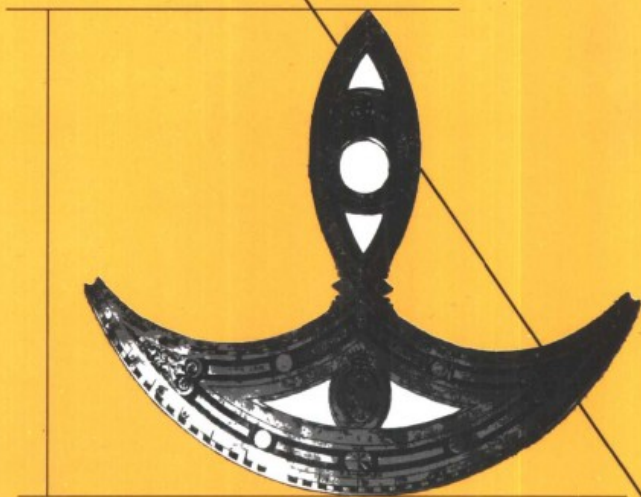


高中数学 应用问题

(第三版)

沈翔 赵小平 编著



高考新题型



高中数学 应用问题

(第三版)

沈翔 赵小平 编著

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学应用问题/沈翔,赵小平编著.—3版.上海:华东师范大学出版社,2001.11

(高考新题型)

ISBN 7-5617-1789-X

I. 高... II. ①沈...②赵... III. 数学课—高中—升学参考资料 IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 074010 号

高中数学应用问题

编 著 沈 翔 赵小平

策划组稿 倪 明

特约编辑 陈信菊

封面设计 黄惠敏

版式设计 蒋 克

出版发行 华东师范大学出版社

市场部 电话 021-62865537

传真 021-62860410

<http://www.ecnupress.com.cn>

社 址 上海市中山北路 3663 号

邮编 200062

印 刷 者 江苏宜兴市第二印刷厂

开 本 890×1 240 32 开

印 张 11

字 数 286 千字

版 次 2001 年 11 月第三版

印 次 2002 年 3 月第二次

书 号 ISBN 7-5617-1789-X/G·808

定 价 13.00 元

出 版 人 朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题,请寄回本社市场部调换或电话 021—62865537 联系)

本书荣获

第10届全国文教类优秀畅销书

第7届全国教育图书展优秀畅销书奖

内 容 提 要

为了贯彻新的数学教学大纲关于形成学生“用数学的意识”的精神,适应高考“加强应用”的需要,本书汇编了紧密联系生活、生产、经济等方面实际的应用问题,涉及的知识内容与新的大纲基本一致.

全书按知识点分为 11 章,内容包括:方程和方程组、复数、立体几何、函数及其图象、分段函数、三角函数、直线和二次曲线、不等式和极值、数列和极限、排列组合和概率统计、线性规划等. 这些题目绝大多数是作者自编或改编的,部分选自国外资料. 由于应用问题都有实际背景,因此,读来亲切,富有解决问题的欲望. 本书对学生增强运用数学知识的意识,提高分析问题和解决问题的能力有很大的帮助.

书末附有 20 年来我国高考试题中的应用题.

本书可作为高中数学教学补充读物,也可供高中三年级总复习参考.

第一版序

1993年,严士健、苏式冬和我访问国家考试中心,建议在高考试题中加入数学应用题.杨学为主任、任子朝同志深表赞成,几经宣传和努力,遂有近几年来高考中数学应用题的重视.从数学素质教育的发展看,这一变化恐怕是历史性的.但愿这一势头能保持下去,并形成数学教育界的共识.

中国古代数学一向有实用的传统.数学教学中重视数学应用也并非新问题.在小学里,数学应用题是教学的重点和难点,从没有人持异议.到了初中,学了平面几何,数学品味趋于抽象,逻辑推理不断加强,数学应用渐有淡出之势.不过,数学应用并未绝迹,诸如浓度问题、行程问题等仍有出现,平行四边形与铁栅门的关系等也总要提及.只是被某种错误观念的误导,大家不太重视罢了.

一到高中,情况变得越发严重.一个时期以来,主张数学应用被称为“实用主义”、“短视行为”、“犯文革时期的错误”,似乎数学离现实生活越远越好.“掐头去尾烧中段”式的纯数学推理,成为惟一的选择.高考题中出现应用题,本是顺理成章的例行公事,到头来竟要上电视特别“宣传公告”,也是够令人遗憾的了.

那么,高中数学究竟该教怎样的应用题?有多少应用题的类型?有哪些应用题可考?数学教学和高考数学命题的实践已向我们提出更高的要求.我们曾有一册《中学数学问题集》,那是给教师看的.现在,沈翔、赵小平、康合太三位老师为高中学生编了这些数学应用题,按数学专题编排,便于掌握和复习,可以说填补了一项空白.

据说,“第二次世界大战以来,数学上最重要的变化是数学应用的加强”.我国的数学发展如何重视应用,乃是一篇大文章.《高中数学应用问题》的出版,也许是这篇大文章中的一个小段落.编写应用题不容易,这大概是不错的.

隆冬时节,盼望春消息.任重而道远,愿和大家共勉.审稿之余,兼有此序.

张奠宙

1997年元旦于华东师大





前言

数学应用和数学的历史可说一样长. 古代结绳记数、丈量土地、分配财产导致算术、代数、几何的相继产生. 我国最著名的数学典籍《九章算术》就是 246 个实际应用问题的汇集. 注重实际应用, 是中国古代数学的优良传统.

一个伟大的数学学派曾在古希腊出现. 他们追求精神上的创造, 研究纯粹的、抽象的数学, 从公理出发, 运用逻辑的演绎推理, 形成严密的学术体系. 一个杰出的代表是欧几里得的《几何原本》. 通篇是定义、定理、证明、推论, 至于有什么用, 他们是不管的. 它体现了体力和脑力劳动分工之后, 科学发展的新阶段: 创造了纯粹而严密的科学体系, 却远离了现实生活.

从此以后, 数学就从两个方向发展着. 一方面是纯粹数学. 例如哥德巴赫猜想、费马大定理等世界名题, 成为世人关注的焦点, 一旦有所突破, 可被视为人类思想史上的大事. 至于非欧几何、拓扑学、抽象群论等等, 虽说开始时看不到和实际的直接关系, 但是只要是好的数学知识, 往往在若干年后会发现实际应用. 陈省身在 20 世纪 40 年代研究的纤维丛理论, 到了 20 世纪 70 年代, 竟成为物理学上由杨振宁等发现的规范场理论的数学工具, 这种世界的统一性, 令人不可思议.

另一方面, 应用数学在不断地迅猛发展. 现实世界毕竟是数学发展的源泉. 从 17 世纪以来, 社会发展和生产需要一直是数学发展的主要推动力. 牛顿从物理学需要发明了微积分, 反过来, 第谷·布拉赫(Tycho Brahe)用数学方法发现了海王星; 蒸汽机推动

了运动学和热力学的发展,促使数学分析学走向新的高峰;电磁学的基本规律是用微分方程写的.时至20世纪,喷气机和航天器的制造与导航,CT扫描的医疗设备,组织大规模战争的运筹方案,本质上都是数学技术.由于数学家的工作大都是在前期和幕后完成的,当鲜花和掌声送给一项重大的科学成就的时候,其中的数学含量,数学技术的重要性往往不被人们所知道.一个鲜明的反差是,纯粹数学的成果是数学家独立完成的,往往更容易为人们所熟知.在中国,很少人知道我国数学家在制造原子弹、导弹和卫星中的作用,而陈景润研究哥德巴赫猜想的成就却是家喻户晓的.这种情况,在中学数学教学中也有所反映.

数学一直是中学里的主干课程.为什么要学那么多的数学?一般认为,数学是“能力筛子”、“思想的体操”,无非是“升学需要”、“思想健身”而已.至于有什么用,对不起,不必问.由于大跃进年代,文革时期“过火地”联系实际,破坏了数学知识的系统性,一旦拨乱反正,便专注于纯粹数学的要求.一个时期以来,人们提起“数学应用”,犹如谈虎而色变,以致许多人把数学应用看作“实用主义”,讥为“短视行为”.其实,数学应用能力是基础数学教育的重要组成部分.数学是一个整体.数学以实践为源头,又以实践为终结.有头有尾的数学才是完整的数学知识.中学里的数学内容,多半是纯粹的数学基础知识.然而,接触现实生活中的数学现象,获取比较完整的数学知识,是必要的,也是可能的.那种“掐头去尾烧中段”的做法,把数学知识局限在逻辑推导的范围里,乃是对数学的一种曲解.受以上偏见的影响,高考数学试卷中一度“纯粹数学化”,应用问题几乎绝迹.这几年来,国家考试中心做了大量的工作,情况才有了根本的改变.

现在国家提倡数学素质教育,而提高数学应用能力是其中的重要一环.本书收入的这些应用问题,就是试图为高中数学教学提供一些范例.我们的宗旨是,围绕“高中数学教学大纲”的基本要求,避免出现其他行业的生僻技术名词,尽量贴近学生的日常生





活,特别是反映社会主义市场经济的现实.许多题目是自编的,或根据已有题目改编的,相当一部分,参考了国际上流行的应用问题.过去的某些应用问题,诸如行程问题、工程问题、浓度问题等之类,我们只选用、改编一小部分.

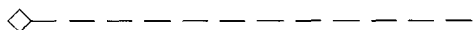
愿本书能为培养学生的数学应用意识和应用能力添砖加瓦,起一点抛砖引玉的作用.

编 者

前

言

3



目 录

前 言	1
-----------	---

第一章 方程和方程组	1
------------------	---

- 1.1 国民经济翻一番(1) 1.2 改善住房(1) 1.3 价格膨胀率(2)
- 1.4 重铸新合金(3) 1.5 煤气收费标准(4) 1.6 订货零件数(5)
- 1.7 航速问题(6) 1.8 轿车的耗费(7) 1.9 等分液体(8) 1.10 电脑的利润(9)
- 1.11 个人所得税(10) 1.12 合金铜棒的利用率(12) 1.13 诺贝尔基金的年收益率(14)
- 1.14 安静小区的分贝(15) 1.15 水桶中剩余的水(16) 练习(17)

第二章 复数	18
--------------	----

- 2.1 荒岛寻宝(18) 2.2 行船与风速(19) 2.3 物体平衡(21)
- 2.4 草原漫步(22) 2.5 值班室的位置(23)

第三章 立体几何	25
----------------	----

- 3.1 降雨量的测定(25) 3.2 冰箱的设计(26) 3.3 套筒的内径(27)
- 3.4 量杯上的刻度(27) 3.5 工件的体积(28) 3.6 坡面上的树影(29)
- 3.7 S形上坡(30) 3.8 遮阳棚的角度(32) 3.9 空心球的沉浮(33)
- 3.10 铆钉的重量(34) 3.11 缠绕铁丝(35) 3.12 蜂窝煤的热效应(37)
- 3.13 较短航线(39) 3.14 飞机的速度(40) 3.15 飞行的高度(41)
- 3.16 飞行安全(43) 3.17 罐头设计方案(45) 3.18 萤石的特征(46)
- 3.19 冰淇淋的包装(48) 3.20 木料密度(49) 3.21 圆锥面材料改圆柱面(50)
- 3.22 上海的“平改坡”(51) 3.23 无盖长方体水箱(52) 3.24 粮仓的容积(53) 练习(55)

第四章 函数及其图象	57
------------------	----

- 4.1 高山气温(57) 4.2 跳伞后的下落距离(57) 4.3 运费函数(58)

4.4 计算机的成本、售价和利润(59) 4.5 学生暑假旅游(60) 4.6 水塔的进水量(61) 4.7 商品的需求总量(62) 4.8 折扣商品的标价(63)
4.9 子弹的高度(63) 4.10 旅馆定价(64) 4.11 边际函数(65)
4.12 休闲小区(66) 4.13 包装与价格(67) 4.14 心脏病发病人数(68)
4.15 咖啡冷却时间(69) 4.16 镭的衰变(70) 4.17 古莲子的年代(71)
4.18 月产量函数(73) 4.19 支架的最大承受力(74) 4.20 农业生产规模(76)
4.21 美国共和党和民主党的席位(77) 4.22 列车流通量(78)
4.23 最佳投资(78) 4.24 广告效应(79) 4.25 选择运输工具(80)
4.26 树木种植方案(1)(81) 4.27 树木种植方案(2)(82) 4.28 修通公路(82) 练习(83)

第五章 分段函数 88

5.1 对口扶贫(88) 5.2 自来水收费(89) 5.3 因特网的费用(90)
5.4 商品的日销售额(91) 5.5 舞会盈利额(92) 5.6 交纳公积金(93)
5.7 修理厂的位置(95) 5.8 批发量与优惠率(95) 5.9 船间距离(96)
5.10 快车追慢车(97) 5.11 隧道车流量(98) 练习(99)

第六章 三角函数 101

6.1 东方明珠塔的高度(101) 6.2 最佳位置(101) 6.3 照明灯的高度(103)
6.4 天线的高度(104) 6.5 光线折射的距离(105) 6.6 海上测距(106)
6.7 塔与路的距离(107) 6.8 滚珠的个数(108) 6.9 两人距离(109)
6.10 看卫星的范围(110) 6.11 两地间的距离(112) 6.12 旋转的风车(114)
6.13 计算机投影仪(115)

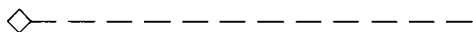
第七章 直线与二次函数 118

7.1 加工吊环(118) 7.2 模糊的图纸(119) 7.3 放映机的反光镜面(121)
7.4 空中缆线(122) 7.5 弹道曲线(123) 7.6 射箭的高度(125)
7.7 送肥区域(126) 7.8 通风塔的半径(127) 7.9 抛体的最远距离(129)
7.10 水库溢流(130) 7.11 标准圆柱的直径(132) 7.12 台风经过的时间(134)
7.13 烟筒接口(135) 7.14 两人合用一辆自行车(137) 7.15 直线围成的曲线(139)
7.16 钢材的利用率(141) 7.17 怎样坐出租车(141)
7.18 水压与深度(142) 7.19 水电站的位置(143) 7.20 刹车距离与速度(144)
7.21 桅杆问题(145) 7.22 铁芯的截面(146) 7.23 改建跑道(147)
7.24 薄片的重心(149) 7.25 跳台跳水(150) 练习(152)

第八章 不等式和极值 155

8.1 维生素的最经济搭配(155) 8.2 窗框尺寸(156) 8.3 事故的主





要责任者(157) 8.4 光线的强度(158) 8.5 附加税的确定(158) 8.6 经营效益(159) 8.7 商品的价位(160) 8.8 最大限速(162) 8.9 漏斗的最大容量(163) 8.10 漏斗的最省用料(164) 8.11 行车时刻表的误差(166) 8.12 可变电阻(167) 8.13 船速和费用(168) 8.14 选点筑路(170) 8.15 圆桶的最佳尺寸(171) 8.16 购粮方式(172) 8.17 存款期限(174) 8.18 木梁的强度(175) 8.19 进货次数(175) 8.20 最佳调拨(177) 8.21 工人分组(179) 8.22 公平收购(180) 8.23 提价方案(181) 8.24 出售时机(182) 8.25 狭路相逢(183) 8.26 测绘队人数(184) 8.27 产量的确定(185) 8.28 油库位置(185) 8.29 利税增长率问题(187) 8.30 水库的容量(187) 8.31 产量与利润(188) 8.32 速度与成本(188) 8.33 驾驶员血液中的酒精含量(190) 8.34 双层玻璃窗的功效(191) 8.35 订货策略(192) 练习(193)

第九章 数列和极限..... 196

9.1 圆钢堆垛(196) 9.2 胶片的长度(196) 9.3 收割庄稼(198) 9.4 运输卡车的行程(199) 9.5 资金增长率(199) 9.6 鱼产量的增减(201) 9.7 匹萨饼的块数(202) 9.8 兔子的繁殖(202) 9.9 登楼方案(204) 9.10 球的弹跳距离(205) 9.11 售房付款方案(206) 9.12 汽车费用(207) 9.13 配制农药(207) 9.14 餐厅选菜(209) 9.15 零存整取的利息(210) 9.16 如果没买车(211) 9.17 分期付款的方案(211) 9.18 筹款购房计划(213) 9.19 技术改造(213) 9.20 购置和租赁(214) 9.21 投资方案的选择(216) 9.22 平均年成本(216) 9.23 选购发动机(218) 9.24 事故赔偿金(219) 9.25 木材砍伐量(220) 9.26 投资回收(222) 9.27 贷款经营(223) 9.28 闸门的压力(224) 9.29 稀释溶液(225) 9.30 股票的价值(226) 9.31 住房公积金贷款和商业性贷款(227) 9.32 柯克岛(229) 9.33 贫困地区脱贫奔小康(231) 9.34 开发西部(232) 9.35 网络公司的市场占有率(233) 9.36 茶树培植(234) 9.37 “满一百送二十,连环送”的酬宾方式(235) 9.38 河水的含沙量(237) 练习(238)

第十章 排列组合和概率统计..... 245

10.1 电话号码升位(245) 10.2 选派翻译(245) 10.3 焊接点脱落(246) 10.4 高考志愿表(247) 10.5 弹子滚动(247) 10.6 抽签摸彩(249) 10.7 六面骰子和十二面骰子(250) 10.8 限时约会(252) 10.9 投篮命中率(252) 10.10 算“24”点的牌组(253) 10.11 风险决策(254) 10.12 申购者摇号购股票(254) 10.13 模拟决斗(255) 10.14 求

职(257) 10.15 赌博的规则(258) 10.16 试验决策(258) 10.17 投资期
望(260) 练习(261)

第十一章 线性规划..... 262

11.1 最佳时速(262) 11.2 最少用料(263) 11.3 最大利润(264)

11.4 养鸡场的围栏(266) 11.5 获利最大的运输方案(267) 11.6 调运方
案(268) 11.7 私人办学(269) 11.8 限制排污(271)

参考答案..... 273

附录

高考应用题汇编..... 292

第三版后记..... 337





第一章 方程和方程组

1.1 国民经济翻一番

八届人大一次会议指出,今后我国国民经济计划每年平均增长率为 $8\%\sim 9\%$. 设从1993年起,每年增加 9% ,要比1992年翻一番,大约是哪一年?

解 设1992年我国国民经济基数为1,翻一番则意味达到2. 设经过 x 年后达到这个目标. 根据题意,得

$$(1+9\%)^x = 2.$$

解之得 $x \approx 8$.

故到2000年我国国民经济可比1992年翻一番.

1.2 改善住房

某市1994年底人口为20万,人均住房面积为 8 m^2 ,计划1998年底人均住房面积达到 10 m^2 . 如果该市将每年人口平均增长率控制在 1% ,那么要实现上述计划,这个城市每年平均至少要新增住房面积多少万 m^2 ? (结果以万 m^2 为单位,保留两位小数)

解 设每年平均新增住房面积 d 万 m^2 . 根据题意可知,从1994年底起,这个城市每年年底的住房面积组成一个以160为首项, d 为公差的等差数列;每年年底的人口组成一个以20为首项, $(1+1\%)$ 为公比的等比数列. 1998年底对应的项数 $n=5$,可得

$$20 \times (1 + 1\%)^4 \times 10 = 160 + 4d.$$

解之得 $d \approx 12.030\ 2(\text{万 m}^2).$

所以平均每年至少新增住房面积 $12.04\ \text{万 m}^2$.

1.3 价格膨胀率

在英国,1961年时,一所新房子以3 500英镑的价格出售,而1981年,它却以34 000英镑的价格再次出售.20年来,这所房子没有什么变化,但价格却上涨了.假定这20年来,价格膨胀率不变,那么这所房子的价格膨胀率是多少(忽略房子的折旧因素)?

另一方面,一加仑汽油,在1961年的价格是33便士;而在1983年,一加仑汽油的价格却上涨到184便士.对房价与汽油价分别所反映的价格膨胀率进行比较,哪一个高?

又若上面的价格膨胀率一直保持到2000年不变,那么在2000年,房价和汽油价格将分别是多少?

2

解 设初始价格为 a ,价格膨胀率为 $x\%$,第 $(n+1)$ 年的价格为 y_n ,那么

$$y_n = a \cdot (1 + x\%)^n.$$

对于房屋价格,有

$$34\ 000 = (1 + x\%)^{20} \times 3\ 500,$$

近似得 $1 + x\% = 1.12,$

即 $x\% = 12\%.$

同样,对于汽油价格,有

$$184 = (1 + x\%)^{22} \times 33,$$

近似得 $1 + x\% = 1.081,$

即 $x\% = 8.1\%.$

以上表明,房价的膨胀率为 12% ,高于汽油价的膨胀率





8.1%.

若按上面的价格膨胀率发展到 2000 年,那么房价将是

$$34\,000(1+12\%)^{19} \approx 290\,000(\text{英镑}),$$

汽油价格将是

$$184(1+8.1\%)^{17} \approx 690(\text{便士}).$$

1.4 重铸新合金

有三块合金,第一块是 60% 的铝和 40% 的铬,第二块是 10% 的铬和 90% 的钛,第三块是 20% 的铝、50% 的铬和 30% 的钛,现将它们铸成一块含钛 45% 的新的合金,试问在新的合金中,铬的百分比为多少?

解 设在一个单位重量的新合金中,含第一、第二、第三块合金的重量分别是 x 、 y 、 z . 于是可知其中铬的重量

$$\alpha = 0.4x + 0.1y + 0.5z,$$

其中 x 、 y 、 z 满足

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ 0.9y + 0.3z = 0.45, \\ x, y, z \geqslant 0. \end{cases}$$

它等价于

$$\begin{cases} y = 0.5x + 0.25, \\ z = -1.5x + 0.75, \\ 0 \leqslant x \leqslant 0.5. \end{cases}$$

于是 α 可用 x 来表示:

$$\alpha = -0.3x + 0.4, \quad 0 \leqslant x \leqslant 0.5.$$

由此 α 的取值范围为