普通高等教育"九五"教育部重点教材

# 弹性力学

# ELASTICITY

吴家龙 编著

高等教育出版社

ICITY
ICITY
ICITY
ICITY

738

普通高等教育"九五"教育部重点教材

# 弹性力学

# Elasticity

吴家龙 编著



高等教育出版社

·北京·

## 内容简介

本书为普通高等教育“九五”教育部重点教材，主要供高等学校工程力学专业作教材之用

全书共十四章和两个补充材料，按应力、应变分析、应力应变关系、弹性力学的一般原理、平面问题的解答、空间问题的解答、热应力、弹性波的传播、弹性薄板的弯曲和弹性力学的变分解法的顺序编排。既包括了经典内容，又反映了该学科领域的若干新发展。内容选择和叙述方法方面，在充分注意理论的系统性、完整性和严密性的前提下，更注重深入浅出，重点突出，难点分散，联系工程实际，强调问题的物理本质，便于学生理解和掌握。两个附录为：笛卡儿张量简介和弹性力学基本方程的曲线坐标形式。

本书还可作为工科研究生和相关专业本科生的教材或教学参考书，也可供研究人员和工程技术人员参考。

**图书在版编目(CIP)数据**

弹性力学/吴家龙编著.—北京：高等教育出版社，2001
普通高等教育“九五”教育部重点教材
ISBN 7-04-009264-6

Ⅰ.弹… Ⅱ.吴… Ⅲ.弹性力学-高等学校-教材
Ⅳ.O343

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 07880 号

**责任编辑** 黄　毅　**封面设计** 刘晓翔　**责任绘图** 朱　静
**版式设计** 马静如　**责任校对** 王效珍　**责任印制** 杨　明

弹性力学
吴家龙　编著

| | | | |
|---|---|---|---|
| **出版发行** | 高等教育出版社 | | |
| **社　址** | 北京市东城区沙滩后街 55 号 | **邮政编码** | 100009 |
| **电　话** | 010-64054588 | **传　真** | 010-64014048 |
| **网　址** | http://www.hep.edu.cn<br>http://www.hep.com.cn | | |
| **经　销** | 新华书店北京发行所 | | |
| **排　版** | 高等教育出版社照排中心 | | |
| **印　刷** | 北京联华印刷厂 | | |
| **开　本** | 787×960　1/16 | **版　次** | 2001 年 6 月第 1 版 |
| **印　张** | 30 | **印　次** | 2001 年 6 月第 1 次印刷 |
| **字　数** | 560 000 | **定　价** | 38.60 元 |

# 前　言

本书的编写工作始于1964年,后因故中止。1978至1979年间,因同济大学工程力学专业和工科研究生教学的需要,又陆续写完了本书的其余部分,并于1981年印成铅印本,取得了较好的使用效果。在经过近六年的使用后,对本书作了较大的修改和充实,1987年由同济大学出版社出版。同年,经国家教委高等工业学校力学专业教材编审委员会审定,被推荐为工程力学专业的教学用书。1992年,根据同济大学和兄弟院校在使用中提出的意见和建议,及国家教委高等工业学校工程力学专业教材编审委员会的审阅意见,又对本书作了认真的修改,1993年,再由同济大学出版社出了新一版。1995年,本书新一版获第三届全国普通高等学校优秀教材国家教委二等奖。在国家教委制订"九五"教材规划时,本书经申报被列为普通高等教育"九五"教育部重点立项教材,经专家正式评审并按评审意见修改后由高等教育出版社出版。现将本次修改情况简要地说明如下。

在"应变状态理论"这一章中,增加了相对位移张量的概念,并将这章第二节的标题更名为"相对位移张量　转动分量"。在这章的第三节"转轴时应变分量的变换　应变张量"中,原来的推导过于繁琐冗长,现借助于方向导数的概念,不仅使推导简洁明了,而且几何意义也十分清晰。这章还对第四节"主应变　应变张量不变量"和第六节"体应变"的推导作了修改。

在原"弹性力学问题的建立"这章中,增加了"弹性力学的一般原理"一节,并将这章的标题改为"弹性力学问题的建立和一般原理。"在这章的第一节"弹性力学的基本方程及其边值问题"中,原书将应变协调方程也纳入基本方程,修改后明确指出弹性力学的基本方程包括平衡(运动)微分方程、几何方程和物理方程,在应力解法中,才提出应变协调方程并说明其应用。

原书中"弹性力学方程的通解及其应用"的内容过于庞杂,修改后删去了"弹性力学应力通解"的全部内容;在"齐次拉梅方程的通解"这一节中,除原有的"布西内斯克－伽辽金通解"和"纽勃－巴博考维奇通解"保持不变外,还简要地介绍了位移通解的其他形式。该章的标题改为"空间问题的解答"。

在"热应力"这章中,增加了"热传导方程及其定解条件"一节。在"弹性波的传播"这章里,增加了"一般的平面波"和"平面波在平面边界上的反射和折射"两节的内容。在"弹性力学的变分解法"这章的最后,增加了"作为古典变分法革

新和发展的有限单元法”一节，其中通过平面问题线性位移模式的有限单元法，简要地阐述了有限单元法的基本步骤及其与古典变分法之间的本质联系

本书还对一些章节在文字上作了较大的修改。

为使难点分散，便于学生理解和掌握，本书的体系未作变动。仍将“笛卡儿张量简介”和“弹性力学基本方程的曲线坐标形式”作为补充材料附在正文后面前者可在讲完了弹性力学的基本方程以后，或在讲“弹性力学的变分解法”之前，再向学生讲授；后者，由于受学时的限制，一般只能供学生作参考之用，但在“空间问题解答”这章中，将直接引用该补充材料所获的结果。多年的教学实践表明，本书的体系安排，是比较适合于多数学校的教学要求的。

鉴于目前各校工程力学专业弹性力学的课时都有所削减，为突出基础和重点内容，本书除原带星号 * 的内容保持不变外，又对部分章节标上了星号 *。对选用本书作为工程力学专业教材的学校，可根据教学时数、学生的基础状况和后继课程的教学需要，作适当的取舍。但这些章节对工科专业研究生来讲，多数仍是重要的教学内容。

本书长期被用作同济大学工科有关专业本科生的教材，内容安排是这样的：第二至第四章，着重介绍弹性力学的基本方程以及它们的物理意义和几何意义，除物理方程直接引出不作推导外，其余的都要作较详细的推导；第五至第七章，除带星号 * 的内容外，一般都可列入教学范围；第九章只讲柱体扭转的应力解部分(不含薄壁杆扭转)；第十章只介绍工程和后继课程中用到的几个重要的结果，不作推导；第十三章重点介绍矩形薄板的弯曲，对圆板只作一般介绍；第十四章只介绍位移变分方程、最小势能原理及其在近似计算中的应用。根据我们多年的教学实践，讲授上述这些内容只需 51 至 54 学时，且能取得较好的教学效果。

清华大学徐秉业教授和河海大学卓家寿教授认真地审阅了本书的修改计划和修改后的原稿，并提出了许多宝贵意见；同济大学的夏志皋、唐寿高教授也为本书的修改提供了不少帮助，对此，一并表示衷心的感谢。

吴家龙

1999 年 6 月于同济大学

# 第一章 绪 论

## §1－1 弹性力学的任务和研究方法

弹性力学又称弹性理论，是固体力学的一个分支，它的任务是研究弹性体在力和温度变化等外界因素作用下所产生的应力、应变和位移，从而解决各类工程中所提出的强度、刚度和稳定问题，使经济与安全这对矛盾得到更好的统一。它是一门理论性和实用性都很强的学科。

**弹性**，几乎是所有固体的一种固有的物理属性，而**完全弹性体**，则是指在引起其变形的外界因素被消除以后能完全恢复原状的物体，简称为**弹性体**。大量的实验表明，像钢一类材料的物体，如果其内各点的应力不超过弹性极限，则是一种理想的完全弹性体，而且应力和应变之间呈线性关系；但也有一些材料，例如橡皮和某些有色金属，却具有非线性的弹性性质。我们称前者为物理线性的，而后者为物理非线性的。

弹性力学与材料力学相比，在任务、研究对象和研究方法等方面，既有相同之处，也有不同之处。

如前述，弹性力学的任务是要解决构件的强度、刚度和稳定问题，而材料力学所研究的范围，还涉及到疲劳、蠕变、塑性变形以及构件破坏规律等问题。

从研究对象来看，弹性力学既研究杆状构件，也研究诸如深梁、板壳以及挡土墙、堤坝、地基等实体结构；而材料力学基本上只研究杆状构件，这种构件在拉压、剪切、扭转和弯曲情况下的应力和变形，是材料力学的主要研究内容。

从研究方法看，弹性力学根据六条基本假设，从问题的静力学、几何学和物理学三方面出发，经过严密的数学推导，得到弹性力学的基本方程和各类边界条件，从而把问题归结为线性偏微分方程组的边值问题。而材料力学在研究杆状构件的拉伸、压缩、扭转和弯曲问题时，也要用到弹性力学的六条基本假设，同时也要从问题的静力学、几何学和物理学三方面出发，但为了简化计算，大都还对构件的应力分布和变形状态作出某些附加的假设。

例如，在材料力学里研究直梁在横向荷载作用下弯曲时，引进了“平截面假设”，由此得出的结果是，横截面上的弯曲应力沿梁高按直线分布。但用弹性力学方法求解这一问题时，就无须引进这个假设，相反地，还可以利用弹性力学的

结果来校核这个假设是否正确，并说明由于引进了这个假设以后，对于具有不同的跨度和高度之比的梁来说所引起的误差，从而可以确定这个假设所带来的条件性和局限性。

又例如，在材料力学里计算带孔构件拉伸时，假定拉应力在净截面上是均匀分布的。但在弹性力学里，就不需要作出这个假定，而且它的计算结果表明，净截面上的拉应力远非均匀分布，而要在孔边附近发生高度的应力集中现象，孔边的最大拉应力会比平均应力高出若干倍。

弹性力学作为一门基础技术学科，是近代工程技术的必要基础之一。在造船工业中，船体结构的强度、刚度计算，要直接应用弹性力学的理论和方法。在航空工业中，尤其是航天工业的发展，不断地对弹性力学提出新的任务，并由此而形成了新的分支——空气弹性力学。在重型机器、精密机械和化工机械中，对于机器部件在各种工作条件下的强度和刚度的研究，也广泛地应用弹性力学的结论和公式。在水利工程和土建工程中，工程技术人员往往直接利用弹性力学方法作为设计的理论基础。在地震学中，根据弹性波在地壳中传播的研究结果，计算出震源所在的位置，并研究地震波传播的规律性。

弹性力学又可作为一门基础理论学科。物理学家在研究光波理论时引用了弹性力学。近几十年来，人们还把弹性力学的理论和方法应用于生物力学等边缘学科的研究。

解决工程中提出的弹性力学问题有理论计算和实验两大手段。由于理论计算遇到了复杂的偏微分方程和偏微分方程组的定解问题，所以人们早就寻找各种近似的计算方法，以克服这些数学上所出现的困难。随着电子计算机、尤其是微型计算机的发展和普及，弹性力学（包括固体力学的其他分支）的各种数值方法和半解析数值方法也有了迅猛的发展。其中最具代表性的有：以弹性力学基本方程为控制方程的差分法，以弹性力学的变分原理为控制方程的有限单元法和以弹性力学边界积分方程为控制方程的边界元法。差分法是弹性力学中一种比较古老的数值方法，目前在水工结构等工程问题中仍常被采用。有限单元法被用于解决弹性力学问题至今只有近 40 年的历史。由于它所具有的灵活性和通用性，因此备受工程界的欢迎。它的发展，是用弹性力学解决工程问题的重大突破。但由于它是一种纯数值的方法，因此不可避免地带来了自由度多、内存量大的不足。随后发展起来的各种半解析数值方法克服了以上这些缺点，更便于在微机上实现，这为用弹性力学方法解决工程问题开辟了更为广阔的前景。

## §1－2　弹性力学的基本假设

在弹性力学中，为了能通过已知量（如物体的几何形状和尺寸、物体所受的

外力或几何约束)求出应力、应变和位移等未知量,首先要从问题的静力学、几何学和物理学三方面出发,建立这些未知量所满足的弹性力学基本方程和相应的边界条件。由于实际问题是极为复杂的,是由多方面的因素构成的,所以,如果我们不分主次地将全部因素都考虑进来,则势必会造成数学推导上的困难,而且,由于导出的方程过于复杂,实际上也不可能求解。因此,通常必须按照物体的性质以及求解的范围,忽略一些可以暂不考虑的因素,而提出一些基本假设,使我们所研究的问题限制在方便可行的范围以内。在以后的讨论中,如果不特别指出,将采用以下六条基本假设。

### 1. 连续性假设

弹性力学作为连续介质力学的一部分,它的基本前提是将可变形的固体看作是连续密实的物体,即组成物体的质点之间不存在任何空隙。从这条假设出发,我们可以认为应力、应变和位移等是连续的,它们可表示成坐标的连续函数,因而在作数学推导时可方便地运用连续和极限的概念。事实上,一切物体都是由微粒组成的,都不可能符合这个假定。但可以想象,当微粒尺寸以及各微粒之间的距离远比物体的几何尺寸小时,运用这个假设并不会引起显著的误差

### 2. 均匀性假设

假设所研究的物体是用同一类型的均匀材料组成的,因此各部分的物理性质(如弹性)都是相同的,并不会随着坐标位置的改变而发生变化。根据这个假设,我们在处理问题时可取出物体内任一部分进行分析,然后将分析的结果用于整个物体。如果物体由两种或两种以上的材料组成的,例如混凝土,那么,只要每种材料的颗粒远远小于物体的几何尺寸,而且在物体内均匀分布,从宏观意义上说,可认为是均匀的。

### 3. 各向同性假设

假设物体在不同的方向上具有相同的物理性质,因而物体的弹性常数不随坐标方向的改变而改变。单晶体是各向异性的,木材和竹材是各向异性的 钢材虽然由无数个各向异性的晶体组成,但由于晶体很小,而且排列是杂乱无章的,所以从宏观的意义上说它是各向同性的。

### 4. 完全弹性假设

完全弹性的含义已在§1－1中讲过,这里不作重复。本教程只研究应力和应变呈线性关系的情况,这时,各个弹性常数就不随应力或应变的大小而改变。这个假设又称**物理线性的假设**。

**5. 小变形假设**

假设物体在力和温度变化等外界因素作用下所产生的位移远小于物体原来的尺寸，因而应变分量和转角都远小于1。应用这条假设，可以使问题大为简化。例如，在研究物体的平衡时，可不考虑由于变形引起的物体尺寸和位置的变化；在建立几何方程和物理方程时，可以略去应变、转角的二次幂或二次乘积以上的项，使得到的关系式都是线性的。这个假设又称**几何线性的假设**。

**6. 无初始应力假设**

假设物体处于自然状态，即在力和温度变化等外界因素作用之前，物体内部是没有应力的。根据这条假设，由弹性力学求得的应力仅仅是由外力或温度变化所引起的。如果物体内有初始应力存在，只须与用弹性力学方法求得的由外界因素引起的应力相加即可。

在上述假设基础上建立起来的弹性力学称为**数学弹性力学**；由于所导得的弹性力学基本方程是线性的，故又称为**线性弹性力学**。如果在此之外还对变形或应力分布作出某种附加假设，例如梁弯曲时的平截面假设，板壳弯曲时的直法线假设等等，从而使问题在符合工程要求的精度下得到进一步的简化，使之更便于求解和应用，我们称这种弹性力学为**应用弹性力学**。本书除第十三章外，均属于数学弹性力学的范畴。

## §1－3 弹性力学的发展简史

弹性力学的发展大致可以分为四个时期。

发展初期主要是通过实验探索物体的受力与变形之间的关系。1678年，胡克(Hooke，R.)在大量实验的基础上，揭示了弹性体的变形和受力之间成正比例的规律，后来被人们称为胡克定律。1687年，牛顿(Newton，I.)确立了运动三大定律，同时，数学也在飞速发展，这就为弹性力学数学物理方法的建立奠定了基础。

第二个时期是弹性力学的理论基础建立期，一般认为这一时期是从纳维(Navier，C.－L.－M.－H.)和柯西(Cauchy，A.－L.)提出弹性力学的基础问题开始，到格林(Green，G.)和汤姆逊(Thomson，W.)确立各向异性体有21个弹性系数为止(1821—1855).17世纪末，人们已着手进行杆件性能的研究，包括梁的弯曲理论、直杆的稳定和振动等，但这些成果都归属于材料力学的范畴。直到19世纪20年代，纳维和柯西建立了弹性力学的数学理论之后，才使它成为一门独立的分支。1822—1828年之间，柯西发表了一系列论文，明确提出了应力和

应变的概念，建立了弹性力学的平衡（运动）微分方程、几何方程和各向同性的广义胡克定律；1838 年，格林用能量守恒定律证明了各向异性体有 21 个独立的弹性系数；稍后，汤姆逊又用热力学第一定律和第二定律证明了同样的结论，同时再次肯定了各向同性体有 2 个独立的弹性系数。他们的这些工作，为后来弹性力学的发展奠定了牢固的理论基础。

第三个时期是线性各向同性体弹性力学的发展时期。这个时期的主要标志是弹性力学广泛应用于工程实际问题，同时，在理论方面建立了许多定理和重要原理，并提出了许多有效的计算方法。例如 1850 年，基尔霍夫（Kirchhoff, G. R.）解决了平板的平衡和振动问题 ；1855—1856 年间，圣维南（Saint - Venant, A. J. C. B. de）在其“柱体的扭转和弯曲”的论文中，提出了局部性原理和半逆解法；1862 年，艾里（Airy, G. B.）解决了弹性力学的平面问题；1881 年，赫兹（Hertz, H. R.）解决了弹性体的接触问题，1898 年，基尔斯（Kirsch, G）提出了应力集中问题的求解方法。这个时期，在理论方面的主要成果是建立了各种能量原理，并提出了基于这些原理的近似计算方法。在建立了弹性力学的基本方程后不久，就建立了弹性体的虚功原理和最小势能原理。1872 年，贝蒂（Betti, E.）建立了功的互等定理。1873 年至 1879 年间，卡斯蒂利亚诺（Castigliano, A.）建立了最小余能原理。瑞利（Rayleigh, Lord）和里茨（Ritz, W.）分别于 1877 年和 1908 年，从弹性体的虚功原理和最小势能原理出发，提出了著名的瑞利 - 里茨法。1915 年，伽辽金（Галёркин, Б. Г.）提出了伽辽金近似计算方法。20 世纪 30 年代，穆斯赫利什维利（Мусхелищвили, Н. И.）发展了用复变函数理论求解弹性力学问题的方法，并建立了一套完整的理论。在这个时期，积分变换和积分方程在弹性力学中的应用也有新的发展。

第四个时期是弹性力学的分支及与之相关的边缘学科形成和发展时期，大致从 20 世纪 20 年代开始。在 1907 年卡门（Kàrmàn, T. von）提出了薄板的大挠度问题后，1939 年，他又和钱学森提出了薄壳的非线性稳定问题。在 1937—1939 年间，莫纳汉（Murnaghan, F. D.）和毕奥（Biot, M. A.）提出了大应变问题在 1948—1957 年间，钱伟长用摄动法求解了薄板的大挠度问题。他们的这些工作，为非线性弹性力学的发展作出了重要的贡献。在这个时期，薄壁构件和薄壳的线性理论有了较大的发展，还形成了诸如厚板与厚壳理论、各向异性和非均匀体的弹性力学、热弹性力学、粘弹性理论、水弹性理论以及气动弹性力学等新的分支和边缘学科。这个时期弹性力学的近似计算方法也有很大的突破，相继提出了诸如差分法、有限单元法、边界元法、半解析数值法以及加权残值法等数值法和半解析半数值的方法。这些新领域的开拓和计算弹性力学的发展，大大丰富了弹性力学的内容，促进了有关工程技术的发展。这里，值得一提的是，胡海昌于 1954 年建立了三类变量的广义势能原理和广义余能原理；1955 年，鹫津久

一郎也独立地导出了这一原理，所以现在人们称之为胡海昌－鹫津久一郎变分原理。在 1960—1978 年间，钱伟长在这方面也做了大量的工作。他们的这些成就，为有限单元法和其他数值或半数值半解析方法的进一步发展奠定了坚实的理论基础。

# 第二章　应力状态理论

弹性力学所研究的都是超静定问题。要解决超静定问题,必须考虑静力学、几何学和物理学三方面的条件,缺一不可。本章的任务是要从静力学观点出发,分析一点的应力状态,并建立连续介质力学普遍适用的平衡微分方程和应力边界条件。在本章的推导中,我们将忽略物体的变形,显然这对小变形物体来说是不会引起明显误差的。

## §2-1　体力和面力

作用在物体上的外力有两种类型,即**体力**和**面力**。所谓体力,是指分布在物体内所有质点上的力,例如重力、惯性力和电磁力等。所谓面力,是指作用在物体表面上的力,例如风力、液体压力和两个物体间的接触压力等。在直角坐标系里,用 $F_x, F_y, F_z$ 和 $\bar{f}_x, \bar{f}_y, \bar{f}_z$ 表示单位体积的体力和单位面积的面力的 3 个分量。它们的量纲分别为 $\mathrm{MT^{-2}L^{-2}}$ 和 $\mathrm{MT^{-2}L^{-1}}$,单位分别为 $\mathrm{N/m^3}$ 和 $\mathrm{N/m^2}$。

## §2-2　应力和一点的应力状态

一个在外界因素(外力、温度变化等)作用下的物体,其内各部分之间要产生相互的作用。这种物体内的一部分与其相邻的另一部分之间相互作用的力,称为**内力**。

为了暴露内力,我们假想通过物体内任意一点 $M$ 作法线方向为 $\boldsymbol{v}$ 的微小面 $\Delta S$,此微小面把物体在 $M$ 点的微小邻域分割成两部分,如图 2-1 所示。由割离体法可知,物体在 $M$ 点的微小邻域被切成两部分以后,在其被切割的表面处,必须用内力 $\Delta \boldsymbol{F}$ 和 $\Delta \boldsymbol{F}'$ 代替。显然,这里的 $\Delta \boldsymbol{F}$ 和 $\Delta \boldsymbol{F}'$ 是作用力和反作用力的关系,因此,只要考虑其中之一即可。为确定起见,不妨留下图 2-1a 所示的那一部分。

根据物体连续性的假设,可以认为作用在微小面 $\Delta S$ 上的力是连续分布的,内力 $\Delta \boldsymbol{F}$ 则是这个分布力的合力。于是分布集度为 $\dfrac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta S}$,称为**平均应力**。如果将 $\Delta S$ 取得很小很小,用数学的语言讲,即令 $\Delta S$ 趋向于零,则 $\dfrac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta S}$ 的极限 $\boldsymbol{f}_v$ 就称为

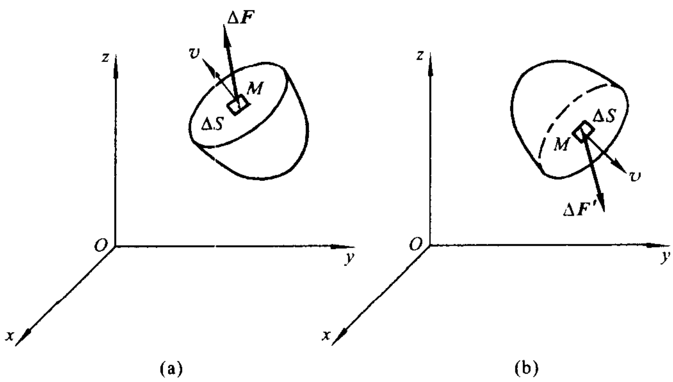


图 2-1

**应力**,记作

$$f_v = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} \tag{2-1}$$

$f$ 右下角的 $v$ 表示微分面的法线方向,用以表示应力作用面的方位。

在给定的直角坐标系下,应力矢量 $f_v$ 可沿 3 个坐标轴方向分解,如以 $f_{vx}$,$f_{vy}$,$f_{vz}$ 表示其分量(图 2-2),则有

$$f_v = f_{vx}e_1 + f_{vy}e_2 + f_{vz}e_3 \tag{2-2}$$

这里的 $e_1$,$e_2$,$e_3$ 分别表示坐标单位矢量。另一方面,应力矢量 $f_v$ 又可沿微分面 $\Delta S$ 的法线方向和微分面方向上分解。如分别用 $\sigma_v$ 和 $\tau_v$ 表示其分量,则 $\sigma_v$ 称为**正应力**;$\tau_v$ 称为**切应力**,如图 2-3 所示。

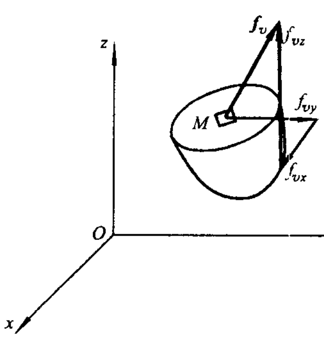


图 2-2

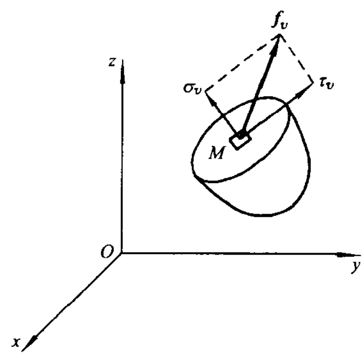


图 2-3

必须指出,凡提到应力,应同时指明它是对物体内哪一点并过该点的哪一个微分面来说的。因为,通过物体内同一点可以作无数个方位不同的微分面。显然,各微分面上的应力一般说是不同的。我们把物体内同一点各微分面上的应

力情况,称为**一点的应力状态**。分析一点的应力状态,对于研究物体的强度是十分重要的。

为了表示一点的应力状态,我们过物体内某一点 $M$ 分别作 3 个彼此垂直的微分面,使之与坐标平面平行,则此 3 个微分面分别把物体在 $M$ 点的微分邻域分割成前后、左右以及上下两部分(这里假定取 $x$ 轴垂直纸面而指向读者,$z$ 轴垂直向上)。我们只保留其表面外法线方向和坐标轴正方向一致的那一部分(图 2-4)。根据前面的规定,这 3 个微分面的应力矢量可分别表示为 $\boldsymbol{f}_x,\boldsymbol{f}_y,\boldsymbol{f}_z$,这里,右下角小写的 $x,y,z$ 与前面的 $v$ 一样,表示应力矢量作用面的方位。例如应力矢量 $\boldsymbol{f}_x$ 的作用面平行于 $Oyz$ 平面而其法线方向和 $x$ 轴一致。

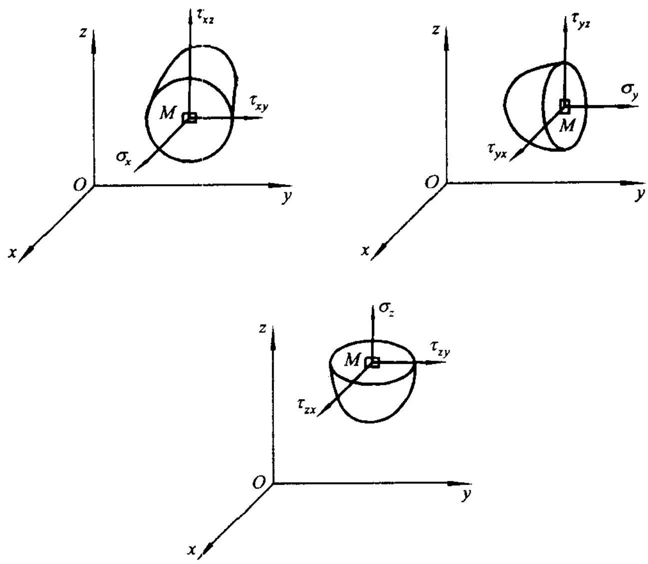


图 2-4

下面我们再分别把应力矢量 $\boldsymbol{f}_x,\boldsymbol{f}_y,\boldsymbol{f}_z$ 沿 3 个坐标轴方向分解。例如把 $\boldsymbol{f}_x$ 分解,则其在 $x$ 轴方向的分量同它的作用面垂直,是正应力,以 $\sigma_x$ 表示,这里,右下角的 $x$ 表示作用面的方位;它在 $y$ 轴和 $z$ 轴方向的分量平行于作用面,是切应力,分别以 $\tau_{xy}$ 和 $\tau_{xz}$ 表示,这里,右下角第一个字母表示作用面的方位,而第二个字母则表示它们的指向。如果以同样的方法进行,可得:$\boldsymbol{f}_y$ 的 3 个分量,$\sigma_y$,$\tau_{yx}$ 和 $\tau_{yz}$;$\boldsymbol{f}_z$ 的 3 个分量 $\sigma_z$,$\tau_{zx}$ 和 $\tau_{zy}$,如图 2-4 所示。

这样,我们把作用在 $M$ 点的上述 3 个微分面上的应力矢量分解以后,总共得到 9 个分量,它们作为一个整体称为**应力张量**,而其中每一个量称为**应力分**

量①。我们假设它们是坐标 $x, y, z$ 的连续函数，而且具有连续到二阶的偏导数。现将它们写成

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \tag{2-3}$$

其中的三行依次表示 $f_x, f_y, f_z$ 在三个坐标方向的分量。式(2-3)又可写成

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \tag{2-3$'$}$$

其中，$\sigma_{11} = \sigma_x, \cdots, \sigma_{23} = \tau_{yz}$ 等等。

对于应力分量指向的画法，我们作如下的规定：当微分面外法线方向和坐标轴的正方向一致时，该微分面上的应力分量指向坐标轴的正方向，反之则指向坐标轴的负方向。例如图 2-4 所示的 3 个微分面的外法线方向与坐标轴的正方向一致，故作用在这 3 个微分面上的应力分量都指向坐标轴的正方向。

下一节我们将证明，只要知道了一点的 9 个应力分量，就可以求出通过该点的各个微分面上的应力，也就是说 9 个应力分量将完全确定一点的应力状态。

## §2-3 与坐标倾斜的微分面上的应力

为了证明上一节最后指出的结论，我们假想地过 $M$ 点作 3 个互相垂直并与坐标平面平行的微分面，设其上以式(2-3)所表示的 9 个应力分量是已知的(图 2-5)。再作一个与坐标倾斜的微分面，设其上的应力矢量为($f_{vx}, f_{vy}, f_{vz}$)。显然，当此倾斜微分面无限地接近 $M$ 点时，则($f_{vx}, f_{vy}, f_{vz}$)就表示过 $M$ 点的任一微分面上的应力。

现在要建立($f_{vx}, f_{vy}, f_{vz}$)和同一点的 9 个应力分量之间的关系，为此，我们研究图 2-5 所示的四面体的平衡。四面体 $Mabc$ 所受的外力，除了 4 个面上的应力以外，还受体积力的作用。如用 $F_x, F_y, F_z$ 表示单位体积力在 3 个坐标方向的分量，$\triangle S_{abc}, \triangle S_{bMc}, \triangle S_{aMc}, \triangle S_{aMb}$ 表示四面体 4 个面的面积，$\Delta h$ 表示倾斜面 $abc$ 到 $M$ 点的距离，则四面体所受体积力的 3 个分量为

$$\frac{1}{3}\triangle S_{abc}\Delta h F_x, \quad \frac{1}{3}\triangle S_{abc}\Delta h F_y, \quad \frac{1}{3}\triangle S_{abc}\Delta h F_z$$

---

① 在§2-5 中将会看到，9 个应力分量 $\sigma_{ij}$ 服从张量的变换规律。按下标记法，$\sigma_{ij}$ 表示 9 个应力分量，故可将($\sigma_{ij}$)记作 $\sigma_{ij}$。详见补充材料 A。

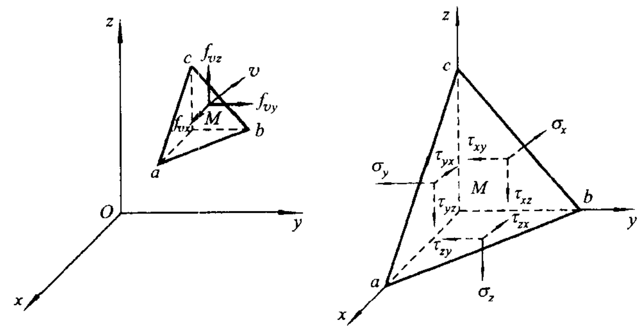


图 2-5

并由平衡条件$\sum F_x=0$[1],得

$$f_{vx}\triangle S_{abc}-\sigma_x\triangle S_{bMc}-\tau_{yx}\triangle S_{aMc}-\tau_{zx}\triangle S_{aMb}+\frac{1}{3}\triangle S_{abc}\Delta hF_x=0 \tag{a}$$

为了简化式(a),我们设倾斜面 $abc$ 的外法线$\boldsymbol{v}$ 的 3 个方向余弦为 $l,m,n$,于是由几何关系

$$\left.\begin{aligned}\triangle S_{bMc}&=\triangle S_{abc}l\\ \triangle S_{aMc}&=\triangle S_{abc}m\\ \triangle S_{aMb}&=\triangle S_{abc}n\end{aligned}\right\} \tag{b}$$

略去高阶微量,并将式(b)代入式(a),然后等号两边同除以 $\Delta S_{abc}$,于是得到如下的公式(其中后两式是由平衡条件$\sum F_y=0$ 和$\sum F_z=0$ 推出的)

$$\left.\begin{aligned}f_{vx}&=\sigma_x l+\tau_{yx}m+\tau_{zx}n\\ f_{vy}&=\tau_{xy}l+\sigma_y m+\tau_{zy}n\\ f_{vz}&=\tau_{xz}l+\tau_{yz}m+\sigma_z n\end{aligned}\right\} \tag{2-4}$$

式(2-4)给出了物体内一点的 9 个应力分量和通过同一点的各微分面上应力之间的关系。这样,我们就把要了解各点应力状态的问题简化为去求各点的 9 个应力分量的问题。下一节,我们要建立 9 个应力分量所满足的平衡条件。

## §2-4 平衡微分方程 应力边界条件

如果一物体在外力(包括体力和面力)作用下处于平衡状态,则将其分割成若干个任意形状的单元体以后,每一个单元体仍然是平衡的;反之,分割后每一

---

① $\sum F_x=0,\sum F_y=0,\sum F_z=0$,表示空间一般力系平衡条件中主矢量等于零的 3 个投影式,其中的 $F_x,F_y,F_z$ 不表示单位体积力的分量。下同。

个单元体的平衡，也保证了整个物体的平衡。基于这样的理由，我们假想穿过物体作三组分别与3个坐标平面平行的截面，在物体内部，它们把物体分割成无数个微分平行六面体；在靠近物体的表面处，只要这三组平面取得足够密，则不失一般性地被切割成微分四面体(图2-6)。如果我们分别考虑物体内部任意一个微分平行六面体和表面处任意一个微分四面体的平衡，可以导得平衡微分方程和应力边界条件。

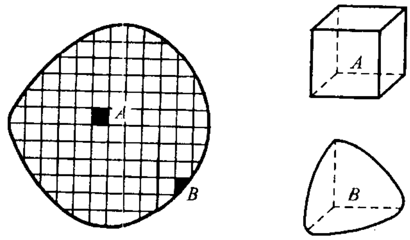


图2-6

先考虑物体内任意一个微分平行六面体的平衡。设其三条棱边分别为 $dx$，$dy$，$dz$，为简单起见，把3个坐标轴取得与3个棱边重合(图2-7)。我们设在 $x=0$ 的那一个微分面上的应力分量为 $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$(由于平行六面体的每一个面是无限小的，所以作用在这些面上的应力可看作为均匀分布的)，它们的指向按规定应该和坐标轴的正方向相反。在 $x=dx$ 的微分面上，$x$ 改变了 $dx$，将它们按多元函数泰勒(Taylor,B.)级数展开，如精确到一阶微量，则分别为

$$\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx,\quad \tau_{xy}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}dx,\quad \tau_{xz}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}dx$$

它们的指向按规定应与坐标轴的正方向一致。按完全同样的理由，可标出其他4个微分面上的应力分量。我们仍用 $F_x, F_y, F_z$ 表示单位体积的体力在3个坐标方向的分量。由于这个平行六面体是平衡的，所以它满足静力平衡方程

$$\sum F_x=0,\quad \sum F_y=0,\quad \sum F_z=0$$

$$\sum M_x=0,\quad \sum M_y=0,\quad \sum M_z=0$$

由 $\sum F_x=0$，得

$$\left(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx\right)dydz-\sigma_x dydz+\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy\right)dxdz-\tau_{yx}dxdz+$$

$$\left(\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}dz\right)dxdy-\tau_{zx}dxdy+F_x dxdydz=0$$

将上式同类项合并，再在等号两边同除 $dxdydz$，则得下列方程的第一式；同理，由 $\sum F_y=0$，$\sum F_z=0$，得下列方程的第二式和第三式：