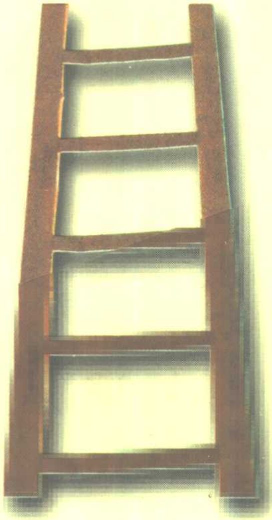
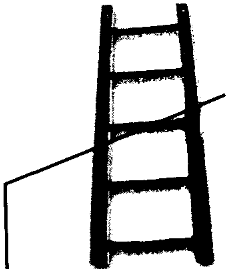
〔中学生纠错丛书〕



高中一年级

数学
纠错手册

上海辞书出版社



〔中学生纠错丛书〕

高中一年级

数学
纠错手册

上海辞书出版社

高中一年级数学纠错手册
上海辞书出版社出版
（上海陕西北路457号　邮政编码200040）
上海辞书出版社发行所发行
商务印书馆上海印刷股份有限公司印刷
开本787×1092　1/32　印张8.625　插页1　字数201 000
2000年4月第1版　2000年4月第1次印刷
印数1—6 000
ISBN 7-5326-0650-3/O·25
定价:11.30元

中学生纠错丛书编辑委员会

主　　编　顾鸿达　袁哲诚　陈基福　陈锡麟

编辑委员　（以姓氏笔画为序）

乐嘉民　朱云祖　朱震一　*李大元

张　越　陈基福　陈锡麟　荣新民

袁哲诚　*顾鸿达

本册撰稿人　（以姓氏笔画为序）

李大元　余应龙　忻再义

顾鸿达　康士凯

责任编辑　唐尚斌

插　　图　朱旭东

封面设计　柴　敏

有＊号者为本册责任编委

前　言

目前,图书市场上有关学生学习的辅导书品种不少,但形式不外乎两大类:一是复习资料式,即按章节单元归纳知识,并配置练习题;二是练习册式,即汇总了大量的练习题,供学生练习用.它们都是简单地通过大量的练习来帮助学生提高学习成绩.但是,这些练习大多是面面俱到的被动式训练,对学生在学习中最容易犯的错误,往往缺乏针对性的分析和讲解,而对学生已掌握的知识,又要花费大量时间做重复练习.

富有经验的资深教师在教学实践中发现,学生的某些错解情况经常是雷同的,上届学生的错解在这届学生中又会重复出现.这说明,这些错解往往就是知识、思维和技能的缺陷.除了学生对所学概念、定律、法则、语法等理解不深之外,还由于学生逻辑思维的缺陷和认识规律带有共性,因而造成了错解的雷同性以及届届出现的现象.如何以最少的时间、做最少的练习来纠正学习上的这些错误呢?为了达到这一优化的目的,我们设计编纂了这套《中学生纠错丛书》.

本套丛书既不是复习资料式,也不是练习册式,而是为减少学生目前所存在的繁重的学习负担精心设计而成的.对中学生在学习过程中带有共性的典型错误作出分析,并针对学生的薄弱环节,按教学单元有选择地出一些目的性明确的纠错练习,进行有的放矢的强化训练,以起到事半功倍、举一反三、触类旁通的功效.

《中学生纠错丛书》按年级、按学科分册出版.其中,数学从

初一到高三(6册),物理从初二到高三(5册),化学从初三到高三(4册),英语从初二到高三(5册),共20册.

每本手册的内容设置及顺序,按教学大纲要求的知识体系进行编写,分章节编排,便于学生配合课堂教学使用.

每本手册的内容都以典型题目引路,典型题按题目、错解、纠错、正解、说明等栏目作出释义."错解"选自学生在解题过程中经常出现的、有代表性的错误;"纠错"针对所产生的错误,指出错在哪里,并分析产生错误的原因,提出纠正和预防错误的办法;"正解"阐述正确的思考方法,并给予标准解答;"说明"主要叙述跟典型题目相关或延伸出去的问题,视题目的性质、特点及需要作出.在每一教学单元后设置一定量的纠错练习,以便学生掌握、巩固学过的知识.书后附纠错练习的参考答案或提示,以供读者核对.

对典型的、有意义的而知识程度较深的内容,本套丛书也适当选取了一些.为了与大纲所要求的知识体系有所区别,在这类题目的题号前带有"*"记号.

本套丛书除供中学生使用外,也可供中学教师在教学实践中参考.疏漏和不当之处,热忱欢迎读者批评指正.

编 者

1999年10月

目　录

第一章　集合与简易逻辑

一　集　　合

1. 用适当的方法表示下列集合：6 与 9 的正公倍数组成的集合.

［**错解**］ 6 与 9 的正公倍数组成的集合是$\{36,18,72,54,\cdots\}$.

［**纠错**］ 6 与 9 的正公倍数必是 6 与 9 最小公倍数 18 的倍数，因而所要表示的集合是无限集. 错解用列举法来表示这个无限集，所列举的元素没有反映出构成集合的元素的规律，使省略号的意义不明确，因此这个表示是错误的.

［**正解一**］ 6 与 9 的正公倍数组成的集合是$\{18,36,54,\cdots,18k,\cdots\}$.

［**正解二**］ 6 与 9 的正公倍数组成的集合是$\{x \mid x=18k, k\in \mathbf{N}_+\}$.

［**说明**］ (1) 一般来说，列举法适宜表示元素个数不太多的有限集. 尽管集合元素是无序的，但是如果借助省略号，用列举法来表示可排列的无限集，那么必须反映构成集合的元素的规律，使省略号有明确的意义.

(2) 本书数学记号沿用全国新的统编教材中的记号，这里 $\mathbf{N}_+$ 表示正整数集，而 $\mathbf{N}$ 表示自然数集(包括数 0).

2. 下列说法中，正确的是(　　).

(A) 任何集合都有真子集

(B) 任何集合都至少有两个子集

(C) 自然数集 $\mathbf{N}$ 没有一个真子集是无限集

(D) 自然数集 $\mathbf{N}$ 有无限个真子集都是无限集

［**错解**］ (C)

［**纠错**］ 错解误认为可排列的无限集没有含无限个元素的真子集，其实不然. 一个无限集，除去其中有限个元素，构成一个新的无限集即是原来无限集的真子集，即选项(C)是错误的. 因为空集$\varnothing$既无真子集. 又只有一个子集(即$\varnothing$本身)，故选项(A)、(B)两种说法也是错误的. 对任一正整数 n，集合$\{x\mid x>n, x\in\mathbf{N}\}$是无限集，又是 $\mathbf{N}$ 的真子集. 因为 n 可取任意正整数，因此这样的集合有无限个多. 选项(D)正确.

［**正解**］ (D)

3. 设 $A=\{(x,y)\mid |x+1|+(y-2)^2=0, x、y\in\mathbf{R}\}$，$B=\{-1,0,1,2\}$，则 A、B 两集合的关系是(　　).

(A) $A\supsetneqq B$　　(B) $A\subsetneqq B$

(C) $A\in B$　　(D) 以上都不对

［**错解**］ (B)

［**纠错**］ 选择(B)的错误原因是集合概念模糊，误以为 $A=\{-1,2\}$. 其实，

$$\begin{aligned}A&=\{(x,y)\mid |x+1|+(y-2)^2=0, x、y\in\mathbf{R}\}\\&=\{(x,y)\mid x+1=0，且\ y-2=0\}\\&=\{(-1,2)\}.\end{aligned}$$

故正确答案应选(D).

［**正解**］ (D)

4. 设全集为 $U=\mathbf{R}$,求 $\complement_U U$.

[错解] $\because$ $U=R$,$\therefore$ $\complement_U U$ 不存在.

[纠错] 按补集的意义,$\complement_U U=\{x\mid x\in U,且\ x\notin U\}$.显然,没有元素 x 既属于集合 U,又不属于集合 U.但这并不说明 $\complement_U U$ 不存在,只能说明 $\complement_U U=\varnothing$.

[正解] $\complement_U U=\varnothing$.

[说明] 设全集为 U,其子集 A 的补集 $\complement_U A$ 有时也记作 $\overline{A}$.

5. 设 A、B、M、P 为非空集合,$A\cap B=\varnothing$,M 为 A 的所有真子集构成的集合,P 为 B 的所有真子集构成的集合,求 $M\cap P$.

[错解] 由于 $A\cap B=\varnothing$,所以 M、P 无公共元素,

$$\therefore\quad M\cap P=\varnothing.$$

[纠错] 错解混淆了集合元素和子集的概念.M、P 是分别由 A、B 的真子集构成的集合,M、P 的元素都是集合.显然空集 $\varnothing$既是 M 的元素又是 P 的元素;另一方面,由于 $A\cap B=\varnothing$,故 A 的非空子集与 B 的非空子集都不可能相等,因此 $M\cap P=\{\varnothing\}$.

[正解] $M\cap P=\{\varnothing\}$.

[说明] $M\cap P=\varnothing$与 $M\cap P=\{\varnothing\}$是不同的.前者指集合 M 与集合 P 无公共元素;后者指集合 M 与集合 P 有一个公共元素,公共元素是空集$\varnothing$.

6. 设集合 $A=\{a,b\}$,$B=\{b,c\}$,M 是 A 的所有子集构成的集合,P 是 B 的所有子集构成的集合,求 $M\cap P$.

[错解] $M\cap P=\{\varnothing\}$.

[纠错] 错解没有注意 A、B 有一个公共元素 b.事实上,

$$M=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\},$$
$$P=\{\varnothing,\{b\},\{c\},\{b,c\}\},$$

故 $M\cap P=\{\varnothing,\{b\}\}$.

［**正解**］ $M\cap P=\{\varnothing,\{b\}\}$.

7. 设 A 为平行四边形构成的集合，B 为圆内接四边形构成的集合，求 $A\cap B$.

［**错解**］ 设四边形 $PQRS$ 既是平行四边形，又是圆内接四边形，则 $\angle P=\angle R$，$\angle Q=\angle S$，又 $\angle P+\angle R=180°$，$\angle Q+\angle S=180°$，故 $\angle P=\angle R=\angle Q=\angle S=90°$. 四边形 $PQRS$ 为矩形.

$\therefore$ $A\cap B$ 是矩形构成的集合.

［**纠错**］ 错解其实只是证实了 $A\cap B$ 是矩形构成的集合的子集. 为了说明问题，下举一例：设 $S=\{(x,y)\mid 1<x<2,y\in\mathbf{R}\}$，$T=\{(x,y)\mid 1<y<2,x\in\mathbf{R}\}$，欲求 $S\cap T$，不能因为由 $1<x<2$，$1<y<2$ 可推出 $2<x+y<4$，$1<xy<4$，就说 $A\cap B$ 是 $\{(x,y)\mid 2<x+y<4,1<xy<4\}$. 其实，$S\cap T=\{(x,y)\mid 1<x<2,1<y<2\}$ 只是 $\{(x,y)\mid 2<x+y<4,1<xy<4\}$ 的真子集（例如 $(0.5,2.1)$ 属于后者，而不属于 $S\cap T$）. 因此错解是不完整的.

［**正解**］ 若四边形 $PQRS$ 既是平行四边形，又是圆内接四边形，则仿前可证 $PQRS$ 为矩形. 反过来，若 $PQRS$ 是矩形. 则显然 $PQRS$ 既是平行四边形，又能内接于该矩形对角线为直径的圆. 因此，$A\cap B$ 是矩形构成的集合.

8. 设集合 $M=\{0,1\}$，集合 $P=\{x\mid x\subseteq M\}$，则 M 与 P 的关系是（　　）.

(A) $M\in P$　　　　(B) $P\in M$

(C) $M\subseteq P$　　(D) $M=P$

[**错解**] (C)

[**纠错**] 错解错误地认为 M、P 是两个集合，集合之间只能是包含或相等的关系，故排除了选项(A)、(B)；再从 P 的元素较 M 多，选(C). 实际上，按集合 P 的定义知 $P=\{\varnothing,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$. 故应选(A).

[**正解**] (A)

9. 设集合

$$M=\{x\mid x=12a+8b,a、b\in\mathbf{Z}\},$$
$$P=\{y\mid y=20c+16d,c、d\in\mathbf{Z}\},$$

则(　　).

(A) $M\subsetneqq P$　　(B) $M\supsetneqq P$

(C) $M=P$　　(D) 以上结论都不对

[**错解**] (D)

[**纠错**] 错解仅依据集合 M 与 P 的元素表达形式不同，就认为集合 M 中有元素不属于 P，集合 P 中也有元素不属于 M，于是错选(D). 若 $y=20c+16d\in P$，这里 $c、d\in\mathbf{Z}$，则 $y=12c+8(c+2d)$，且 $c+2d\in\mathbf{Z}$，故 $y=20c+16d\in M$. $\therefore$ $P\subseteq M$. 反过来，若 $x=12a+8b=4(3a+2b)\in M$，这里 $a、b\in\mathbf{Z}$，那么 $x=4[5(3a+2b)+4(-3a-2b)]=20(3a+2b)+16(-3a-2b)$，且 $3a+2b\in\mathbf{Z}$，$-3a-2b\in\mathbf{Z}$，故 $x\in P$. $\therefore$ $M\subseteq P$. 综上所述，$M=P$.

[**正解**] (C)

10. 若集合 A、B、C 满足条件 $A\cup B=A\cup C$，则可以推得(　　).

(A) $B=C$　　(B) $A\cap B=A\cap C$

(C) $A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}$　　(D) $\overline{A}\cap B=\overline{A}\cap C$

[**错解**] (A)

[**纠错**] 错解没有正确理解题意. 题意是要求从 $A\cup B=A\cup C$ 推出所列条件之一，是求使 $A\cup B=A\cup C$ 成立的必要条件，而不是充分条件. “$B=C$”是“$A\cup B=A\cup C$”的充分而非必要条件. 实际上，选项(A)、(B)、(C)都不一定成立. 这容易举出反例：设全集 $I=A=\{0,1\}$，$B=\{0\}$，$C=\{1\}$，则 $B\neq C$，$A\cap B=\{0\}$，$A\cap C=\{1\}$，$A\cap\overline{B}=\{1\}$，$A\cap\overline{C}=\{0\}$，这时选项(A)、(B)、(C)都不成立，而 $A\cup B=A\cup C$ 是成立的.

其实，从条件 $A\cup B=A\cup C$ 可以看出，B、C 两集合包含于 A 内的部分可以不一样，但是不含于 A 的部分应是一样的(严格的证明参见[说明]). 故正确的选项是(D).

[**正解**] (D)

[**说明**] 从 $A\cup B=A\cup C$ 推出 $\overline{A}\cap B=\overline{A}\cap C$ 可证明如下：

$$\because\quad A\cup B=A\cup C,$$

$$\therefore\quad \overline{A}\cap(A\cup B)=\overline{A}\cap(A\cup C).$$

按照集合的运算性质，得 $(\overline{A}\cap A)\cup(\overline{A}\cap B)=(\overline{A}\cap A)\cup(\overline{A}\cap C)$.

$$\because\quad \overline{A}\cap A=\varnothing,\quad\therefore\quad \overline{A}\cap B=\overline{A}\cap C.$$

11. 解不等式：$2x(x+1)<3(x+1)$.

[**错解**] 原不等式两边同除以 $x+1$，得

$$2x<3,\quad\therefore\quad x<\frac{3}{2}.$$

[**纠错**] 错解错在没有根据不等式的性质进行运算. 对不

等式进行除法必须考虑除式是正值还是负值，从而确定不等号方向是否改变.

[正解一] $2x(x+1)<3(x+1)\Leftrightarrow\begin{cases}x+1>0\\2x<3\end{cases}$

或 $\begin{cases}x+1<0\\2x>3\end{cases}\Leftrightarrow -1<x<\dfrac{3}{2}$.

∴ 原不等式的解集是$\left\{x\,\middle|\,-1<x<\dfrac{3}{2}\right\}$.

[正解二] $2x(x+1)<3(x+1)\Leftrightarrow 2x(x+1)-3(x+1)<0$

$$\Leftrightarrow (x+1)(2x-3)<0\Leftrightarrow -1<x<\frac{3}{2}.$$

∴ 原不等式的解集是$\left\{x\,\middle|\,-1<x<\dfrac{3}{2}\right\}$.

[说明] 为了表达方便，我们采用记号“$\Leftrightarrow$”，用它来表示“同解”.

12. k 为何值时，$kx^2-kx+1>0$ 对一切实数 x 均成立？

[错解] 要使 $kx^2-kx+1>0$ 对一切实数 x 均成立，必须 $\begin{cases}k>0,\\k^2-4k<0.\end{cases}$ 解得 $0<k<4$.

[纠错] 错解忽视了 $k=0$ 的存在，致使犯了“以偏概全”的错误. 其次，求参数 k 的取值范围，既不能扩大，又不能缩小. 因此解题过程每步都应是“必须且只须”，而不是“必须”.

[正解] 不等式 $kx^2-kx+1>0$ 对一切实数 x 均成立，必须且只须

$k=0$ 或 $\begin{cases}k>0,\\k^2-4k<0.\end{cases}$ 从而解得 $0\leqslant k<4$.

13. 解不等式：$\dfrac{2}{4x-5}<\dfrac{3}{x+7}$.

［**错解**］ 不等式两边取倒数，改变不等号方向，得

$$\frac{4x-5}{2}>\frac{x+7}{3}.$$

整理得　$12x-15>2x+14$，$\therefore\quad x>\dfrac{29}{10}$.

［**纠错**］ 因为根据不等式性质，只有当不等式两边同号时，两边取倒数并改变不等号的方向才是正确的. 错解未考虑这一性质，导致失解.

［**正解**］ $\dfrac{2}{4x-5}<\dfrac{3}{x+7}\Leftrightarrow\dfrac{2}{4x-5}-\dfrac{3}{x+7}<0$

$\Leftrightarrow\dfrac{-10x+29}{(4x-5)(x+7)}<0\Leftrightarrow\begin{cases}-10x+29>0\\(4x-5)(x+7)<0\end{cases}$

或 $\begin{cases}-10x+29<0\\(4x-5)(x+7)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<\dfrac{29}{10}\\-7<x<\dfrac{5}{4}\end{cases}$

或$\begin{cases}x>\dfrac{29}{10}\\x>\dfrac{5}{4}\text{或}x<-7\end{cases}\Leftrightarrow-7<x<\dfrac{5}{4}$或$x>\dfrac{29}{10}$.

$\therefore$　原不等式的解集是$\left\{x\,\middle|\,-7<x<\dfrac{5}{4}\text{或}x>\dfrac{29}{10}\right\}$.

14. 解不等式：$\dfrac{5-4x}{2x+3}\leqslant1$.

［**错解**］ 移项，整理得$\dfrac{2-6x}{2x+3}\leqslant0$. 于是，得到不等式组

$$\begin{cases}2-6x\geqslant0,\\2x+3\leqslant0;\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}2-6x\leqslant0,\\2x+3\geqslant0.\end{cases}$$

解得不等式的解为 $x\geqslant\frac{1}{3}$ 或 $x\leqslant-\frac{3}{2}$.

[**纠错**] 错解没有注意到分式的分母不能为零,故而得出 $x\leqslant\frac{3}{2}$ 是错误的.

[**正解一**] $\frac{5-4x}{2x+3}\leqslant1\Leftrightarrow\frac{2-6x}{2x+3}\leqslant0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2-6x\leqslant0\\2x+3>0\end{cases} \text{或} \begin{cases}2-6x\geqslant0\\2x+3<0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x\geqslant\frac{1}{3} \text{ 或 } x<-\frac{3}{2}.$$

∴ 原不等式的解集是 $\left\{x\middle|x<-\frac{3}{2}\text{或 }x\geqslant\frac{1}{3}\right\}$.

[**正解二**] $\frac{5-4x}{2x+3}\leqslant1$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x+3>0\\5-4x\leqslant2x+3\end{cases} \text{或} \begin{cases}2x+3<0\\5-4x\geqslant2x+3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x\geqslant\frac{1}{3} \quad \text{或} \quad x<-\frac{3}{2}.$$

∴ 原不等式的解集是 $\left\{x\middle|x<-\frac{3}{2}\text{或 }x\geqslant\frac{1}{3}\right\}$.

[**正解三**] $\frac{5-4x}{2x+3}\leqslant1\Leftrightarrow\frac{2-6x}{2x+3}\leqslant0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x+3\neq0\\(2-6x)(2x+3)\leqslant0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq-\frac{3}{2}\\(6x-2)(2x+3)\geqslant0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq-\frac{3}{2}\\x\geqslant\frac{1}{3}\text{ 或 }x\leqslant-\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x\geqslant\frac{1}{3}\text{ 或 }x<-\frac{3}{2}.$$

∴ 原不等式的解集是 $\left\{x\middle|x<-\frac{3}{2}\text{或 }x\geqslant\frac{1}{3}\right\}$.