JIE GOU SHU XUE CONGSHU

结构数学丛书

# 变分学

胡海昌　胡闰莓　编著

中国建筑工业出版社

结构数学丛书

# 变分学

胡海昌
胡闰苺 编著

中国建筑工业出版社

变分学主要研究能用各种积分形式表达的泛函极值问题。本书简明地阐述了变分学的基本原理，及其在结构力学、有限单元法和结构优化中的应用；着重介绍如何把泛函极值问题准确和简单明了地表达出来，以及如何把泛函极值问题转化为微分方程的边值问题，此外还介绍了变分问题的直接近似解法。书中包括四章：1.定积分的驻值；2.带有附加条件的定积分的驻值；3.本征值的瑞利商变公式；4.变分问题的直接近似解法简介。其中第三章包括有作者个人成果的介绍。

本书可供土建结构设计研究工程技术人员、结构力学工作者以及土建结构专业大学高年级学生参考。

结构数学丛书
变分学
胡海昌
胡闰苺 编著
*
中国建筑工业出版社出版（北京西郊百万庄）
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
中国建筑工业出版社印刷厂印刷（北京阜外南礼士路）
*
开本：850×1168毫米1/32 印张：4 3/4 字数：126千字
1987年7月第一版 1987年7月第一次印刷
印数：1—4,550册 定价：1.60元
统一书号：15040·5266

# 出 版 说 明

工程理论的发展与数学理论有着密切的关系，为使结构工程技术人员掌握有关的数学理论，便于采用新的结构设计计算方法和进行结构理论研究，我社组织出版这套结构数学丛书。丛书的对象是已学过大学工程专业中数学、结构力学、以及工程结构设计等课程的高年级大学生和在职工程技术人员。

本丛书介绍一系列有关土建结构设计计算新方法的数学理论和方法。每一种书中集中介绍一门数学的学科或一个专题；着重于使读者能充分掌握和学会运用各种数学的基本方法，而不过分强调数学理论推导的阐述。书中以数学基本理论和概念为主线，以结构设计的应用为横线，尽量多举土建结构计算中有代表性的实例进行阐述。内容除包括基本方法的介绍外，也旁及国内外该门数学在工程结构中的应用情况，使读者对其有一概括性的了解。叙述力求简明扼要，重点突出，有介绍，有分析，有评价，易为读者接受。

本丛书已拟订的选题计有：变分学、模糊数学、数学规划方法、可靠性数学、数值计算方法、福氏变换与谱分析、统计数学等。今后有条件时将陆续拟订新选题组织出版。

本丛书在组织过程中得到胡海昌教授、钟万勰教授、李继华教授、王光远教授的大力支持，王光远教授还直接参加拟订选题和组稿工作，我们在此表示感谢。

# 序　言

变分学是一个古老的数学分支。它研究泛函、主要是能用各种积分形式表达的泛函的极值和驻值问题。它一诞生就受到力学工作者的重视。自从里兹提出变分问题的直接近似解法（即著名的里兹法）以来，特别是有限单元法广泛应用以来，变分学更受到了力学和工程设计人员的重视。广大结构力学和结构设计工作者希望通过学习变分学来更好地理解、应用和发展力学中的各种变分原理、各种有限单元法和结构优化设计中的有关原理。为了满足这个需要，作者应约编写了这本《变分学》。

从广义来说，变分学包含如下四个方面的内容：（1）哪些问题可以提成泛函的极值或驻值问题；（2）如何把问题提得准确、简单、明了；（3）如何把泛函的驻值问题转化为微分方程的边值问题；（4）变分问题的直接近似解法，常称变分方法。限于篇幅，本书主要讲述第（2）、（3）两个问题，并扼要地介绍第（4）个问题的概况。

上述第（1）个问题常称为变分学的逆问题。要一般地回答这个问题是十分困难的，需要用到较高深的数学理论。但目前很多重大问题实际上早已被提作变分问题了。上述第（4）点变分法是变分学在实用上最重要的问题。正是由于对直接近似解法有了重大的突破，才使得变分学获得普遍的重视。近年来国内有关近似解法（数值解法）的著译已出版多本。相比之下，讨论第（2）、（3）两个古典问题的著译却寥寥可数，而且大都是几十年前出版的。所以，本书把重点放在这两个问题上。这样的安排。从一本书来看可能有较大的欠缺；但是从目前已出版的变分

学的书来看，大概能弥补一下目前变分学理论著作缺少并已陈旧的缺陷，因而可能不会给人以轻重倒置的印象。

本书内容着重于应用。书中讨论了比较多的问题类型，并辅以必要的例题和习题。对于一些纯数学的题材，并不作详细论述。对于一些重要的概念和结论，叙述力求准确。对于一些容易引起误解的问题，作了必要的说明。

为了方便本书的基本读者，书中的例题和习题大多选自结构力学。不过本书的理论部分对其它专业也都有参考价值。

本书编写得比较匆忙。选材和叙述都来不及广泛征求意见和反复推敲，不妥和错误之处在所难免。衷心希望广大读者提出，以便今后改正。

胡海昌

# 目　录

序　言
第1章　定积分的驻值……………………………………………… 1
§1-1　泛函极值问题的几个简单例子……………………………1
§1-2　泛函·泛函极值和驻值问题的提法……………………4
§1-3　泛函的驻值问题与微分方程边值问题…………………7
§1-4　定积分$\int_a^b F(x, y, y')dx$的驻值……………………7
§1-5　强制边界条件和自然边界条件……………………………14
§1-6　可动边界点的情况……………………………………………16
§1-7　泛函的高阶变分·泛函取极值的充分条件………………20
§1-8　涉及高阶导数的定积分的驻值……………………………23
§1-9　涉及多个自变函数的定积分的驻值………………………27
§1-10　自变函数的连续性和强制边界条件的分类………………29
§1-11　重积分的驻值……………………………………………………33
§1-12　涉及高阶导数的重积分的驻值………………………………38
§1-13　参数小变化对积分的驻值和驻值函数的影响……………41
§1-14　变分学的基本命题和对偶空间………………………………46
第2章　带有附加条件的定积分的驻值……………………………50
§2-1　多自变量函数的条件驻值……………………………………50
§2-2　带有定积分约束的定积分的驻值…………………………56
§2-3　带有微分方程约束的定积分的驻值………………………64
§2-4　对拉格朗日乘子法的补充说明………………………………68
§2-5　勒让德变换……………………………………………………………75
§2-6　定积分驻值问题的几种标准形式……………………………77
§2-7　罚函数的应用………………………………………………………81

第 3 章　本征值的瑞利商变分式……………………………84
§ 3-1　本征值问题和瑞利商变分式 ………………………………84
§ 3-2　本征解的几个重要特性 ……………………………………91
§ 3-3　增加约束对本征值的影响 …………………………………95
§ 3-4　迭代法及其收敛性 …………………………………………98
§ 3-5　本征值的包含定理…………………………………………100
§ 3-6　参数小变化对本征值的影响………………………………103
§ 3-7　变剖面梁优化设计举例……………………………………111
第 4 章　变分问题的直接近似解法简介 ……………………118
§ 4-1　经典里兹法…………………………………………………118
§ 4-2　坎托洛维契法………………………………………………125
§ 4-3　欧拉差分法和有限单元法…………………………………128
§ 4-4　二维问题的有限单元法・协调单元・部分协调单元和
过分协调单元……………………………………………130
§ 4-5　有限条法……………………………………………………133
§ 4-6　增元降阶法…………………………………………………134
§ 4-7　有限单元法与配点法的结合应用…………………………136
§ 4-8　有限单元法的收敛性………………………………………137
附　录　部分习题的解和提示 …………………………………139

# 第 1 章　定积分的驻值

## §1-1　泛函极值问题的几个简单例子

在高等数学中讲述过函数的极值和驻值问题。本书扼要地讲述一类更广泛的极值问题，称为泛函的极值和驻值问题。有些基本思想是与函数的问题相同的。本节先举几个具体的简单例子，以说明问题的性质。

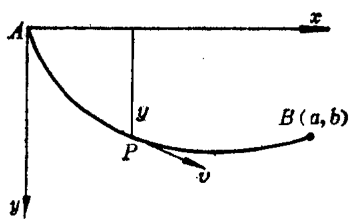

图　1-1

**例一**　最速降线问题。

如图 1-1，给定空间中两点 $A$ 和 $B$，$A$ 高于 $B$。要求在这两点间连接一条曲线，使得有重物从 $A$ 沿此曲线自由滑下（忽略摩擦力）时，从 $A$ 到 $B$ 所需的时间最小。

通过 $A$、$B$ 两点并垂直水平面作一平面，在此平面上取一笛卡尔坐标系（$x$，$y$），以 $A$ 为原点，$x$ 轴水平，$y$ 轴向下。命 $B$ 点的坐标为 $x=a$，$y=b$。命所求曲线的方程为 $y=y(x)$。已经给定

$$\begin{aligned}&\text{在 } x=0 \text{ 处，} \quad y=0\\ &\text{在 } x=a \text{ 处，} \quad y=b\end{aligned} \tag{1-1}$$

设 $P$（$x$，$y$）是曲线上的一点。重物在 $P$ 点的速度 $v$ 可由能量守恒原理求得

$$\frac{1}{2}mv^2=mgy$$

这里 $g$ 是重力加速度。由此得

$$v=\sqrt{2gy}$$

命 $ds$ 为曲线的弧长微分，则有

$$\frac{ds}{dt}=v=\sqrt{2gy}$$

$$dt=\frac{ds}{\sqrt{2gy}}=\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx}{\sqrt{2gy}}$$

因此，重物从 $A$ 滑到 $B$ 所需时间 $T$ 为

$$T=\int_0^a\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{2gy}}dx \qquad (1\text{-}2)$$

本例提出的力学问题现在转化成如下的数学问题：在 $0\leqslant x\leqslant a$ 的区间内找一个函数 $y(x)$，使它满足边界条件（1-1），并使由（1-2）定义的 $T$ 取最小值。

这里要寻找的是一个未知函数 $y(x)$。$y(x)$ 必须满足的条件有两类。一是明显提出的边界条件（1-1），不满足（1-1)的函数不在考虑之列。二是这个函数 $y(x)$ 应使（1-2）右端的积分有意义，即存在一个与之对应的 $T$ 值。第二类条件不讲自明，任何一个使 $T$ 无定义的函数 $y(x)$ 当然不在考虑之列。其要求是使 $T$ 取最小值。

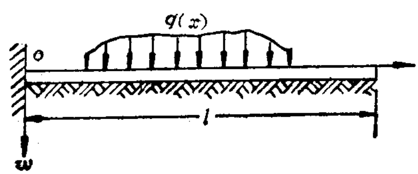


图 1-2

**例二** 弹性地基梁的平衡问题。

如图 1-2，设有一个放在弹性地基上的梁，承受分布横向载荷 $q(x)$ 的作用。已知梁的一端($x=0$)固定，另一端($x=l$)自由。问怎样的挠度 $w(x)$ 能使这个系统的总势能 $\Pi$ 取最小值？

设梁的弯曲刚度为 $D$。梁的弯曲应变能 $\Pi_b$ 是

$$\Pi_b = \frac{1}{2}\int_0^l D\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 dx$$

再设地基的刚度系数为 $k$。地基中贮存的能量$\Pi_f$为

$$\Pi_f = \frac{1}{2}\int_0^l kw^2 dx$$

由于梁的挠度，载荷的势能有了变化。载荷的势能$\Pi_l$可写成为

$$\Pi_l = -\int_0^l qw dx$$

这个系统的总势能是上列三者之和，因此有

$$\Pi(w) = \int_0^l \left\{\frac{D}{2}\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 + \frac{k}{2}w^2 - qw\right\}dx \tag{1-3}$$

另外在提问题时已规定了 $x=0$ 是固定端，即

$$在\ x=0\ 处：\ w=0,\ w'=0 \tag{1-4}$$

这样上面提出的力学问题，经化为数学问题后变为：在 $0\leqslant x\leqslant l$ 的区间内找一个函数 $w(x)$，使它满足边界条件（1-4），并使由公式（1-3）定义的$\Pi$取最小值。

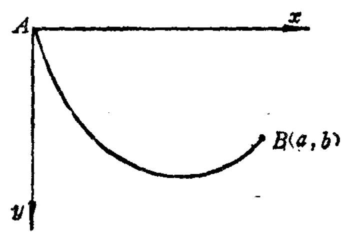


图 1-3

**例三** 悬索线问题。

如图 1-3 给定空间中 $A$、$B$ 两点以及一条长度 $l>\overline{AB}$ 的绳索。假定绳索的长度不变，弯曲刚度可以忽略不计。若把此绳索的两端挂在 $A$、$B$ 两点，求平衡状态下绳索的形状。

和例一一样，取一坐标系 $(x, y)$。命绳索所画的曲线方程是 $y=y(x)$。已知有边界条件

$$在\ x=0\ 处\ y=0，在\ x=a\ 处\ y=b \tag{1-5}$$

由于绳索的长度不变，所以还有

$$\int_0^a \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = l \tag{1-6}$$

绳索在平衡状态时，它的重心最低，也就是重心的坐标

$$\bar{y}=\frac{1}{l}\int_0^a y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \tag{1-7}$$

最大。因此，这个力学问题的一种数学提法是：在 $0 \leqslant x \leqslant a$ 的区间内找一个函数 $y(x)$，使它满足边界条件（1-5）和积分条件（1-6），并使由（1-7）式定义的 $\bar{y}$ 取最大值。

这个力学问题还可以提成另一个类似的数学问题。设 $s$ 是绳索上某点到 $A$ 点的弧长。曲线方程也可以用参数 $s$ 的函数来表示：

$$x = x(s), \quad y = y(s) \tag{1-8}$$

这样边界条件变为

$$\begin{aligned} &\text{在 } s=0 \text{ 处：} x=0, \quad y=0 \\ &\text{在 } s=l \text{ 处：} x=a, \quad y=b \end{aligned} \tag{1-9}$$

而平衡条件可写成使

$$\bar{y}=\frac{1}{l}\int_0^l y\,ds \tag{1-10}$$

取最大值。因参数 $s$ 代表弧长，所以有

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1 \tag{1-11}$$

这样，上述力学问题也可以提为另一个数学问题，即：在 $0 \leqslant s \leqslant l$ 的区域内找两个函数 $x(s)$ 和 $y(s)$，使它们满足边界条件（1-9）和微分方程（1.11），并使由（1.10）定义的 $\bar{y}$ 取最大值。

## §1-2　泛函·泛函极值和驻值问题的提法

上节的几个例子，都涉及到在一定范围内可变函数，以及依

赖于这些可变函数的量。这些可变函数称为自变函数，而依赖于自变函数的量则称为自变函数的泛函。

上节各例中的泛函都能用积分的形式表达。但是，根据泛函的定义，泛函并不一定都能用积分形式表达的。例如，在区间 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 内有一个可变函数 $f(x)$。命 $M$ 为 $f(x)$ 在上述区间内的最大值。$M$ 就是 $f(x)$ 的一个泛函，因为选定了 $f(x)$ 后便能决定 $M$ 的大小。这时 $M$ 并不一定能用积分表达，但是本书将只限于讨论能用积分形式表达的泛函。

正象函数关系中有显函数和隐函数一样，泛函中也有目前难于用明显形式表达的泛函。下面举这样的一个例子。需要设计一个两端简支的梁。已知它的跨度，所用材料的弹性模量、密度和总重量。若梁剖面的形状必须为圆形，它的半径 $r(x)$ 是个可以由设计者选定的函数。求 $r(x)$ 使得梁的基本固有频率尽量大。这样，根据题意，梁的基本固有频率 $\omega$ 是函数 $r(x)$ 的一个泛函。因为给定一个函数 $r(x)$ 后，汇同题中原先给定的其它几个条件便可决定 $\omega$。但是，$\omega$ 与 $r(x)$ 的关系是很复杂的，难于写成明显的形式 $\omega=\omega(r)$（此题的解见 § 3-7）。

要清楚地提出一个泛函的极值（或驻值）问题，除应把泛函本身讲清楚（最好写出它的算式）以外，还必须讲明自变函数的性质。譬如，有几个自变函数，每个自变函数各定义在什么区域内，能在什么范围内选择。这个范围称为自变函数的选择域（或选择空间）。选择域通常由自变函数必须满足的先决条件所确定。这些先决条件包括事前给定的由等式或不等式表达的边界条件、积分条件、微分方程等等多种形式。除个别的特殊情况外，一般情况下缩小自变函数的选择域（也就是增加先决条件），将使泛函的极值或驻值及与其相应的自变函数发生变化。例如，极小值可能变大（但不会变小），极大值可能变小（但不会变大），非极值的驻值可能变为极值（极值不会变为非极值的驻值）。所以弄清楚自变函数的性质同样是必须的。

对于一些简单的泛函，哪几个函数是自变函数一般不易误

解。对于复杂的泛函，常常为了书写方便而引进中间变量；若稍不留意就可能引起误解。这种情况在函数的驻值问题中有，在泛函的驻值问题中更易发生。

**【例 1-1】** 考虑下列函数 $f(x)$：

$$f(x)=x^2+xe^{\alpha x}\cos\beta x+[e^{\alpha x}\cos\beta x]^2. \tag{1-12}$$

为书写方便起见，可将它改写成为

$$f(x)=F[x, y(x)] \tag{1-13}$$

其中

$$F(x, y)=x^2+xy+y^2 \tag{1-14}$$

$$y=e^{\alpha x}\cos\beta x \tag{1-15}$$

以下三种说法是等价的：

（1）求 $f(x)$ 的最小值，

（2）求 $F[x, y(x)]$的最小值，

（3）求 $F(x, y)$的最小值，其中 $y$ 由（1-15）式决定。

如果简单地说："求 $F(x, y)$ 的最小值"，那就会使人理解为求二变量函数（1-14）的最小值了。

**【例 1-2】** 上节的泛函（1-2）书写起来比较麻烦。我们可以引用一个中间变量而把它改写成

$$p=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \tag{1-16}$$

$$T=\int_0^a \frac{p}{\sqrt{2gy}}dx \tag{1-17}$$

以下两种说法是等价的：

（1）在（1-1）式的前提下求由（1-2）式定义的 $T$ 的最小值；

（2）在（1-1）和（1-16）两式的前提下求由（1-17）式定义的 $T$ 的最小值。

如果简单地说："求由（1-17）定义的 $T$ 的最小值"，那就会使人以为 $y$ 和 $p$ 两个函数都是自变函数了，并且没有边界条件。事实上是有边界条件（1-1），并且只有 $y$ 是自变函数。$p$ 虽然可

变，但必须按照公式（1-16）跟着 $y$ 变，因此它不是自变函数，或者说不是独立的可变函数。

## §1-3 泛函的驻值问题与微分方程边值问题

本书是要介绍如何把泛函的极值或驻值问题化为微分方程的边值问题。变分学的早期的工作都是这一类问题。因为微分方程发展在先，变分学发展在后。在早期，一旦将泛函的驻值问题化为微分方程的边值问题之后，便认为问题已经解决，至少认为问题已经基本解决。自从里兹提出直接求泛函极值的近似方法（即著名的里兹法）以后，人们发现，从求近似解的角度来看，从泛函的驻值问题出发，常常比从微分方程边值问题出发更为方便。而电子计算机广泛使用之后，这种观点得到越来越多的赞同。于是人们的研究目标，从原来把泛函的驻值问题化为微分方程的边值问题，逐步转变为把微分方程的边值问题化为泛函的驻值问题❶。经过欧拉、拉格朗日以及随后的许多数学工作者的努力，对于前一类问题已经建立了比较成熟、比较系统的方法。但是对于后一类新的逆问题，虽然也已有许多人作了研究，但总的说来还不很成熟。因此，目前用得较多的主要还是根据微分方程的物理或工程背景，采取尝试和核对的办法；即先猜想一个泛函的驻值问题，然后再进行核对，看它是否和原来的微分方程边值问题等价。本书限于介绍如何将泛函的驻值问题化为微分方程的边值问题，不讨论逆问题。

## §1-4 定积分 $\int_a^b F(x, y, y')dx$ 的驻值

本节先来讨论如何把一类简单的泛函极值或驻值问题化为微

---

❶ 并不是所有的微分方程边值问题都能化为泛函的驻值问题的。这里首先有一个转化的可能性问题。

分方程的边值问题。通过对这类问题的分析，可以建立变分学的基本概念，并阐明把变分问题化为微分方程问题的主要步骤。

例如，考虑下列的问题：在自变数 $x$ 的区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 内找一个函数 $y(x)$，使它满足边界条件

$$\text{在 } x = a \text{ 处 } y = \alpha,\quad \text{在 } x = b \text{ 处 } y = \beta \qquad (1\text{-}18)$$

并使泛函

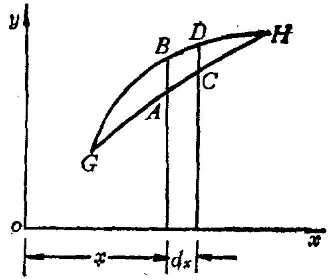

图 1-4

$$V = \int_a^b F(x, y, y')dx \qquad (1\text{-}19)$$

取极值（极小或极大值）。

图 1-4 中 $G(x = a, y = \alpha)$ 和 $H(x = b, y = \beta)$ 是已知的两点。问题是要在 $G$，$H$ 间连接一条曲线使泛函 $V$ 取极值。设想已取了一条曲线 $GACH$，命它的方程是

$$y = y(x)$$

设想在曲线 $GACH$ 的无穷小邻域❶另取一条曲线 $GBDH$，并命这条曲线的纵坐标为

$$y(x) + \delta y(x)$$

$\delta y$ 是个无穷小量，称为自变函数的变分。

相应于这两条曲线，可以求得泛函的两个值

$$V = \int_a^b F(x, y, y')dx$$

❶ 两个自变函数 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是否无限接近，没有绝对的标准，只有相对的标准；即只有相对于所讨论的泛函才有定义。只要函数本身以及泛函中出现的各阶次导数的差 $(y_2 - y_1)$，$(y_2' - y_1')$，……都是无穷小量，即认为 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 无限接近。这个要求已足以保证本书各节推导各种欧拉方程的过程正确无误。对“无限接近”提出更多更高的要求是不必要的。

$$V+\Delta V=\int_a^b F[x, y+\delta y, y'+(\delta y)']dx$$

这里 $\Delta V$ 代表泛函的增量。

自变量不变（即 $x$ 不变）而仅仅由于函数（曲线）无穷小变化而引起纵坐标的增加，称为自变函数的变分，记为 $\delta y$。另外，仍用高等数学中的定义，函数（曲线）不变，由于自变量 $x$ 的无穷小变化 $dx$ 所引起的纵坐标的增加称为函数的微分，记为 $dy$。这样图 1-4 中 $A$、$B$、$C$ 三点的纵坐标各为

$$A: \quad y$$

$$B: \quad y+\delta y$$

$$C: \quad y+dy=y+y'dx$$

而 $D$ 点的纵坐标，若从 $C$ 点算过去，则因 $x$ 和 $dx$ 都不变，有

$$y+y'dx+\delta(y+y'dx)=y+\delta y+(y'+\delta y')dx$$

若从 $B$ 点算过去则是

$$y+\delta y+[y'+(\delta y)']dx$$

这两个纵坐标是相等的，所以有

$$(\delta y)'=\delta y' \tag{1-20}$$

这个公式表明，一个函数的微分运算与变分运算的顺序是可以交换的。进行变分计算时，常常要用到这个公式。

利用公式（1-20），$V+\Delta V$ 的算式可写成

$$V+\Delta V=\int_a^b F[x, y+\delta y, y'+\delta y']dx$$

于是有

$$\Delta V=\int_a^b \{F(x, y+\delta y, y'+\delta y')-F(x, y, y')\}dx \tag{1-21}$$

对于力学及工程中遇到的多数泛函，被积函数 $F(x, y, y')$ 是 $x$，$y$，$y'$ 的连续可导的函数。因此，当 $\delta y$、$\delta y'$ 很小时，$\Delta V$ 也很小。当 $\delta y$、$\delta y'$ 是无穷小量时，$\Delta V$ 也是无穷小量。如果取出等式（1-21）两端的一阶无穷小量，则有