q$，读作“P或Q”。当且仅当P和Q的真值全是**F**，命题$P\vee Q$的真值才是**F**；否则$P\vee Q$的真值为**T**。可用表1-1.3定义联结词析取。

表1-1.3 析取真值表

P	Q	P∨Q
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

P	Q	P∨Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

由析取的定义可以看出，联结词∨的意义并不总是与字词“或”的意义相同。在现代汉语中，联结词“或”实际上有“排斥或”和“可兼或”之分，“或”可用作“排斥或”或者“可兼或”。为了说明这种区别，试考察下列命题：

（1）灯泡有故障或开关有故障。

（2）通过电视看杂技或到剧场看这场杂技。

（3）今天张小明钓到二十条或三十条鱼。

在命题（1）中，无疑是指出了一种可能性或另外一种可能性，或者二者皆有。这里的“或”显然是“可兼或”。命题（2）中的联结词“或”，是在排斥意义上使用的，也就是说存在一种或另外一种可能性，但二者不能同时存在。这种联结词有时也称为“异或”。这里用符号$\overline{\vee}$表示“异或”，并在表1-1.4中给出了“异或”的定义。

表1-1.4 异或真值表

P	Q	$P\overline{\vee}Q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

P	Q	$P\overline{\vee}Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

命题（3）中的字词“或”，是用来指出鱼的近似数目，而不是联接词。由析取的定义可知，显然联结词∨是“可兼或”。

在日常语言中，通常是在具有某种关系的两个命题之间使用析取“或”；在逻辑学中使用析取时，在被联结的命题之间并不要求有任何关系存在。命题$P\vee Q$的真值，仅取决于P和Q的真值。

习题 1-1.1

1） 使用下列命题：

P：林芳在看电视。

Q：林芳在家里。

R：林芳在做家庭作业。

以符号形式写出下列命题：

a) 林芳或是看电视，她或是在家里。

b) 林芳既不看电视也不做家庭作业。

c) 林芳在看电视并不做她的家庭作业。

d) 林芳在家里做她的家庭作业，并没有看电视。

2) 试否定下列命题：

(a) 上海是一个小城镇。

(b) 每一个自然数都是偶数。

1-1.2 条件命题和双条件命题

给定任何两个命题 P 和 Q。用"如果…，则…"把两个命题联结起来，就会得到一个复合命题 $P \to Q$，称它为条件命题，并读作"如果 P，则 Q"。这里，当 P 的真值为 **T** 和 Q 的真值为 **F** 时，命题 $P \to Q$ 具有真值 **F**；否则它的真值为 **T**。在表 1-1.5 中给出了条件命题的定义。

表 1-1.5 条件命题的真值表

P	Q	P→Q	P	Q	P→Q
F	**F**	**T**	0	0	1
F	**T**	**T**	0	1	1
T	**F**	**F**	1	0	0
T	**T**	**T**	1	1	1

条件命题 $P \to Q$ 中，命题 P 称为 $P \to Q$ 的前件或前提；命题 Q 称为 $P \to Q$ 的后件或结论。由表 1-1.5 可知，在下列三种情况下：

(1) 前件和后件都为假；

(2) 前件为假而后件为真；

(3) 前件和后件都为真；

条件命题都是真的。只有当前件为真而后件为假时，条件命题才为假。因此当断定条件命题的真值时，应首先观察是否存在后面一种情况。

例 1 用汉语表达命题 $P \to Q$，这里

P：我拿起这本书。

Q：就一口气读完这本书。

解：如果我拿起这本书，则就一口气读完它（这本书）。

因为后件"就一口气读完它"，是归因于前件中谈到的这本书，所以这个命题听起来就是合乎情理的。若考察这样一个命题：如果月亮出来了，则三乘三等于九。在日常语言中，

这个命题是毫无意义的。但由于它满足条件命题的定义，因而在逻辑学中则是完全可以接受的。为了组成命题 $P\to Q$，在前件P和后件 Q 之间不要求有任何类型的关系存在。这种条件命题有时称为实质条件命题。

我们的日常语言则不同，使用条件命题时常受到限制。通常，只有当两个命题间有某种形式上和内容上的联系时，才可以用“如果…，则…”把它们联结起来。这种条件命题有时称为形式条件命题。

我们约定，下面当不加区别地使用术语“条件命题”时，这意味着是指实质条件命题而言。

在汉语中还有这种情形，可以用同一个符号$\to$正确地翻译各种不同的表达式。例如，可用 $P\to Q$ 表示“假若 P，那么 Q”，“对于 Q 来说，P 是充分的”等等。

在数学或其它一些逻辑学著作中，条件命题“如果 P，则 Q”和“P 蕴涵 Q”，在使用上是等价的，亦即是可互换的，甚至二者是指同一个关系而言。不过在这本书里，打算在另外一种定义上使用“蕴涵”这个术语。

例 2　试用符号形式写出下列命题：

如果张小明学日语或张小华学德语，则林芳学英语。

解：表达命题如下：

M：张小明学日语。

H：张小华学德语。

L：林芳学英语。

可用符号形式把上述命题写成

$$(M\vee H)\to L$$

这里的圆括号所具有的意义，与初等代数中的圆括号的意义相同，后面还要详加说明。

给定两个命题 P 和 Q，复合命题 $P\rightleftarrows Q$ 称为双条件命题，并读作“P 当且仅当 Q”，也可以简写成“$P_{iff}Q$”或“$P\longleftrightarrow Q$”。每当 P 和 Q 的真值相同时，双条件命题 $P\rightleftarrows Q$ 就具有真值 **T**。在表 1-1.6 中给出了双条件命题的定义。

表 1-1.6　双条件命题真值表

P	Q	$P\rightleftarrows Q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

P	Q	$P\rightleftarrows Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

下面将会看到，双条件命题等价于相应的命题公式。

1-1.3　命　题　公　式

前面已经谈到，由一个或多个本原命题和联结词，可以组成复合命题。设 P 和 Q 为任意两个命题，可用 P 和 Q 构成一些复合命题如：