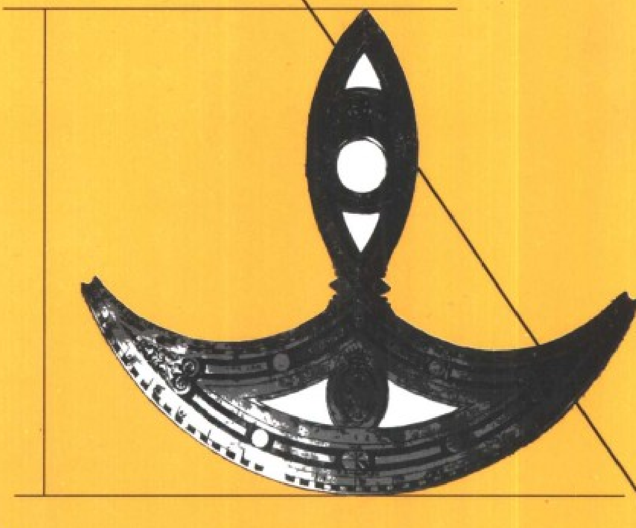
新题型

高中数学
应用问题

（第三版）

沈翔 赵小平 编著

新题型
新题型
新题型
新题型



华东师范大学出版社

高考新题型

高中数学
应用问题

（第三版）

沈 翔 赵小平 编著

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学应用问题/沈翔,赵小平编著.—3版.上海:华东师范大学出版社,2001.11
(高考新题型)
ISBN 7-5617-1789-X

Ⅰ.高…　Ⅱ.①沈…②赵…　Ⅲ.数学课-高中-升学参考资料　Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第074010号

高中数学应用问题
编　　著　沈　翔　赵小平
策划组稿　倪　明
特约编辑　陈信漪
封面设计　黄惠敏
版式设计　蒋　克
出版发行　华东师范大学出版社
　　　　　市场部　电话 021-62865537
　　　　　　　　　传真 021-62860410
http://www.ecnupress.com.cn
社　　址　上海市中山北路3663号
　　　　　邮编200062
印 刷 者　江苏宜兴市第二印刷厂
开　　本　890×1 240　32开
印　　张　11
字　　数　286千字
版　　次　2001年11月第三版
印　　次　2002年3月第二次
书　　号　ISBN 7-5617-1789-X/G·808
定　　价　13.00元
出 版 人　朱杰人

本 书 荣 获

第 10 届全国文教类优秀畅销书

第 7 届全国教育图书展优秀畅销书奖

内容提要

为了贯彻新的数学教学大纲关于形成学生“用数学的意识”的精神，适应高考“加强应用”的需要，本书汇编了紧密联系生活、生产、经济等方面实际的应用问题，涉及的知识内容与新的大纲基本一致.

全书按知识点分为11章，内容包括：方程和方程组、复数、立体几何、函数及其图象、分段函数、三角函数、直线和二次曲线、不等式和极值、数列和极限、排列组合和概率统计、线性规划等. 这些题目极大多数是作者自编或改编的，部分选自国外资料. 由于应用问题都有实际背景，因此，读来亲切，富有解决问题的欲望. 本书对学生增强运用数学知识的意识，提高分析问题和解决问题的能力有很大的帮助.

书末附有20年来我国高考试题中的应用题.

本书可作为高中数学教学补充读物，也可供高中三年级总复习参考.

第 一 版 序

1993 年,严士健、苏式冬和我访问国家考试中心,建议在高考试题中加入数学应用题.杨学为主任、任子朝同志深表赞成,几经宣传和努力,遂有近几年来高考中数学应用题的重视.从数学素质教育的发展看,这一变化恐怕是历史性的.但愿这一势头能保持下去,并形成数学教育界的共识.

中国古代数学一向有实用的传统.数学教学中重视数学应用也并非新问题.在小学里,数学应用题是教学的重点和难点,从未有人持异议.到了初中,学了平面几何,数学品味趋于抽象,逻辑推理不断加强,数学应用渐有淡出之势.不过,数学应用并未绝迹,诸如浓度问题、行程问题等仍有出现,平行四边形与铁栅门的关系等也总要提及.只是被某种错误观念的误导,大家不太重视罢了.

一到高中,情况变得越发严重.一个时期以来,主张数学应用被称为"实用主义"、"短视行为"、"犯文革时期的错误",似乎数学离现实生活越远越好."掐头去尾烧中段"式的纯数学推理,成为惟一的选择.高考题中出现应用题,本是顺理成章的例行公事,到头来竟要上电视特别"宣传公告",也是够令人遗憾的了.

那么,高中数学究竟该教怎样的应用题?有多少应用题的类型?有哪些应用题可考?数学教学和高考数学命题的实践已向我们提出更高的要求.我们曾有一册《中学数学问题集》,那是给教师看的.现在,沈翔、赵小平、康合太三位老师为高中学生编了这些数学应用题,按数学专题编排,便于掌握和复习,可以说填补了一项空白.

据说，“第二次世界大战以来，数学上最重要的变化是数学应用的加强”.我国的数学发展如何重视应用，乃是一篇大文章.《高中数学应用问题》的出版，也许是这篇大文章中的一个小段落.编写应用题不容易，这大概是不错的.

隆冬时节，盼望春消息.任重而道远，愿和大家共勉.审稿之余，兼有此序.

张奠宙

1997年元旦于华东师大

前 言

数学应用和数学的历史可说一样长.古代结绳记数、丈量土地、分配财产导致算术、代数、几何的相继产生.我国最著名的数学典籍《九章算术》就是246个实际应用问题的汇集.注重实际应用,是中国古代数学的优良传统.

一个伟大的数学学派曾在古希腊出现.他们追求精神上的创造,研究纯粹的、抽象的数学,从公理出发,运用逻辑的演绎推理,形成严密的学术体系.一个杰出的代表是欧几里得的《几何原本》.通篇是定义、定理、证明、推论,至于有什么用,他们是不管的.它体现了体力和脑力劳动分工之后,科学发展的新阶段:创造了纯粹而严密的科学体系,却远离了现实生活.

从此以后,数学就从两个方向发展着.一方面是纯粹数学.例如哥德巴赫猜想、费马大定理等世界名题,成为世人关注的焦点,一旦有所突破,可被视为人类思想史上的大事.至于非欧几何、拓扑学、抽象群论等等,虽说开始时看不到和实际的直接关系,但是只要是好的数学知识,往往在若干年后会发现有实际应用.陈省身在20世纪40年代研究的纤维丛理论,到了20世纪70年代,竟成为物理学上由杨振宁等发现的规范场理论的数学工具,这种世界的统一性,令人不可思议.

另一方面,应用数学在不断地迅猛发展.现实世界毕竟是数学发展的源泉.从17世纪以来,社会发展和生产需要一直是数学发展的主要推动力.牛顿从物理学需要发明了微积分,反过来,第谷·布拉赫(Tycho Brahe)用数学方法发现了海王星;蒸汽机推动

了运动学和热力学的发展,促使数学分析学走向新的高峰;电磁学的基本规律是用微分方程写的.时至20世纪,喷气机和航天器的制造与导航,CT扫描的医疗设备,组织大规模战争的运筹方案,本质上都是数学技术.由于数学家的工作大都是在前期和幕后完成的,当鲜花和掌声送给一项重大的科学成就的时候,其中的数学含量,数学技术的重要性往往不被人们所知道.一个鲜明的反差是,纯粹数学的成果是数学家独立完成的,往往更容易为人们所熟知.在中国,很少人知道我国数学家在制造原子弹、导弹和卫星中的作用,而陈景润研究哥德巴赫猜想的成就却是家喻户晓的.这种情况,在中学数学教学中也有所反映.

数学一直是中学里的主干课程.为什么要学那么多的数学?一般认为,数学是"能力筛子"、"思想的体操",无非是"升学需要"、"思想健身"而已.至于有什么用,对不起,不必问.由于大跃进年代,文革时期"过火地"联系实际,破坏了数学知识的系统性,一旦拨乱反正,便专注于纯粹数学的要求.一个时期以来,人们提起"数学应用",犹如谈虎而色变,以致许多人把数学应用看作"实用主义",讥为"短视行为".其实,数学应用能力是基础数学教育的重要组成部分.数学是一个整体.数学以实践为源头,又以实践为终结.有头有尾的数学才是完整的数学知识.中学里的数学内容,多半是纯粹的数学基础知识.然而,接触现实生活中的数学现象,获取比较完整的数学知识,是必要的,也是可能的.那种"掐头去尾烧中段"的做法,把数学知识局限在逻辑推导的范围里,乃是对数学的一种曲解.受以上偏见的影响,高考数学试卷中一度"纯粹数学化",应用问题几乎绝迹.这几年来,国家考试中心做了大量的工作,情况才有了根本的改变.

现在国家提倡数学素质教育,而提高数学应用能力是其中的重要一环.本书收入的这些应用问题,就是试图为高中数学教学提供一些范例.我们的宗旨是,围绕"高中数学教学大纲"的基本要求,避免出现其他行业的生僻技术名词,尽量贴近学生的日常生

活，特别是反映社会主义市场经济的现实. 许多题目是自编的，或根据已有题目改编的，相当一部分，参考了国际上流行的应用问题. 过去的某些应用问题，诸如行程问题、工程问题、浓度问题等之类，我们只选用、改编一小部分.

愿本书能为培养学生的数学应用意识和应用能力添砖加瓦，起一点抛砖引玉的作用.

编　者

目　录

第一章　方程和方程组

1.1　国民经济翻一番

八届人大一次会议指出，今后我国国民经济计划每年平均增长率为 8%～9%. 设从 1993 年起，每年增加 9%，要比 1992 年翻一番，大约是哪一年?

解　设 1992 年我国国民经济基数为 1，翻一番则意味达到 2. 设经过 x 年后达到这个目标. 根据题意，得

$$(1+9\%)^x = 2.$$

解之得
$$x \approx 8.$$

故到 2000 年我国国民经济可比 1992 年翻一番.

1.2　改善住房

某市 1994 年底人口为 20 万，人均住房面积为 8 m^2，计划 1998 年底人均住房面积达到 10 m^2. 如果该市将每年人口平均增长率控制在 1%，那么要实现上述计划，这个城市每年平均至少要新增住房面积多少万 m^2?（结果以万 m^2 为单位，保留两位小数）

解　设每年平均新增住房面积 d 万 m^2. 根据题意可知，从 1994 年底起，这个城市每年年底的住房面积组成一个以 160 为首项，d 为公差的等差数列；每年年底的人口组成一个以 20 为首项，$(1+1\%)$ 为公比的等比数列. 1998 年底对应的项数 $n=5$，可得

$$20 \times (1 + 1\%)^4 \times 10 = 160 + 4d.$$

解之得 $$d \approx 12.0302(\text{万 m}^2).$$

所以平均每年至少新增住房面积 12.04 万 m^2.

1.3 价格膨胀率

在英国,1961 年时,一所新房子以 3 500 英镑的价格出售,而 1981 年,它却以 34 000 英镑的价格再次出售. 20 年来,这所房子没有什么变化,但价格却上涨了. 假定这 20 年来,价格膨胀率不变,那么这所房子的价格膨胀率是多少(忽略房子的折旧因素)?

另一方面,一加仑汽油,在 1961 年的价格是 33 便士;而在 1983 年,一加仑汽油的价格却上涨到 184 便士. 对房价与汽油价分别所反映的价格膨胀率进行比较,哪一个高?

又若上面的价格膨胀率一直保持到 2000 年不变,那么在 2000 年,房价和汽油价格将分别是多少?

解 设初始价格为 a,价格膨胀率为 $x\%$,第 $(n+1)$ 年的价格为 y_n,那么

$$y_n = a \cdot (1 + x\%)^n.$$

对于房屋价格,有

$$34\,000 = (1 + x\%)^{20} \times 3\,500,$$

近似得 $$1 + x\% = 1.12,$$

即 $$x\% = 12\%.$$

同样,对于汽油价格,有

$$184 = (1 + x\%)^{22} \times 33,$$

近似得 $$1 + x\% = 1.081,$$

即 $$x\% = 8.1\%.$$

以上表明,房价的膨胀率为 12%,高于汽油价的膨胀率

8.1%.

若按上面的价格膨胀率发展到2000年,那么房价将是

$$34\,000(1+12\%)^{19}\approx 290\,000(\text{英镑}),$$

汽油价格将是

$$184(1+8.1\%)^{17}\approx 690(\text{便士}).$$

1.4 重铸新合金

有三块合金,第一块是60%的铝和40%的铬,第二块是10%的铬和90%的钛,第三块是20%的铝、50%的铬和30%的钛,现将它们铸成一块含钛45%的新的合金,试问在新的合金中,铬的百分比为多少?

解 设在一个单位重量的新合金中,含第一、第二、第三块合金的重量分别是 x、y、z. 于是可知其中铬的重量

$$\alpha=0.4x+0.1y+0.5z,$$

其中 x、y、z 满足

$$\begin{cases}x+y+z=1,\\0.9y+0.3z=0.45,\\x,\ y,\ z\geqslant 0.\end{cases}$$

它等价于

$$\begin{cases}y=0.5x+0.25,\\z=-1.5x+0.75,\\0\leqslant x\leqslant 0.5.\end{cases}$$

于是 α 可用 x 来表示:

$$\alpha=-0.3x+0.4,\ 0\leqslant x\leqslant 0.5.$$

由此 α 的取值范围为