M. J. 莱特希尔

富里叶分析与广义函数引论

科学出版社

富里叶分析与广义函数引論

[英] M. J. 萊特希尔 著
王　建　华 譯

科学出版社

M. J. LIGHTHILL

Introduction to Fourier Analysis
and Generalised Functions

Cambridge University Press
1958

内 容 简 介

这本书包含了关于富里叶变换式和富里叶级数的主要结果，也介绍了广义函数的一般性质及其在富里叶分析中有用的性质．对于实际应用中最常见的函数，书中详细讨论了它们的富里叶变换式的求法和富里叶变换式渐近估计的技巧．书中有例题数十个，是全书的一个重要组成部分，对于了解理论与熟悉方法、技巧有一定的帮助．

在本书中，将周期函数的富里叶变换式看作"一列 δ 函数"，富里叶级数论则作为理论的一种特殊情形而出现．

本书可作为应用数学和工程技术专业高年级学生和有关科技工作人员的参考用书．

富里叶分析与广义函数引论

[英] M. J. 莱特希尔 著
王 建 华 译

科学出版社出版
北京朝阳門内大街 117 号
北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1965年 6月第 一 版 开本：850×1168 1/32
1965年 6月第一次印刷 印张：2 11/16
印数：0001—3,800 字数：68,000

统一书号：13031・2146
本社书号：3272・13—1
定价：[科六] 0.44 元

目　录

第一章　緒　論

第二章　广义函数和它們的富里叶变换式的理論

第三章　一些广义函数的定义、性质和富里叶变换式

第四章　富里叶变换式的漸近估計

第五章　富里叶級数

第一章 緒 論

1.1. 本书的范圍和目的

这本书是根据曼彻斯特大学为学生开設的一門課程而写成的. 在那門課程中，作者希望能够对有关富里叶級数和富里叶积分的最有用的事实加以闡明. 在計划該課程时，作者認为，要滿意地做到这一点，就必須用到象狄拉克（Dirac）的 δ 函数之类的函数，而这些函数越出了函数論的通常討論范围. 現在，劳伦特·施瓦茲（Laurent Schwartz）在他的 Théorie des distributions（Vols. 1 & 2, Hermann et Cie, Paris, 1950—1951）一书中已发展出这些函数的一套严密的理論，而譚波（Temple）教授則对这一理論提出了一种說法（Generalized Functions, *Proc. Roy. Soc. A*, **228**, 175—190, 1955），它似乎更容易为学生們所理解. 作者发現，在某些地方进一步稍加簡化后，广义函数論是可以为最高年級的大学生接受的，并且这样可以大大縮短熟悉富里叶变換式及其漸近估計的一种技巧所化的劳力，这种技巧看来比以前所有的技巧似乎更加优越. 处理的方式是这样的：富里叶級数論作为理論的一种特殊情形而出現，而周期函数的富里叶变換式則是"一列 δ 函数".

因此，从上述課程产生的这本书不但包含了关于富里叶变換式和富里叶級数的主要結果，并且可以作为广义函数論的一个初步介紹. 广义函数的一般性質及其在富里叶分析中有用的一些性質都在本书中加以推导，推导的过程都較簡練，但絲毫不脫离数学証明的严密标准.

另一方面，富里叶变換式或广义函数对于求解微分方程、积分方程或其他函数方程的应用并沒有在本书中明白地加以討論，对

于多于一个变量的富里叶变换式或广义函数的扩充也是如此.

1.2. 讀者应具备的知識

閱讀本书的数学讀者应对数学証明的方法（特別是关于一些极限过程的結論）有一些兴趣，并具备关于这些方法的一般知識. 但是，并不假定讀者对某些特定的論題有詳尽的知識. 书中并不需要勒貝格积分論；下面常常用到“絕对可积”（在勒貝格理論中应为“可积”）这一术語，为的是要使得只在一种較簡单的意义上熟悉积分法的讀者想到，意思就是假定模的积分为有限. 然而，关于积分的模不大于模的积分的定理，以及在一个表达式中若每一項被換成它的模而收斂性不变，則可以互換积分和（或）求和的次序的定理，都将常常被用到；此外，有时也将引用一两个其他的积分学基本定理. 記号 O 和 o 的意义假定为熟知[1].

所討論的函数都只限于一个实变量的函数（虽然它們的函数値可为复数）. 另一方面，也需要一些复变函数的知識，因为在个別地方要利用围綫积分計算一些簡单的定积分. 此外，也假定熟悉少数其他的标准积分，例如誤差积分.

所有这些材料在英国的大学里都能够在通常的分析課程中学到. 因此，这本书对于大学高年級学生来說应当是能够理解的，对于数学分析的水平可能超出大学高年級学生水平不多的数学工作者也是如此.

也許不大可能会有任何人事先絲毫沒有关于富里叶級数或富里叶积分的知識而来讀这本书. 虽然如此，在第二至五章中关于这些論題的討論却是完全可以独立地閱讀的. 此外，还在本章的以后几节中指出了富里叶分析的一些主要用途.

1）对于那些不太记得这些记号的读者来说，不妨将 O 读为“其阶最多为…的项”，而将 o 读为“其阶小于…的项”. 这将使他们想起，“$f=O(g)$”的意思是：当变量趋于指定的极限时，$|f|<A|g|$ 对于某个正数 A 成立. 这时也包含“$f=o(g)$”这一可能性，它的意思是：$|f|<\varepsilon|g|$（充分接近极限时）对于任何正数 ε（无论多么小）成立.

1.3. 富里叶級数：緒言

富里叶級数是将一个周期函数 $f(x)$（設周期为 $2l$）[1] 表示为具有相同周期的一切余弦和正弦函数的綫性組合：

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{1}$$

在这个意义上的富里叶級数可以用来分析周期性的（对于时間）振动或周期性的（对于空間）波形，也可以用来表示平面极坐标或柱极坐标的函数，这时 (1) 中的 x 变为极角 θ，而周期 $2l$ 变为 2π.

上列級数可以更簡洁地写成复数的形式：

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{in\pi x/l}, \tag{2}$$

式中对于一切 n 有 $c_n=\frac{1}{2}(a_n-ib_n)$，且 $a_{-n}=a_n$，$b_{-n}=-b_n$（因而 $b_0=0$）.

将一个函数用余弦和正弦的項来表示，或者（更进一步）用指数的項来表示，有一个很大的优点：这些函数在各种分析的运算下，特别是在微分法下，其結果特别簡单. 举例来說，如果一个綫性偏微分方程具有与 x 无关的系数，而要求出以 $2l$ 为周期、对于 x 的周期解，則級数(2)可以用作一个解，而 c_n 可以通过求解不出現对于 x 的导数的微分方程組而得到.

例如，平面极坐标 r, θ 下拉普拉斯方程的以 2π 为周期，对于 θ 的周期解（因而代表在中心位于原点的圆环中的单值的解）可以写为 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(r)e^{in\theta}$. 如果我們将它代入

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}=0, \tag{3}$$

幷假定可以逐項微分，則我們得到

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{d^2c_n}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dc_n}{dr}-\frac{n^2}{r^2}c_n\right)e^{in\theta}=0. \tag{4}$$

---

1) 这就是说，对于一切 x 有 $f(x)=f(x+2l)$.

如果我們假定,函数的这种三角級数表示式是唯一的,則若一个級数恆等于零,它的系数必定都为零,这就得到一个关于 c_n 的微分方程,它的一般解是

$$c_n = A_n r^n + B_n r^{-n}. \tag{5}$$

如果在圓 $r=$ 常数上边界条件为已知,例如在 $r=a$ 上 $f=g(\theta)$,在 $r=b$ 上 $\dfrac{\partial f}{\partial r}=h(\theta)$,則我們可以利用这些条件来确定 A_n 和 B_n,只要假定 $g(\theta)$ 和 $h(\theta)$ 能够表为富里叶級数,設为

$$g(\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{in\theta},\ h(\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n e^{in\theta}. \tag{6}$$

于是有

$$A_n a^n + B_n a^{-n} = g_n,\ nA_n b^{n-1} - nB_n b^{-n-1} = h_n, \tag{7}$$

由此即可确定 A_n 和 B_n.

这个例子是非常簡单的,可以用許多种不同的方式来处理它(而且,事实上,刚才得出的結論与劳伦特的定理的結論是一致的),但是,显然,这里的程序可以应用到更加复杂的問題上去,当然要假定,用以确定 c_n 的边界条件在那些使得富里叶級数的变量(在这里是 θ)不依賴于其他变量而变化的边界上为已知.

这个例子使我們清楚地看到,一种令人滿意的富里叶級数的理論应当有这样的內容:对于一个給定的函数来說,应当能够逐項微分,同时应当能够使系数的确定为唯一.直到本书第五章中介紹的“广义函数”的方法得到发展以前,任何一种富里叶級数的理論都不能够同时滿足这两个条件.

富里叶級数还在一种不同的、也許甚至是更常見的方式下被应用,就是用来表示一个非周期的函数,它最初只在一个区間中有定义.通常取富里叶級数的周期为区間长度的两倍,这时級数被称为“半幅級数”;有时,也会用到“四分之一幅級数”.将会看到,这些級数是富里叶級数中的一类,它們只用到“全幅級数”(1)中一部分的項.

举例来說,如果要在一个域中求解一个偏微分方程,域的部分

边界由直綫（或平面）$x=0$ 和 $x=l$ 組成，則通常論証如下．由于在 $x=0$ 和 $x=l$ 都满足边界条件 $f=0$ 的余弦或正弦只有 $\sin n\pi x/l$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$，因此，在这些边界条件下，采用半幅級数（或“富里叶正弦級数”）

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (0<x<l) \tag{8}$$

是合适的．同理，如果在 $x=0$ 和 $x=l$ 有 $\frac{\partial f}{\partial x}=0$，則采用半幅級数（或“富里叶余弦級数”）

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} \qquad (0<x<l) \tag{9}$$

是合适的（在复数形式(2)中，这两种情形下的 c_n 分别是純虛数和实数）．此外，如果在 $x=0$ 有 $f=0$，而在 $x=l$ 有 $\frac{\partial f}{\partial x}=0$，則采用四分之一幅級数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l} \qquad (0<x<l) \tag{10}$$

是合适的，它所包含的項在一个具有較大周期 $4l$ 的富里叶級数中占更小的一部分．

这些級数可以通过一种稍稍不同然而更为有用的方式如下得到．为了满足边界条件 $f(0)=0$ 和 $f(l)=0$，引入一个以 $2l$ 为周期的奇周期函数 $f(x)$（这就是說，一个满足 $f(-x)=-f(x)$ 和 $f(x+2l)=f(x)$ 的函数，以 $x=0$ 和 $x=-l$ 代入即得上述边界条件）．于是，它的富里叶級数 (1) 只包含奇函数的項，因而化为 (8)．类似地，采用一个偶周期函数就可以使在 $x=0$ 和 $x=l$ 时 $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ 这些边界条件得到满足．最后，要使得边界条件 $x=0$ 时 $f=0$ 和 $x=l$ 时 $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ 得到满足，只需采用一个奇周期函数，它的周期是 $4l$，并且它同时是一个 $x-l$ 的偶函数；应当注意的是，在周期为 $4l$ 的正弦項中，只有满足后一条件的那些項出現在(10)

中. 很自然地，在每一种情形下，只有在 $0 < x < l$ 这个范围中周期函数的值才代表問題的解.

下面的簡单例子表明，即使是在不用到富里叶級数的情形中，只要有可能，用周期性和奇偶性的条件来代替边界条件总是有好处的. 設有一根拉紧的弦，固定在两点 $x = 0$ 和 $x = l$ 处，并加以拉动（即，从某种已知的变形状态下将它放松）；我們可以假想，有一根无穷长的拉紧的弦，它的横向位移 $y = f(x)$ 是一个以 $2l$ 为周期的奇周期函数，并且它在 $0 < x < l$ 中的形状与已知的形状重合（見图 1）. 如果将这根无穷长的弦从这种位置下放松，則位移 y 将保持为奇周期函数，因而在 $x = 0$ 和 $x = l$ 处繼續满足边界条件 $y = 0$. 因此，可以利用无穷长弦的初始値問題的簡单解即

$$y = \frac{1}{2}\{f(x + ct) + f(x - ct)\} \tag{11}$$

来求解，从而避免了考虑从两端来的多重反射的必要. 用这种方式来討論这一类型的其他問題，也有类似的好处.

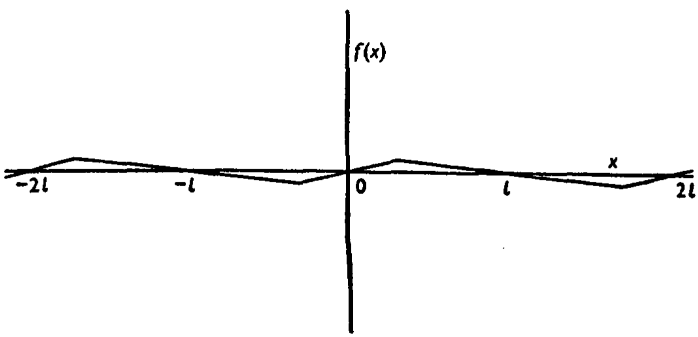

图 1　説明在 $0 < x < l$ 中取已知值的奇周期函数 $f(x)$ 的构造.

由此可見，最好是将每一个富里叶級数看作一个周期函数的富里叶級数，即使是当最初我們所关心的只是半个或四分之一个周期上的值时也是如此. 在构造关于富里叶級数的任何一般理論时，尤其应当这样做；这是因为，这样一个級数的和，如果它存在的話，必定是周期的.

作为这一节的結束語，我們可以列举出富里叶級数理論的几个主要目的. 第一，必須知道，在怎样的条件下，象(1)或(2)这样的一个三角級数收斂(在所采用的收斂性意义上). 例如，絕对一致收斂的一个充分条件是：当 $|n| \to \infty$ 时，$c_n = O(|n|^{-1-\varepsilon})$ 对于某个 $\varepsilon > 0$ 成立. 但在 § 5.1 中則将証明，在广义函数論意义上收斂的一个充要条件是：当 $|n| \to \infty$ 时，$c_n = O(|n|^N)$ 对于某个 N 成立.

其次，如果已知一个象(2)这样的等式，我們要問，用函数 $f(x)$ 怎样表示 c_n? 例如，当級数为絕对且一致收斂时，可以将两端都乘以 $e^{-im\pi x/l}$，然后从 $-l$ 到 l 逐項积分，則級数的一切項除了 $n = m$ 的一項外都为零，于是得到

$$c_m = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) e^{-im\pi x/l} dx. \tag{12}$$

广义函数論里的相应問題在 § 5.2 中得到解决.

应当注意的是，从等式(12)可以得到

$$\left.\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx, \\ b_m &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

还应当注意的是，如果 $f(x)$ 是偶函数，則

$$a_m = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx, \qquad b_m = 0, \tag{14}$$

这是关于富里叶余弦級数的等式；而当 $f(x)$ 是奇函数时，則

$$a_m = 0, \qquad b_m = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}\,dx, \tag{15}$$

这是关于富里叶正弦級数的等式.

第三，对于一个任意的周期函数 $f(x)$，我們要問，在怎样的条件下等式(2)成立，其中 c_n 由(12)确定，或由所采用的理論中与之等价的式子确定. 在通常的收斂性理論中，要保証这一点，必須滿足种种精致的检驗法的条件；而在 § 5.3 中将証明，等式对于一切周期广义函数都成立.

最后，应当回答前面已經提出的关于逐項可微分和唯一性的問題．这两个性質(依次地)在“收斂性”和“可求和性”理論中是最令人感到缺欠的[1]；而在广义函数論中，两个結果都几乎是显見的．

1.4. 富里叶变换式：緒言

富里叶积分可以看作是富里叶級数当周期趋于无穷时的形式上的极限．因此，如果 $f(x)$ 是在整个数軸 $(-\infty, \infty)$ 上的 x 的任意函数，則可以构成一个以 $2l$ 为周期的周期函数 $f_l(x)$，它在 $(-l, l)$ 这个范围中与 $f(x)$ 重合．$f_l(x)$ 的富里叶級数 (2)，其中 c_n 由(12)确定，可以写成下列形式：

$$\left.\begin{aligned} f_l(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\pi x/l} g_l\left(\frac{n}{2l}\right)\frac{1}{2l}, \\ \text{其中}\quad g_l(y) &= \int_{-l}^{l} e^{-2\pi ixy} f(x)\,dx. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

将級数中的 $n/2l$ 写成 y，并将 y 的各个相継的值之間的差写成 dy，則得到当 $l\to\infty$ 时的一个形式上的极限：

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi ixy} g(y)\,dy, \\ \text{其中}\quad g(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi ixy} f(x)\,dx; \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

这是因为，周期函数 $f_l(x)$ 在极限中处处变为 $f(x)$．

在这种情形下，常常称 $g(y)$ 为 $f(x)$ 的富里叶变换式．于是，可以認为(17)中第一个等式的意思是：$f(y)$ 是 $g(-x)$ 的富里叶变换式．

然而，应当提醒讀者，在富里叶变换式的定义中，关于 2π 应当放在哪儿的問題，并沒有普遍的一致意見．可以将它們从 (17) 的两个等式的指数中去掉，而在第一个积分前插入一个因子 $\frac{1}{2\pi}$，但

---

1) 关于这些经典的理论，可参看 G. H. Hardy and W. W. Rogosinski, Fourier Series (2nd edition, 1950), Cambridge University Press.

第二个积分前则不插入这个因子(或者反过来);或者,在这种情形下,也可以在两个积分前都插入一个因子 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ (这样可以尽可能多地保持对称性). 所有被采用过的不同記法都有一定的优点. 我們在这里依照譚波和許多近代作者的記法,将 2π 包含在指数內,則指数函数与 $g(y)$ 的乘积代表一个振幅,以 y 为頻率(或波数,依照 x 代表时間或空間而定),而不是作为"弧度頻率"或"弧度波数". 然而,只要将变量稍加变换,就很容易将本书中的結果改换成別种記法下的結果.

已經有許多的文献[1]致力于在积分的一种給定的解释下确定应加在 $f(x)$ 上的条件,这些条件足以保証等式(17)成立. 即使是对于一种固定的积分解释,也需要許多組不同的充分条件,如果我們眞的希望能够广泛地应用这些等式的話. 这是因为,如果为了容納某个需用的函数而放松一个条件,則通常需要加強某个其他的条件,而这样一来又排斥了某个其他的函数. 在采用了广义函数以后,所有这些困难就都迎刃而解了,因为每一个广义函数 $f(x)$ 有一个富里叶变换式 $g(y)$,它本身也是一个广义函数,而且 $g(-x)$ 的富里叶变换式是 $f(y)$. 在广义函数論里,人們发現,如果采取一种不同于本章的討論次序,并将富里叶級数的性质当做富里叶变换式的性质的一种特殊情形来处理,則比較方便.

富里叶积分可以用来分析在范围 $(-\infty,\infty)$ 中的 x 的非周期函数,将它們看作指数函数的綫性組合. 这样一种分析是有用的,其理由与富里叶級数的情形差不多一样. 例如,对于系数不依賴于 x 的綫性偏微分方程,如果在 x 不依賴于其他变量地从 $-\infty$ 变到 ∞ 的边界上满足已給的边界条件,就可以有效地利用这种分析来处理. 为了应用这些边界条件,必須能够将出現于其中的任何函数表示成富里叶积分. 这里常发生这样的困难: 在通常的函数論里,很簡单的函数(例如一个常数)却沒有富里叶变换式. 在广

---

1) 例如可参看 E. C. Titchmarsh, Introduction to the Theory of Fourier Integrals (1937), Oxford University Press.

义函数論里則不存在这样的困难，例如，在广义函数論里，1 的富里叶变换式是狄拉克的 δ 函数.

也将用到"半幅"富里叶积分，其意义与富里叶級数的情形差不多一样. 因此，如果要在范围 $(0, \infty)$ 中确定满足条件 $f(0)=0$ 的 $f(x)$，就可以寻求一个在整个范围 $(-\infty, \infty)$ 中的奇函数 $f(x)$，它在 $(0, \infty)$ 中与 $f(x)$ 重合. 根据(17)，它的富里叶变换式 $g(y)$ 可以写成下列形式:

$$g(y) = -2i\int_0^\infty f(x)\sin 2\pi xy\,dx, \tag{18}$$

它也是一个奇函数；于是，以 $g(y)$ 表示 $f(x)$ 的等式就成为

$$f(x) = 2i\int_0^\infty g(y)\sin 2\pi xy\,dy. \tag{19}$$

(18)和(19)中的积分称为富里叶正弦积分.

类似地，如果要在范围 $(0, \infty)$ 中确定满足条件当 $x=0$ 时 $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ 的 $f(x)$，就可以寻求一个在整个范围 $(-\infty, \infty)$ 中的偶函数 $f(x)$，它在 $(0, \infty)$ 中与 $f(x)$ 重合. 它的富里叶变换式可以写成下列形式:

$$g(y) = 2\int_0^\infty f(x)\cos 2\pi xy\,dx, \tag{20}$$

它也是一个偶函数；于是，以 $g(y)$ 表示 $f(x)$ 的等式就成为

$$f(x) = 2\int_0^\infty g(y)\cos 2\pi xy\,dy. \tag{21}$$

(20)和(21)中的积分称为富里叶余弦积分.

如同富里叶級数的情形一样，并不需要关于富里叶正弦积分和富里叶余弦积分的特殊理論. 应当将它們簡单地看作是分別对奇函数和偶函数取富里叶变换式所得的結果.

在許多情形下，特别是当我們不可能明显地通过函数表中的函数来計算一个富里叶变换式时，最好能有一种方法来估計富里叶变换式 $g(y)$ 当 $|y|\to\infty$ 时的漸近性质，用 $f(x)$ 的靠近其奇点处的性态将它表示出来. 很难在文献中找到关于这种方法的广泛

的說明，而由于在采用了广义函数以后理論变得特别簡单，所以这本书的一个实質的部分就用来闡明这一方法. 对于一个給定的函数的富里叶級数，这一理論也可以不加改变地(§ 5.5)用来确定当 $|n| \to \infty$ 时它的系数 c_n 的漸近性态.

1.5. 广义函数：緒言

第一个要引入的"广义函数"是狄拉克的"δ 函数" $\delta(x)$，它具有下列性質：对于任何适当的連續函数 $F(x)$，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) F(x) dx = F(0). \tag{22}$$

沒有一个通常意义下的函数能够具有性質(22)，但是，可以想象有一个函数序列(例如图 2 中的函数序列)，它們在 $x = 0$ 处有逐漸升高而逐漸变陡的高峯，曲綫下的面积保持等于 1，同时函数在每一点的值趋于 0，点 $x = 0$ 除外，在該点处函数的值趋于无穷. 在极限过程下，这个序列具有性質(22).

其次，可以对 $\delta(x)$ 进行"微分"，得到一个函数 $\delta'(x)$，它具有下列性質：对于任何連續的可微分函数 $F(x)$，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x) F(x) dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) F'(x) dx = -F'(0). \tag{23}$$

象(23)这样的性質也可以在一个函数序列的极限过程中实现(例如，用来表示 $\delta(x)$ 的序列中的函数的导数；見图 3).

从物理上說，可以把 $\delta(x)$ 看作沿 x 軸的一种电荷分布，这种分布就是所謂在原点处的单位点电荷. 类似地，$\delta'(x)$ 相当于一个具单位电力矩的偶极子，这是因为，作为(23)的一个特殊情形，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\delta'(x) dx = -1. \tag{24}$$

由此可見，这些广义函数与一些熟知的理想化的物理現象相对应.

广义函数的利用序列的定义事实上就是在本书第二章中要采用的，这是遵循譚波的办法(譚波在这一点上又是依照米古辛斯基 [Mikusinski] 的). 这里不考虑其他的定义；讀者如果想要了解有关这一問題的历史事实，可以参看譚波的一篇文章，見 *J. Lond.*

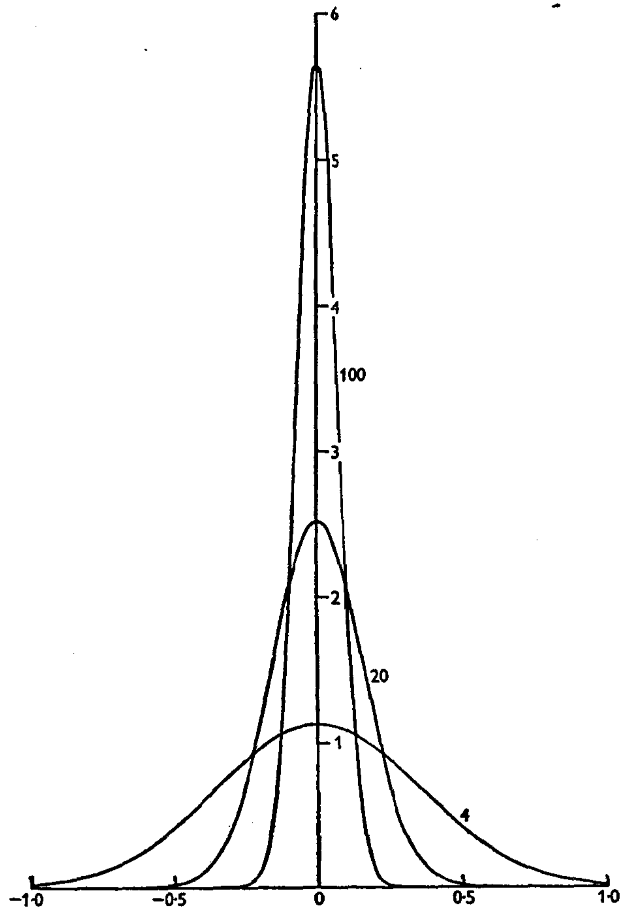

图 2　用以定义 $\delta(x)$ 的序列(第二章例 6)中的函数;第 n 个函数的图形旁标有数字 n (对于 $n = 4, 20, 100$).

Math. Soc., **28** (1953), 134—148.

在利用序列定义广义函数时,必須确定,在怎样的情况下两个序列构成同一个广义函数. 为了这个目的, 将序列的每一項乘以一个"检驗函数" $F(x)$, 就象在 (22) 或 (23) 中那样,然后从 $-\infty$ 到 ∞ 进行积分,再取极限. 如果无論选取怎样的"检驗函数", 对于每一个序列都得到同样的結果, 則称这些序列确定同一个广义