

数 科学的语言

〔美〕T. 丹齐克 著

商 务 印 书 馆

数 学 的 语 言

为有文化而非专攻数学的人
写的评论性概述

〔美〕T. 丹齐克 著
苏 仲 湘 译

商 务 印 书 馆

1985 年·北京

Tobias Dantzig
NUMBER
THE LANGUAGE OF SCIENCE
London

George Allen & Unwin Ltd.

根据伦敦乔治·爱伦及昂文有限公司 1938 年第三次修订版译出

SHÙ KÉXUÉ DE YǔYÁN

数 科学的语言

[美] T. 丹齐克 著

苏 仲 湘 译

商 务 印 书 馆 出 版

(北京王府井大街 36 号)

新华书店北京发行所发行

北京第二新华印刷厂印刷

统一书号: 2017·333

1985 年 4 月第 1 版

开本 850×1168 1/32

1985 年 4 月北京第 1 次印刷

字数 197 千

印数 10,800 册

印张 8 1/4

60克纸本 定价: 1.55 元

“源头茫昧虽难觅，
活水奔流喜不休。”

——昂利·彭加勒

译 者 的 话

本书作者托比亚斯·丹齐克(Tobias Dantzig)原籍为沙俄统治下的立陶宛,1884年生,曾在巴黎大学求学,1910年去美国,后留居美国,入美国籍,先后在哥伦比亚大学、约翰·霍普金斯大学、马里兰大学等校讲授数学。他于1930年出版本书,后又经修订,增写了二十六个附录,使其内容更加充实。本书据1938年第三次修订版译出。

本书共分十二章,简要内容如下:

第一章,谈数的语言的起源: 它从人和动物的数觉谈起,谈到计数和数概念的产生,谈到一一对应和匹配的原理,介绍了基数、序数,几种主要的数制,二进制、五进制、二十进制以及十进制等。它还旁及莱布尼茨从二进制产生的“用一,从无,可生万物”的唯心主义哲学观点,希腊普罗塔哥拉的“人是万物的尺度”的名言,以及数制与人类十指的关系等等。

第二章,谈算术符号: 其中谈到计数法,谈及账板和算盘,谈到空位和位置原则。它谈到印度人民发现零的伟大意义,谈到当时作为一个新生事物的阿拉伯数字在不少地方遭到禁止的现象等等。它对新思想、新事物在历史上的摸索前进,作了生动具体的记述。

第三章,谈整数: 其中对数论,包括哥德巴赫猜想、费马问题等,作了全面的介绍,对希腊的算学,包括毕达哥拉斯派的数哲学,对古代的数字崇拜(其中提到中国的《洛书》)以及当时广泛流行的字数术等,都有引人入胜的描绘。

第四章,谈无限: 它讨论了数学上的无限概念,对数学推理法、演绎法、归纳法、数学归纳法乃至公理学等推理原则都有深入浅出的说明。文中节录了数学家、唯心主义哲学家彭加勒《数学推理的本质》的论文,宣称数学的判断只是“对心灵的能力的一种肯定”,表现了作者本人的唯心观点。

第五章,谈有理数: 它对古代埃及、希腊、印度、阿拉伯在代数上的探索和进展,作了广泛的叙述,一直谈到文艺复兴及其以后的发展。它叙述了字母记号在代数式中的使用,通过数学符号的运算,建立了有理数域,扩大了数概念。它介绍了作为数域推广的基本原则的固本原则,数学算术化的进程,并涉及了罗素和怀特海的《数学原理》一书及以他们为代表的学派的观点。

第六章,谈无理数: 它从毕达哥拉斯学派的观点谈起,谈到数和点的对应,表明数的概念必须扩大和能够扩大。它介绍了印度、阿拉伯人的方程式方根解,介绍了无理数的发现,以至提起了群论。它对古希腊以直尺圆规求解的三大数学名题作了详尽的介绍,描述了代数数、超越数的发现,并对古代数学界在这些问题上的探索和寻求,勾画出主要的轮廓。

第七章,谈连续性: 本章完整地介绍了古希腊埃利亚学派的有名的芝诺四论,从而论述了无限算法、极限、无限小等问题,介绍了牛顿和莱布尼茨开拓的微积分理论,包括唯心主义哲学家贝克莱的反对意见等。

第八章,谈无限算法: 着重介绍了数序、收敛、极限、连分数等内容,介绍了康托尔的无理数理论,它指明有理无限数列的极限构成了实数域。

第九章,谈实数: 介绍了康托尔连续统理论,又从点数对应的原理,介绍了狄德金的无理数理论。作者在阐述这些数学理论时,宣扬了自然不跳跃,时间不跳跃的哲学观点,鼓吹进化,反对

突变,认为连续和因果就是时间的主要内容,并表示时间和空间都可以通过心灵动作来填补空隙,最后以数统治宇宙作为这一章的结语。

第十章,谈复数: 它通过方程式求方根解,介绍了复数、虚数的发现,并详细介绍了笛卡尔的解析几何的理论,指明了这些数的具体形象。它还谈到了复变函数论、投影几何、非欧几何、理想数、矩阵等一系列发展。

第十一章,谈集合: 它阐述了康托尔的无限集合理论,包括无限集合的多寡性的意义、无限集合的一一匹配、无限集合的势,以及无限集合中基数相同而顺序不同的序型理论等。它说明了在无限集合中,部分不比整体小,短线上的点不比长线上的点少,部分与整体之势相等,并介绍了测量无限集合的几个基数(势) a, c, f 等。文中还介绍了伽利略关于无限集合的科学对话。

第十二章,谈数学观念的实在性: 作者在本章着重阐述了他的哲学观。他宣称无限分割和无限扩延都是不为经验所认许的;鼓吹实在性不过是组织、整理和引导人们的经验的幻景,其作用在于保持和增长人类的智力生活等等。他直截宣称,意识外的绝对不变的世界,只存在于神学推理。他在论述主观实在和客观实在时,提到赫尔姆霍茨、马赫诸人的主张,并表示和他们并不是一家,实际上,从他所表明见解显示,他们并无本质的区别。

本书出版后,在欧美受到好评。第二次世界大战后,捷克斯洛伐克还重印过此书。爱因斯坦对此书有良好的评价。尼赫鲁也曾在他的著作中加以援引。

如上所述,本书内容主要是介绍数的概念的发展史。作者是本世纪初的资产阶级学者,自不认识和赞同在文化创造中,劳动群众的作用,实践的作用。他只是就观念论观念,孤立地综述思想和文化的先后嬗演,而且其中多有谬误之处。但就其对数学思想的

发展过程的阐述而论，却脉络清明，条理详晰，抑且目光四射，取材广博，兼引文史，庄谐互出。这本书是一本数学书，科学书，但又不止于一本数学书或科学书。作者面向广泛读者，写得深入浅出，一般知识界循序而进，都能看懂。因此，作者对本书有一个副标题，称它是“为有文化而非专攻数学的人写的评论性概述”。其特点是，从文化的角度、思想的角度乃至哲学的角度来谈数学的发展。它广泛撷引了人类千百年来数学探求的成果，从古代埃及、中国、希腊、印度、阿拉伯广泛取材，一直谈到文艺复兴，谈到近代的欧美。它描述了思想发展过程的摸索、蹒跚和奋力前进，嘲笑了愚妄和保守，赞扬了人们的前进。它实在可以作为一部专题的文化史、思想史来阅读，作为一部鼓舞人们不断求进展的读物来阅读。

从哲学的角度来看此书，亦复饶有意义。书中触及不少既有数学意义又有哲学内涵的范畴，如连续、无限、实在性以至时间、空间等，这本身就构成了哲学意义的讨论。本书在论述思想发展过程中，自然时时流露和表述其哲学的观点。它夹叙夹议，多方征引，以张其说，其中包括一些古代哲学中的重要论题和文献，例如，古希腊埃利亚学派的芝诺四论。这是和我国惠施学派提出的二十一事相仿佛、引起了广泛议论的古代自然科学-哲学的有名命题，书中对此作了完整的征引和介绍，并根据作者本人的观点，从数学立场进行了分析和解答。又如对有名的唯心主义哲学家、也是数学家的彭加勒、贝克莱等的一些论点和材料，书中都有频繁的援引和介绍，这样就反映了哲学史中有关自然科学观点，有关数的观念的一个侧面的面貌和情况。当然作者本人的哲学观点只是一家之言，读者在阅读这部分时应加以分析和鉴别，是无庸赘说的。

本书在欧美虽颇知名，然在我国尚无译本。我在解放前夕译出，曾经开明书店同意出版，但是当时经济凋敝，纸价腾踊，印刷困

难,虽已排出纸型,迄未能印出。解放后,开明改组合并,在当时的情况下,译稿遂搁置了下来。这倒得免于以后十年浩劫中“四人帮”之流的扞撻,未始不是一桩幸事。“四人帮”覆灭了,在党的十一届三中全会和十二大路线方针的指引下,各条战线拨乱反正。文化和学术领域中,真正出现了百花齐放、百家争鸣的繁荣局面,云蒸霞蔚,生意盎然。党提出的“四化”宏伟事业充分代表全国人民的希望,也需要各方面的砖石。我感到此书不论作为一本较有系统的数学书或专题的文化史、哲学参考书,介绍给我国读者,都是有价值的。其内容生动广博,深浅咸宜,专门家可从中撷取丰富的材料,青少年和一般读者可从中得到对数学乃至文化的发展和了解,实可有助于穷搜原委,开阔眼界,丰富学养,剖析学理,有助于学术的探求和发展,故而我重新对译稿进行了校改。商务印书馆的同志是了解本书的价值和分量的,协助校阅,安排出版,我得以了此宿愿,勉效一砖之力。际此行将付梓之日,摩挲新纸,感念千端。我作为一个曾在数学征途上跋涉过的老兵,虽因工作之需,早已解鞍他去,但昔日和师友们共挽征尘的甘辛和憧憬,是很难忘怀的。这就要回溯到四十年代,我在湘西辰溪垸头塢荆榛小山上求学的日子。当时旧中国的科学山林是多么的艰困和寂寞啊,大学的一个数学年级往往只有一二人,何况又是在那抗战烽火正酣、国内夜气如磐的时节!但是,师友数人,日夕相对,却一直相期共勉:勇于求真,安于贫艰,不可自己。在轧轧作响的小楼上,在仅施素纸的板窗前,我们曾经多次度过探讨和思辨的时光。爱因斯坦和罗素的命题曾经多少次闯入我们的话题,本书的名理也曾经一再浮入我们的论议,这也就是促使我后来译此书的一个动力。师友们身丁子夜,却一直憧憬着祖国的光明,憧憬着科学的春天,而现在,祖国的光明和科学的春天已经笼罩着我们全部的生活了。在这里,我深深怀念一代宗师,毕生教诲勤勤的先师熊正理教授,

深深怀念学摄百家,善于启发的先师崔明奇教授,深深怀念献身数学,不立室家,后讲学异国,久断音闻的座师陆慎仪教授,深深怀念同窗中才思腾蹕,一如陈千秋之在万木草堂,后在十年浩劫中被迫害,沉江早逝的亡友罗守琳同志,我更深深景念教泽绵长,德寿双隆,至今仍在开拓数学新壤的座师余潜修教授。一卷之微,俄历多年,所抛心力,弥怀师友之源,扪素笺而思旧泽,拈一花而庆繁春。谨以此帙奉献给敬爱的师友,以表寸怀,并欢今日。是为叙。

苏仲湘

一九八四年夏于蜗居凉台红葛
萝花、紫牵牛花、黄苦瓜花侧畔

目 录

第一章 指印·····	(1)
第二章 空位·····	(16)
第三章 数话·····	(29)
第四章 最末一数·····	(47)
第五章 符号·····	(64)
第六章 不可说·····	(83)
第七章 流性的世界·····	(100)
第八章 演变之道·····	(116)
第九章 填补空隙·····	(137)
第十章 数域·····	(150)
第十一章 无限之解剖·····	(172)
第十二章 两种实在性·····	(192)
数概念进化途中的里程碑·····	(208)

附录:

1. 论动物和人的数觉(210)
2. 论匹配和分组(210)
3. 论命数法的基底(211)
4. 阿基米德记录大数的方法(212)
5. 克谢尔克谢斯点兵法(213)
6. 小数的历史(213)
7. 几何中的神秘(214)
8. 质数的分布(217)
9. 可除性的判别准则(217)
10. 毕达哥拉斯数(219)
11. 拟似归纳法(220)
12. 数学归纳法举例(221)
13. 论有界几何(222)
14. 方程的图解法(223)
15. 几何中的“可能”和“不可能”两个术语(225)
16. 相等的意义(225)
17. 无理数量的有理近似值(227)
18. 论三等分角(227)
19. 斯涅留斯近似法(229)
20. 论时间的本性(230)
21. 化一段抛物线为

矩形(231)	22. 论计算术(233)	23. 论连分数(234)	24. 论三次 方程(235)	25. 隶美弗恒等式(236)	26. 数学和实在性(237)	
进一步阅读的参考书目						(238)
人名索引						(240)
名目索引						(244)

第一章 指印

1

“古罗马历，一年月亮绕十个圈：
当时把这个数奉为至尊至上，
或者因为我们习惯了用手指来计数，
或者因为妇人怀胎十个月方才分娩，
再不然，就因为数字增到了十，
便回过头来，从一开始循环。”

——奥维德(Ovid)，
《岁时志》(Fasti)，第三卷。

1

人类在进化的蒙昧时期，就已经具有一种才能，这种才能，因为没有更恰当的名字，我姑且叫它为数觉。由于人有了这种才能，当在一个小的集合里边，增加或者减去一样东西的时候，尽管他未曾直接知道增减，他也能够辨认到其中有所变化。

数觉和计数不能混为一谈。计数似乎是很晚以后才有的一种收获，由后文可以知道，它牵涉到一种颇为复杂的心理过程。就我们所知，计数是一种人类独具的特性；另一方面，有若干种动物看来也具有一种和我们相类似的原始数觉。至少，有权威的关于动物行为的观测家持有这种主张，而且有很多实例支持这种理论。

例如，许多鸟类是具有这种数觉的。鸟巢里若是有四个卵，那末可以安然拿去一个；但是如果拿掉两个，这鸟通常就要逃走了。鸟会用某种奇怪的方法来辨别二和三。但是这种才能不仅限于鸟³类。实际上，我们所知道的最惊人的例子要算叫作“独居蜂”(solitary wasp)的昆虫。这种母蜂在每个巢里下一个卵，并且在

巢里面预先储藏了一批活的尺蠖，作为幼虫孵化后的食料。使人吃惊的是，各类独居蜂每巢里所放的尺蠖数目都是一定的：有些类放五条，有些放十二条，多的甚至于有二十四条的。最特别的是一种叫作蜾蠃（*eumenus*）的蜂，这种蜂雄的比雌的小得多。母蜂能用神秘的方法辨别孵化出来的幼虫是雄的还是雌的，并且据此相应地分配食品的数量；它并不去改变捕获物的大小和种类，只给雄卵储存五条尺蠖，给雌卵储存十条。

由于蜂类行为的规律化，而且这种行为和它的生命的基本机能有着密切的关系，所以上述例子不如下面的例子来得更加令人信服。这里所举的鸟的行为，似乎已经处于自觉的边缘了。

有个田主决心要打死一只在他庄园的望楼里筑巢的乌鸦。他试了好多次想惊动它，始终没有成功：因为人一走近，乌鸦就离开了巢，飞开了。它栖在远远的树上守着，等到人离开了望楼，才肯飞回巢去。有一天，这田主定下了一个计策：两个人走进望楼，一个留着，一个出来走开了。但是乌鸦并不上当：它老等着，直到留在望楼里的人也走了出来才罢。这个试验一连作了好几天：两个人，三个人，四个人，都没有成功。末了，用了五个人：也像以前一样，先都进了望楼，留一个在里面，其他四人走出来，离开了。这次乌鸦却数不清了；它不能辨别四与五，马上就飞回巢里去了。

2

4

这个例证可以引起两种反驳的意见。第一：具有这种数觉的动物只限于极少的几类，而在哺乳动物中就没有发现这种才能，甚至猿猴也好像没有。第二：就已经知道的一切事例而言，动物数觉的范围实在太小，简直可以略而不论。

第一点意见我们是承认的。这确乎是一个值得注意的事实：识数的才能，不论是这种形式或那种形式，看来总是限于几种昆

虫,几种鸟类和整个人类。对于狗、马和其他家畜所作的实验和观察,都不曾发现它们有什么数觉^①。

至于第二点意见,却没有多大价值,因为人类的数觉范围也是十分有限的。寻常让一个文明人去辨别数目的时候,他总有意无意地用其他的技能,诸如对称图型读法、心计组合法、计数术等,来帮助他的直接数觉。特别是,计数已经变成我们智能的如此重要的组成部分,所以用心理学的方法来实验我们的关于数的知觉,实在是很困难的。但是,话虽如此,现在还是有了一些进展;根据精密安排的实验结果,不能不下结论说:普通文明人的直接视觉数觉,很少能超过四,至于触觉数觉,范围甚至还要小些。

人类学上关于原始民族的研究,加强了这个结论的可信程度。从这些研究得知,还没有达到屈指计数阶段的野蛮人,几乎完全没有关于数的知觉。澳洲、南海群岛、南美洲和非洲的许多部族都是如此。柯尔(Curr)对于澳洲的原始民族有过广博的研究,他以为⁵只有很少的土人能够辨别四,处于野居状态中的澳洲土人没有人能了解七。南非洲的布须曼(Bushmen)族,除了一、二和多之外,再没有别的数字了,而这三个字又是那么语调含糊,那些土人是否赋与了它们以明晰的意义,也还是个疑问。

我们决没有理由相信,我们的远祖有更高的天赋,却有许多理由使我们怀疑这种想法,试看各种欧洲语言,几乎都带有这种早期局限性的痕迹。英文的 thrice 和拉丁文的 ter,同样的有双重意义:三倍和许多。拉丁文的 tres(三)和 trans(超过)之间有着可信的联系;而法文的 très(甚)和 trois(三)也是如此。

数的产生,远在有史以前,详情已无法深究。究竟数的概念是从经验里边产生的,还是仅仅凭藉经验之力,把早已隐藏在原始人心灵中的概念加以暴露而来的呢?这是一个吸引人的玄学问题,

^① 参看附录一:论动物和人的数觉。

因而不在本书讨论的范围之内了。

如果我们用现代野蛮民族的智力情况来推断我们远祖的发展史,我们不能不承认,在开始的时候也是非常幼稚的。一种比鸟类高强不了多少的原始的数觉,就是产生我们数概念的核心。毫无疑问,如果人类单凭这种直接的数的知觉,在计算的技术上,就不会比鸟类有什么进步。但是经历了一连串的特殊的环境,人类在极为有限的数知觉之外,学会了另一种技巧来给他帮忙,这种技巧注定了使他们未来的生活受到巨大的影响。这技巧就是计数,并且,正是由于有了计数,我们赢得了用数来表达我们的宇宙的惊人成就。

3

- 6 有些原始语言对于虹的各种色彩都有专门的字,但是没有“色”这个字;又有些语言所有数字都有,只是没有“数”这个字。其他的概念也有这样的情况。在英文中,对于某些特种集合,有丰富的本国语言的表现方法,例如: flock(一群), herd(一帮), set(一套), lot(一堆), bunch(一束), 分别适用于特殊的场合;然而 Collection(集合)和 Aggregate(集)这两个字却是外来语。

具体的东西总在抽象的东西之先。罗素 (Bertrand Russell) 说:“不知道要经过多少年,人类才发现一对锦鸡和两天同是数字二的例子。”到现在我们还有不少的字来表达二这个概念,如: Pair, Couple, Set, Team, Twin, Brace 等等。

早期数概念的极端具体性,不列颠哥伦比亚的辛姆珊 (Thimshian) 族的语言是一个明显的例子。这种语言共有七种不同的数字:一种用于走兽和扁平的物体;一种用于时间和圆形的物体;一种是用来数人的;一种是用于树木和长形物体的;一种是用于小艇的;一种是用来测量的;还有一种是在没有特定对象时计数用的。最后一种大概是后来才发展起来的。前几种必定是这族人还

没有学会计数之前的早期遗物。

正是计数,才使具体的、不同质的表达多寡的概念结合为统一的抽象的数概念。前者是原始人的特点,后者则是数学发展的前提。

4

然而,我们说,不用计数技术,也可以得出一种合乎逻辑的明晰的数概念,这虽然好像奇怪,却确是可能的。

我们走进一个会堂。在我们面前的是两个集合:一个是会堂的座位,一个是出席的人。我们不用计数,就可以知道这两个集合⁷是否相等,如果不相等,哪个大些。因为要是所有的座位都坐满了,同时没有人站着,我们不用计数就知道两个集合相等。要是座位已经满了,而仍旧有人站着,我们不用计数就知道人多而座位少了。

这种知识是从一个支配着全部数学的称为一一对应的方法推演而来。其方法是将一个集合中的每一事物和另一个集合中的一事物相对应,直到某一集合或两个集合中的事物配完为止。^①

有许多原始民族对于数目的技术只限于这种匹配法。他们纪录畜群或军队的数目,不是用刀在树上刻若干痕迹,就是用小石卵堆成一堆。就 tally(比对)和 calculate(计算)两个字的字源而言,可以知道,我们的祖宗也谙熟这种方法;前者是从拉丁文 talea(刻)来的,后者则从拉丁文的 calculus(石卵)转变成的。^②

骤然看来,对应办法只能用来比较两个集合,而不能产生数这个字的本身所含的绝对的意义。不过,由相对的数转变成绝对的

① 参看附录二:论匹配和分组。

② 也可以参考中国古代《易·系辞》的说法:上古结绳而治,后世圣人易之以书契。——译者