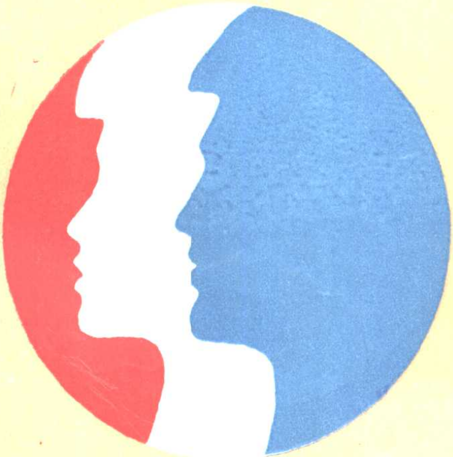
周春荔
李延林

北京市中学生数学竞赛试题解析



气象出版社

北京市中学生数学竞赛
试 题 解 析

周春荔　李延林　编

气 象 出 版 社

（京）新登字046号

内 容 简 介

本书是1989—1993北京市初二、高一数学竞赛试题解析。试题紧密结合中学数学教学，活而不难，巧而不偏，深受广大师生欢迎。试题解析由北京数学会普及工作委员会副主任周春荔主持撰写。他长期从事北京市中学生数学竞赛命题和研究工作，了解来龙去脉。本书解法详细，重在分析，是中学数学课外活动的重要参考资料。

本书还集录了1991—1993美国高中数学考试（AHSME）和美国数学邀请赛（AIME）的试题，并由李延林老师对解答重新作了详细的校订，其中很多有特色的试题及其解法，可供读者研究参考。

本书既是数学课外活动的参考书，也是数学奥林匹克教练员的重要研究资料。

北京市中学生数学竞赛试题解析

1989—1993

周春荔　李延林　编

责任编辑：杨长新　终审：纪乃晋

封面设计：严瑜仲　责任技编：都平　责任校对：白　璐

*

气象出版社出版

（北京西郊白石桥路46号）

北京市房山先锋印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行　全国各地新华书店经销

*

开本：787×1092　1/32　印张：8.375　字数：183千字

1994年2月第一版　1994年2月第一次印刷

印数：1—7000　定价：5.00元

ISBN 7-5029-1635-0/G·0427

写 在 前 面

北京市中学生数学竞赛有着悠久的历史。在1988年以前的各届试题及解答，都已经先后出版过专门的小册子，广为流传。

随着形势的发展，北京市中学生数学竞赛日趋规范，只限于初二和高一两个年级，并且相应地进行了必要的改革。从1990年起分为初试与复试，初试以普及为主，复试适度提高，命题紧密结合中学数学教学实际，活而不难，趣而不怪，巧而不偏，力求体现出科学性、知识性、应用性、启发性、趣味性的综合统一。试题形成一定特色，很受广大数学爱好者的欢迎。

为了适应广大数学奥林匹克学校教学和研究的需要，我们将1989—1993五年来北京市中学生数学竞赛试题及解答加工整理奉献给读者。并集录了近三年中北京数学会普委会组织北京市部分中学生参加的美国高中数学考试（AHSME）和美国数学邀请赛（AIME）的试题，其中很多有特色的试题及其解法，可供读者研究参考。

近五年的北京市中学生数学竞赛，是由北京数学会副理事长、普及工作委员会主任杨守廉教授主持的。王尚志、齐东旭、乔家瑞、何裕新、余炯沛、吴建平、李延林、周春荔、明知白、赵大悌、欧阳东方、胡大同、唐守默、唐大昌、陶晓永、陶文中、陶懋颀、莫颂清等老师参加了这五届的部分或全部的命题工作。本书是由北京数学会普及工作委

员会副主任周春荔副教授对试题及解答进行了加工整理，解答详细、重在分析，适合广大中学数学爱好者研读。

近三年的AHSME及AIME试题及解答是由北京数学会理事李延林老师逐年陆续翻译的，王尚志、吴建平、杨守廉等先生分别对译稿作过校审或审核。在集入本书时，又由李延林老师对解答进行了重新审校。

值本书问世之际，谨向北京市各区（县）负责数学竞赛组织领导工作的同志们表示衷心的感谢。向北京市各中学积极从事支持数学奥林匹克活动的同事们表示衷心的感谢。

编者

1994年1月

目　　录

北京市1989年中学生数学竞赛试题及参考解答

初中二年级

（1989年 4 月16日8:30—10:30）

一、（满分40分）填空题（将答案填在试卷纸小题号下面的空格内有效，填在其它地方无效）

小 题 号	1	2	3	4	5
答　　案	30°	$\frac{11}{2}$	6	6	3

1．在$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90^{\circ}$．$AB=2AC$．CD、CE分别是AB边上的高线及中线．求$\angle ECD$的度数。

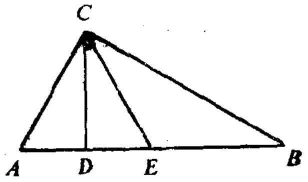


图1

解：如图1在直角$\triangle ABC$中，斜边AB等于斜边中线的2倍．又已知$AB=2AC$．

$\therefore\quad AC=CE=AE$

即　$\triangle ACE$为等边三角形．

$\angle ACE=60^{\circ}$．

又$CD\perp AE$于D，所以CD平分$\angle ACE$，

$\therefore \quad \angle ECD = 30°$。

2．已知$x=\frac{1}{2}(\sqrt{7}+\sqrt{5}), y=\frac{1}{2}(\sqrt{7}-\sqrt{5})$。

求x^2-xy+y^2的值。

解：因为$x^2=\frac{1}{4}(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2=\frac{1}{4}(12+2\sqrt{35})$

$$=3+\frac{1}{2}\sqrt{35}$$

$$y^2=\frac{1}{4}(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2=\frac{1}{4}(12-2\sqrt{35})$$

$$=3-\frac{1}{2}\sqrt{35}$$

$$xy=\frac{1}{4}(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})$$

$$=\frac{1}{4}(7-5)=\frac{1}{2}.$$

$\therefore \quad x^2-xy+y^2=\left(3+\frac{1}{2}\sqrt{35}\right)-\frac{1}{2}+\left(3-\frac{1}{2}\sqrt{35}\right)$

$$=6-\frac{1}{2}=\frac{11}{2}$$

3．若n是自然数且$\frac{n^3-1}{5}$是一个质数。求n的值。

解：对n分类讨论

（1）若$n=5k$，显然$5 \nmid n^3-1$。所以n不能是$5k$型的自然数。

（2）若$n=5k+2$

$$n^3-1=(125k^3+150k^2+60k+8)-1$$

$$=5(25k^3+30k^2+12k+1)+2$$

$5 \nmid n^3-1$，所以n不能是$5k+2$型的自然数。

（3）若$n=5k-2$

$$n^3-1=(125k^3-150k^2+60k-8)-1$$
$$=5(25k^3-30k^2+12k-2)+1$$

$5\nmid n^3-1$，所以n不能是$5k-2$型的自然数。

（4）若$n=5k-1$

$$n^3-1=(125k^3-75k^2+15k-1)-1$$
$$=5(25k^3-15k^2+3k-1)+3$$

$5\nmid n^3-1$，所以n不能是$5k-1$型的自然数。

（5）若$n=5k+1$

$$n^3-1=(125k^3+75k^2+15k+1)-1$$
$$=5(25k^3+15k^2+3k)$$

此时$\frac{n^3-1}{5}=25k^3+15k^2+3k=k(25k^2+15k+3)$要为质数，必须$k=1$，此时$n=6$。

当$n=6$时，$\frac{6^3-1}{5}=43$是个质数，合于要求。

4．设m是不为 0 的整数，二次方程

$mx^2-(m-1)x+1=0$有有理根，求m的值。

解：方程$mx^2-(m-1)x+1=0$（$m\neq0$）是整系数的一元二次方程，有有理根，必须

$\Delta=(m-1)^2-4m=m^2-6m+1$的值是完全平方数。

设　$m^2-6m+1=a^2$　（a为自然数）

则　$m^2-6m+9-a^2=8$

$$(m-3)^2-a^2=8$$
$$(m-3+a)(m-3-a)=8$$

又因为　$m-3+a$与$m-3-a$奇偶性相同，

∴　$m-3+a$与$m-3-a$都是偶数。

故 $\begin{cases} m-3+a=4 \\ m-3-a=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m-3+a=-2 \\ m-3-a=-4 \end{cases}$

解得：$\begin{cases} a=1 \\ m=6 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=1 \\ m=0 \end{cases}$（不合题意）

$\therefore\quad m=6$。

经验证知，$m=6$时，方程变为$6x^2-5x+1=0$确有二有理根$x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=\frac{1}{3}$。合于题意要求。

所以，$m=6$为所求。

5．凸1989边形的所有内角中锐角的个数为n，问n的最大值是多少？

解：设凸1989边形中有n个锐角，则相应的锐角之邻补角必是钝角，这n个钝角恰是1989边形的n个外角。设这n个外角为α_1，α_2，…，α_n，

则 $\quad n\times 90°<\alpha_1+\alpha_2+\cdots,\ +\alpha_n\leqslant 360$

$\therefore\quad n<4$

因此n的最大整数值为３，即凸1989边形中所有内角中锐角个数n的最大值是３。

二、（满分15分）a为什么整数时，方程

$$\frac{x}{x-2}+\frac{x-2}{x}+\frac{2x-a}{x(x-2)}=0$$

只有一个实根？指出所有这样的a值并求出与它相对应的方程的根。

解：$\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{x-2}{x}+\dfrac{2x-a}{x(x-2)}=0$

通分后，得

$$\frac{2x^2-2x+4-a}{x(x-2)}=0$$

若$x\neq 0$，且$x\neq 2$，得

$$2x^2-2x+4-a=0 \qquad (*)$$

（*）式当$\Delta>0$时有二不等实根，$\Delta<0$时无实根，只在$\Delta=0$时有重根（二等实根）.

$\Delta=(-2)^2-4\times2\times(4-a)=0$，解得$a=\frac{7}{2}$，不为整数.

所以在$x\neq 0$且$x\neq 2$的情况下，对任意整数a方程（*）都不会恰有一个实根.

若$x=0$，代入（*）　得$a=4$.

此时原方程变为$\frac{2x-2}{x-2}=0$，解得$x=1$恰为一个实根.

若$x=2$，代入（*）　得$a=8$.

此时原方程变为$\frac{2x+2}{x}=0$，解得$x=-1$恰为一个实根.

经验证确认

$a=4$时，原方程恰有一个实根$x=1$.

$a=8$时，原方程恰有一个实根$x=-1$.

三、**（满分15分）**已知$\triangle ABC$为等腰三角形．由顶点A所引BC边的高线恰等于BC边长的一半，试求$\angle BAC$的值．（要求画出图形）

解：分情况讨论如下：

（1）若BC为等腰三角形的底边，则高AH平分BC，$AH=\frac{1}{2}BC$

$\triangle AHB$与$\triangle AHC$都是等腰直角三角形（图2）.

所以$\angle BAC=90°$.

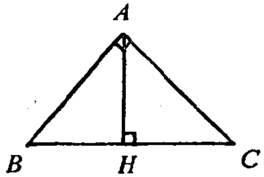


图2

（2）若BC为等腰三角形的一个腰，此时，

(i) 若顶角$\angle ABC$为锐角，由$AH=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AB$，得$\angle B=30°$（图3）

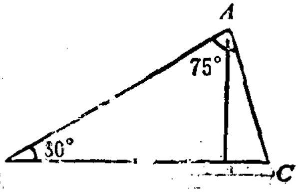


图3

所以$\angle BAC=\frac{1}{2}(180°-30°)=75°$。

(ii) 若顶角$\angle ABC$为钝角，$AH=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AB$

则 $\angle ABH=30°$，所以$\angle ABC=150°$（图4）

$$\angle BAC=\frac{180°-150°}{2}=15°.$$

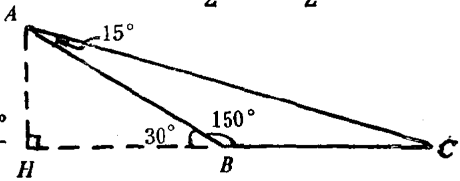


图4

(iii) 若$\angle ABC=90°$，此时$AB=BC=AH$，与$AH=\frac{1}{2}BC$的条件矛盾。所以此种条件下的三角形不存在。

答：$\angle BAC$的度数可以是90°、75°及15°三个值。

四、（满分15分）已知a，b，c，d适合

$$a+b=c+d,\quad a^3+b^3=c^3+d^3.$$

求证：$a^{1989}+b^{1989}=c^{1989}+d^{1989}$。

证明 由$a+b=c+d$ ①

及 $a^3+b^3=c^3+d^3$ ②

若 $a+b=0$，则$c+d=0$

此时$a=-b$，$c=-d$

则 $a^{1989}+b^{1989}=0$，$c^{1989}+d^{1989}=0$。

显然成立　$a^{1989}+b^{1989}=c^{1989}+d^{1989}$。

若$a+b\neq 0$

①式两边立方后减去②式可得

$$ab(a+b)=cd(c+d)$$

由$a+b\neq 0$　知$c+d\neq 0$

所以　$ab=cd$

从而　$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

$$=(c+d)^2-4cd=(c-d)^2$$

于是$a-b=c-d$　③

或$a-b=d-c$　④

由①、③联立可得$a=c$，$b=d$

或由①、④联立可得$a=d$，$b=c$

总之都有　$a^{1989}+b^{1989}=c^{1989}+d^{1989}$成立。

五、（满分15分）在平面上依次画出首尾相接的n条线段，其中第n号线段的终端恰与第1号线段的始端重合。其中每一条线段都叫一个“线节”。若一个线节的始端恰是另一个线节的终端，称这两个线节是相邻的。我们规定：相邻的两个线节不能画在同一直线上，不相邻的任两个线节都不相交。满足上述条件的图形我们称作“简单折线圈”。如图5，我们画的简单折线圈的10个线节恰分布在5条直线上。

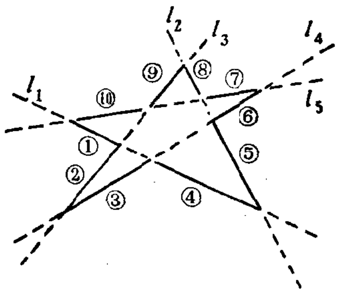


图 5

若一个简单折线圈的全部n个线节恰分布在6条直线上，试求n的最大值，并说明理由。

解： 由题意知

（1）凡共线的两个线节彼此一定不相邻；

（2）每个线节的端点都是相邻两线节所在直线的交点。

通过画图我们可以作出"由12个线节组成的'简单折线圈'的全部12个线节恰排布在6条直线上"的例子（如图6）。

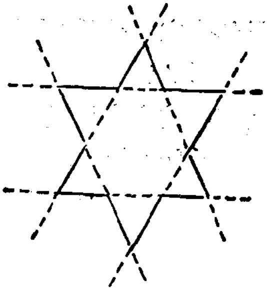


图6

下面我们证明，n的最大值就是12。

如若不然，$n>12$，则至少是13.而13个线节的"简单折线圈"，它的13个线节恰分布在6条直线上，则由抽屉原则，至少有一条直线l上要分布有至少三个线节，这三个线节根据（1），彼此一定不相邻，所以至少有6个端点，由（2）知，这六个端点恰是另外六条直线（其它线节所在的直线）与l相交所得的交点，再加上直线l本身，因此，线节所在直线条数至少为7，与恰有6条直线的已知条件相矛盾。

所以$n>12$不能成立，即应有$n\leqslant 12$。由上面的例子可知$n=12$的情形存在，所以n的最大值是12。

高中一年级

（1989年4月16日8：30—10：30）

一、（满分40分）填空题：（将答案填在试卷纸小题号下面的空格内有效，填其它地方无效）

小题号	1	2	3	4	5
答　案	55	1	$\frac{1}{6}$	14	6

1．某中学的教师中，会英语及俄语的人总计100人。据统计会英语的有70人，会俄语的45人。求该校教师中会英语但不会俄语的人数。

解： 设会英语教师集合为Y，依题意$|Y|=70$。

会俄语教师集合为R，依题意$|R|=45$。

会英语及俄语的教师集合为$Y\cup R$，由题意知$|Y\cup R|=100$，用$Y\cap R$表示既会英语又会俄语的教师的集合。

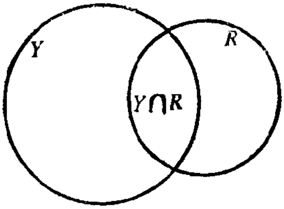


图7

由图7可见

$$|Y\cup R| = |Y| + |R| - |Y\cap R|$$

$$\therefore\quad |Y\cap R| = |Y| + |R| - |Y\cup R|$$

$$=70+45-100=15$$

该校教师中会英语不会俄语的人数是

$70-15=55$（人）．

2．设$f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，$g(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$．

$[g(x)]^2-[f(x)]^2=?$

解： $[g(x)]^2-[f(x)]^2$

$$=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}-\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)$$

$$=e^x\cdot e^{-x}=e^0=1.$$

3．若$\lg 2x\cdot\lg 3x=m$有两个不同的实数解x_1和x_2．求$x_1x_2=?$

解：方程$\lg 2x\cdot\lg 3x=m$有意义，显然$x>0$，

$\lg 2x\cdot\lg 3x=m$有两个不同的实根x_1，x_2，必是两个不同的正实根．

$\therefore\quad(\lg 2+\lg x)(\lg 3+\lg x)=m$有两个不同的正实根$x_1$，$x_2$．

即$(\lg x)^2+(\lg 2+\lg 3)\lg x+\lg 2\cdot\lg 3-m=0$有两个不同的正实根$x_1$，$x_2$．

令$y=\lg x$，正实数$x_1\neq x_2$，则$y_1\neq y_2$

$\therefore\quad y^2+(\lg 2+\lg 3)y+\lg 2\cdot\lg 3-m=0$有两个不同的实根$y_1$，$y_2$．其中$y_1=\lg x_1$，$y_2=\lg x_2$．

依韦达定理，$y_1+y_2=-(\lg 2+\lg 3)=-\lg 6=\lg\frac{1}{6}$

即　$\lg x_1+\lg x_2=\lg\frac{1}{6}$　　　$\lg x_1x_2=\lg\frac{1}{6}$

$\therefore\quad x_1x_2=\frac{1}{6}$．

4．给定锐角$\triangle ABC$且$AC<AB<BC$．若$\triangle ABC$所在平面上的点M使得$\triangle ABM$和$\triangle BCM$都是等腰三角形，称点M为“正则点”．求正则点的个数共有多少个？

解：所确定的“正则点”应在以下圆与直线的交点中去找（图8）：

画以A为圆心AB为半径的圆$\odot(A, AB)$，

画以B为圆心AB为半径的圆$\odot(B, AB)$，

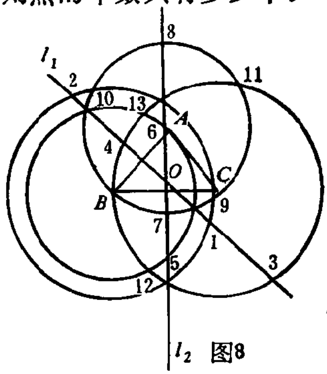


图8