

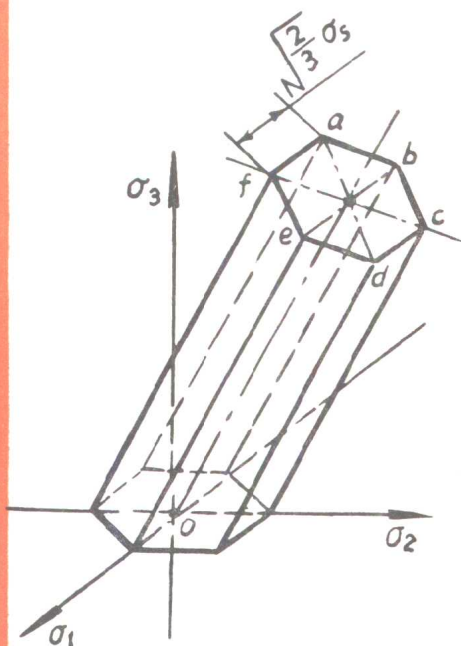


塑性力学 基础知识

高等教育出版社

● 弹性力学专题教材

熊祝华



弹性力学专题教材

塑性力学基础知识

熊 祝 华

高等教育出版社

内 容 提 要

本书是与徐芝纶编《弹性力学简明教程》配套使用的专题教材,并可作为塑性力学入门课程的教材。全书共七章,内容包括金属材料的塑性性质、圆轴扭转和直梁弯曲、应力应变分析、屈服条件和塑性本构关系、简单弹塑性问题、平面应变问题的刚塑性分析、极限分析定理。每章附有习题和思考题,习题附答案。

本书亦可供有关科研和工程技术人员参考。

弹性力学专题教材 塑性力学基础知识

熊祝华

*

高等教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京第二新华印刷厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印张 5.375 字数 127,000

1986 年 4 月第 1 版 1986 年 4 月第 1 次印刷

印数 00,001—6,650

书号 15010·0730 定价 0.98 元

前 言

这是一本与徐芝纶编《弹性力学简明教程》配套的专题教材，是塑性力学的入门书籍；所涉及的内容较多，但篇幅有限。为此，除了在理论、体例和符号方面力求与上述《简明教程》相衔接外，在内容上则侧重于基本概念的建立、基本理论的阐述以及基本方法的说明，为读者进一步学习塑性力学打好基础。

为了使教材具有较大的灵活性和适应性，本书在分章时力求内容相对集中，篇幅短小，以便在教学中针对不同情况，予以取舍。

为了在教学中培养学生的自学能力，本书在叙述上力求深入浅出，简明易懂，便于自学。在精选内容、控制篇幅的前提下，对概念、理论的阐述或论证，力求准确、严谨、简明和前后一致。

本书前两章是材料力学中塑性内容的重复和加深，后五章则是塑性力学的基础知识。其中第一章是导论性的内容，它具有承前启后、寓繁于简、钩画全貌、突出重点的作用。对于在材料力学中没有学过塑性的专业，可将前两章作为材料力学的补充教材；对于在材料力学中已学过塑性的专业，则以本书后五章作为主要内容，前两章只需择要讲授。

本书插图按章编号，公式按节编号；如式(2-3)表示第二节的第三式。在后面引用前章公式时，则在公式号前加一个罗马数字，如式(III 2-3)表示第三章第二节第三式。

本书经夏志皋同志仔细审阅，提出了不少宝贵意见，编者深表感谢。在编写过程中，傅依铭、崔道碧、熊慧而等同志在校核原稿、描绘插图、抄写稿件以及选取习题等方面做了许多工作，编者在此一并表示深切的感谢。

目 录

前言	1
第一章 金属材料的塑性性质	1
§ 1-1 拉伸曲线	2
§ 1-2 金属材料的塑性性质	7
§ 1-3 σ - ε 曲线的简化	12
§ 1-4 三杆桁架的弹塑性平衡	14
§ 1-5 残余应力和残余变形	19
习题和思考题	23
第二章 圆轴的扭转和直梁的弯曲	25
§ 2-1 圆轴的弹塑性扭转	25
§ 2-2 矩形截面梁的纯弯曲	28
§ 2-3 悬臂梁的挠度	31
§ 2-4 残余应力、残余变形	34
§ 2-5 截面屈服和极限内力	36
§ 2-6 梁的极限载荷计算简例	42
习题和思考题	46
第三章 应力分析和应变分析	50
§ 3-1 主应力及应力张量的不变量	50
§ 3-2 应力空间、八面体应力	52
§ 3-3 应力张量的分解、应力偏张量及其不变量	53
§ 3-4 应力圆和罗地参数	56
§ 3-5 应变张量及其不变量	60
§ 3-6 应变偏张量及其不变量	61
§ 3-7 应变率张量	64
习题和思考题	65
第四章 屈服条件和塑性本构关系	67
§ 4-1 布里基曼试验、体积弹性定律	67

§ 4-2	两个常用的屈服条件	69
§ 4-3	两个屈服条件的比较	72
§ 4-4	相继屈服曲面的概念	76
§ 4-5	广义虎克定律	77
§ 4-6	杜拉克公设	79
§ 4-7	理想塑性材料的本构方程、塑性流动法则	82
§ 4-8	全量理论	86
§ 4-9	库伦-摩尔屈服条件和流动法则	90
	习题和思考题	94
第五章	简单的弹塑性问题	97
§ 5-1	厚壁球壳的极对称变形	97
§ 5-2	弹性理想塑性厚壁筒的轴对称变形	102
§ 5-3	强化厚壁筒的计算	109
§ 5-4	直杆的自由扭转	112
	习题和思考题	120
第六章	平面应变问题的刚塑性分析	123
§ 6-1	基本方程式	124
§ 6-2	应力沿滑移线的变化规律	128
§ 6-3	滑移线的若干性质	130
§ 6-4	简单的滑移线场	132
§ 6-5	应力边界条件	134
§ 6-6	速度场	137
§ 6-7	计算简例	138
	习题和思考题	141
第七章	极限分析定理	143
§ 7-1	若干名词、概念	143
§ 7-2	基本等式和基本不等式	144
§ 7-3	极限分析中的基本定理	145
§ 7-4	计算简例	149
§ 7-5	圆形薄板的极限分析	155
§ 7-6	薄板极限载荷的近似计算	158
	习题和思考题	163

第一章 金属材料的塑性性质

在弹性力学中，我们讨论的问题限于应力和应变的关系为线性的，即材料服从所谓广义虎克定律。当然，弹性力学并不限于线性的应力-应变关系。材料的弹性性质的根本特征是其变形过程为可逆的，应力和应变之间有唯一的、单值对应的关系。即一定的应力对应于一定的应变；应力卸去，应变也随之消失。然而，从材料的拉伸试验得知，只有当应力值小于某一数值（称为弹性极限）时，变形才是可恢复的，即可逆的。当应力值超过弹性极限之后，一方面，应力-应变关系不再是线性的；另一方面，在卸去载荷（应力）后，变形不能完全恢复，即材料已产生了不能恢复的或不可逆的塑性变形。如果我们规定结构中不能出现塑性变形，则只用弹性力学的办法就可以分析其中的应力和应变，计算结构的强度和刚度，确定结构的设计准则等等。然而，这种规定将不能充分发挥材料的作用，造成浪费。例如，在圆轴扭转和梁的弯曲中，最大应力都发生在截面的最外层，即所谓“危险点”处。当“危险点”处及其附近的应力到达和超过弹性极限时，其它大部分材料所承受的应力仍然是在弹性范围内，构件并不会“破坏”或失效。因此，在结构设计中考虑材料的塑性性质是可取的，它已日益得到人们的重视和应用。为此，我们在学习了弹性力学之后，还必须知道有关塑性力学的一些基本知识和简单的解题方法，为今后进一步学习和应用塑性力学打好基础。在本章，我们将通过对典型拉伸曲线的分析，介绍有关金属材料的基本塑性性质，并以简单结构为例，说明弹塑性问题的若干特点。

§ 1-1 拉 伸 曲 线

在材料力学中,已知在常温、静载下金属材料的典型 σ - ϵ 曲线如图 1-1 所示。从材料的这种拉伸试验结果,可以得知金属材料的若干重要力学性质。

1-1-1 弹性范围

设试件是从自然状态开始受拉,其拉伸图将从原点开始(图 1-1)。当应力递增时,拉伸曲线为 $OABC$ 。对于一般的金属工程材料,拉伸屈服极限和压缩屈服极限在数值上可认为是相等的,即假定没有初始包辛格(Bauschinger)效应。于是,应力在下列范围内变化时,

$$-\sigma_s \leq \sigma \leq \sigma_s \quad (1-1)$$

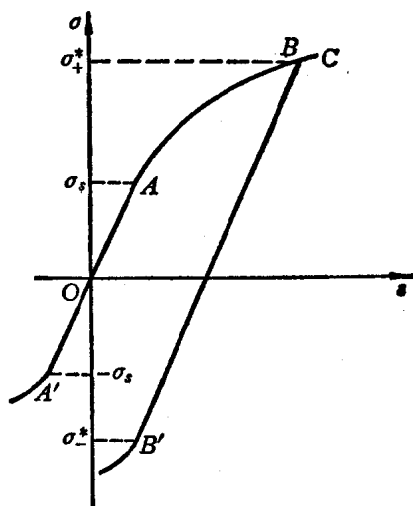


图 1-1

材料处于弹性状态,应力应变关系为

$$\sigma = E\epsilon \quad (1-2)$$

这个关系是唯一的、单值对应的，与应力如何变化没有关系，即与应力的路径或应力历史无关。为了区别起见，我们称 $\pm\sigma_s$ 为初始屈服点；两个初始屈服点之间的应力变化范围叫做初始弹性范围。

顺便指出，在一维空间内，一个区域（实际上是区段）的边界是两个离散的点，类似地，在一维应力情况下，两个初始屈服点就是初始弹性范围的边界。在多维空间内，一个区域的边界则是某个曲面（或曲线）；类似地如果材料处于复杂应力状态，非零应力分量不只一个，则初始弹性范围的边界将是用应力分量（作为自变量）表示的某个超曲面（或曲线），叫做屈服曲面，这个曲面的函数叫做屈服函数或屈服条件（参阅第四章）。

如果应力超过了初始弹性范围，例如，在图 1-1 中，应力超过了 σ_s ，则将出现塑性变形。当应力单调增加时，曲线将是 $OABC$ 。如果应力加到某值 σ_+^* （图 1-1 中的 B 点）后，卸去应力，应力-应变关系又呈现为直线。这种直线关系可以延续到应力到达某值 σ_-^* （包括正负号）时才停止。此后，材料进入反向（压缩）塑性状态。应力在下列范围内变化时

$$\sigma_-^* \leq \sigma \leq \sigma_+^* \quad (1-3)$$

应力-应变关系不再是式(1-2)，而是

$$\Delta\sigma = E\Delta\varepsilon \quad \text{或} \quad d\sigma = E d\varepsilon \quad (1-4)$$

这是增量型的虎克定律。只要应力是在式(1-3)所示范围内变化，无论变化过程（应力路径）如何，关系(1-4)不变。由于式(1-4)是线性关系，而且是与路径无关的，所以将式(1-3)所示的应力变化范围叫做相继弹性范围，而 σ_+^* 及 σ_-^* 则是相继弹性范围的边界，称为相继屈服点或加载点。显然，在相继弹性范围内，应力变化虽然是弹性的，但应力-应变关系却与初始弹性范围内的不同，它是增量型的虎克定律。从图 1-1 可见，相继弹性范围及其边界不是固

定的,而与应力历史或变形历史有关。实际上,在图 1-1 中, B 点的位置改变, B' 的位置也改变, 即 σ_+^* 及 σ_-^* 将变化。在一维应力状态下,相继屈服点还可由试验加以确定。在复杂应力状态下,相继弹性范围的边界将是某种用应力分量表示的、且与应力历史有关的曲面,称为相继屈服曲面或加载面,它们是变化的。显然,要确定加载面及其变化规律是一个很困难的问题,至今仍未很好地解决。

最后指出,各向同性材料在经历塑性变形(例如由于加工成型及加载等原因)之后,都将呈现出某种各向异性性质。例如,当试样拉伸到 σ_+^* ($\sigma_+^* > \sigma_s$) 后,经受卸载时,其相继弹性范围的另一边界 σ_-^* 一般地在数值上将小于 σ_+^* , 即 $\sigma_+^* > |\sigma_-^*|$ 。这种现象叫做包辛格效应。

1-1-2 关于材料的基本假设

为了简化计算,或者说,为了使计算成为可能而计算结果又便于应用,要将材料加以理想化,即在一定条件下,只计及材料的主要性质,略去其次要性质,建立所谓力学模型。实际上,材料的力学模型往往是有关力学学科分支划分的标志,它既是该门学科的研究对象,又是该门学科内容适用性的限制。例如,弹性体是一种力学模型(因为实际物体不可能是完全的弹性体),以弹性体为研究对象的就是“弹性力学”。如果是以线弹性体为研究对象,则称为“线弹性力学”。在一般“塑性力学”(实际上是塑性静力学)中,对于材料有以下一些基本假设。这些基本假设,既规定了一般“塑性力学”的研究对象,也限制了它的应用范围。

(1) 有关材料基本性质的假设

在通常的塑性力学中,都假定材料是非粘性的,即材料的力学性质(或本构关系)与时间因素无关。材料的力学性质与时间因素的关系,即所谓材料的时间效应,表现在两个方面:一个方面是在

高速率下材料的粘性效应,这时,应力-应变关系与应变率有关,即动态应力-应变关系与静态 σ - ϵ 曲线显著不同。另一个方面是低速率下的粘性效应,例如,在恒应力下,应变将随时间而(缓慢)增长,最终导致断裂,这种现象称为蠕变;或者,在恒应变下,应力值随时间而减小,这种现象称为松弛。实际上,松弛是在应力按特殊规律变化情况下的蠕变。对于多数金属材料来说,在快速加载(冲击载荷)下,第一方面的粘性效应很明显;在高温下,第二方面的粘性效应很明显。因此,假定材料没有粘性效应,实际上是限于研究常温静载下金属的塑性。

另外,在通常的塑性力学中,还假定材料是无限韧性的,即认为材料可“无限地”变形而不会出现断裂。这当然也只是一种理想化模型。因此在通常的塑性力学中,就不考虑脆性断裂问题。

(2) 关于弹性和塑性的假设

在应力超过初始弹性范围后,全部卸去应力($\sigma=0$),变形不会全部消失(图 1-2)。完全卸去应力后仍然保留的那部分应变叫残余应变。从图 1-2 可见,应力在相继弹性范围内变化时,残余应

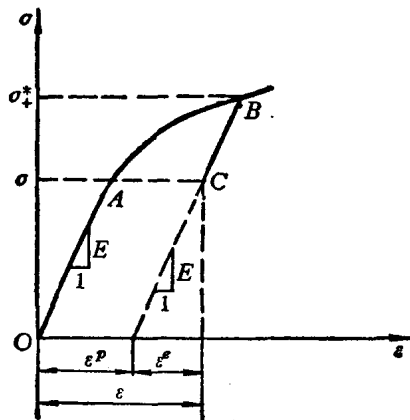


图 1-2

变的值不会改变,由此可见,残余应变是在应力到达 B 点(σ_*)时就已产生的;当应力逐渐卸去,只要应力不超出相继屈服点之外,它都保持不变。所以,残余应变实际上是总应变中不可逆的那部分应变,一般称为塑性应变。于是材料的应变一般地可分为两部分:弹性应变部分 ε^e 和塑性应变部分 ε^p ,即

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (1-5)$$

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \quad (1-6)$$

从图 1-2 可见

$$\varepsilon^e = \sigma / E, \quad \varepsilon^p = \varepsilon - \varepsilon^e \quad (1-7)$$

$$d\varepsilon^e = d\sigma / E, \quad d\varepsilon^p = d\varepsilon - d\varepsilon^e \quad (1-8)$$

这里,我们实际上已假定在初始弹性范围和相继弹性范围内,材料的弹性性质相同,即材料的弹性与塑性互不相关,各自独立。这对于金属材料是近似正确的,但对于岩土材料则不然。

由于塑性变形在相继弹性范围内是不可逆的,不改变的,而弹性变形部分则恒与应力有单值关系,因此,当材料发生塑性变形后,应力和应变之间就不再存在单值一一对应的关系了。同一个应力可对应于不同的应变,反之亦然(图 1-3)。

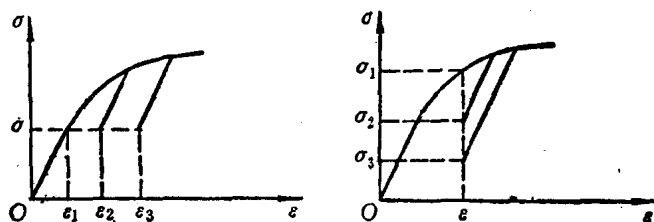


图 1-3

(3) 材料的基本不等式

根据金属材料的静态典型 σ - ε 曲线(图 1-4a),可以看到,应有下列关系

$$E \geq E_0 \geq E_t \geq 0 \quad (1-9)$$

E ——杨氏弹性模量, E_0 ——割线模量, E_t ——切线模量或强化模量, 这表明材料是递增强化的, 即 E_t 是 ε 的减函数。

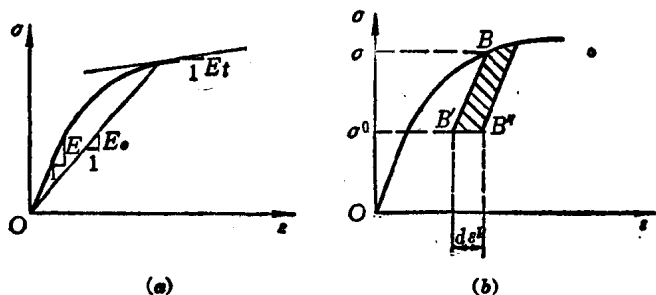


图 1-4

如果材料经历某一应力历史后, 到达 B' 点(图 1-4b), 应力为 σ^0 ; 然后施加某一外力, 使应力加载, 再又徐徐卸载, 使应力回到原来的值 σ^0 (一般地应变不回到原来的 B' 点), 这样的应力变化过程叫做应力循环。从图 1-4b 可见, 在此应力循环过程中, 若塑性应变至多只有微量的变化, 则有

$$(\sigma - \sigma^0) d\varepsilon^p \geq 0 \quad (1-10)$$

如果 σ^0 原来就位于弹性范围的边界上 ($\sigma^0 = \sigma$), 则有

$$d\sigma d\varepsilon^p \geq 0 \quad (1-11)$$

不等式(1-10)、(1-11)是杜拉克(Drucker)公设(见第四章)在一维应力状态下的特殊形式, 它们是关于材料稳定性的假设。

§ 1-2 金属材料的塑性性质

根据以上分析, 可以看到金属材料具有异于弹性的下列主要塑性特性。

1-2-1 塑性本构方程

材料发生塑性变形后, 应力-应变关系不再是唯一的。当材料

处于弹性范围内时,本构关系为:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (\text{初始弹性范围内})$$

$$d\sigma = E d\varepsilon \quad (\text{相继弹性范围内})$$

$$d\varepsilon^p = 0$$

在这里首先要判定材料是否经历过塑性变形,然后再根据应力是否位于屈服点所限的弹性范围内,采用不同的应力-应变关系。

如果应力是位于弹性范围的边界上(称材料处于塑性状态),如图 1-5 中的 $B(\sigma = \sigma_*)$ 或 $B'(\sigma = \sigma_*)$ 。这时,根据应力的变化

不同,应力-应变关系不同,但都只能建立增量形式的本构关系。例如,设应力位于 B 点;则当应力增大时 ($d\sigma > 0$),材料将从一个塑性状态进入相邻的新的塑性状态,这种应力变化叫做加载过程,可用下式表示

$$\sigma d\sigma > 0 \quad (2-1)$$

其中 $\sigma = \sigma_*$ (如果是在 B' 点,则 $\sigma = -\sigma_*$)。在应力加载过程中,应力应变关系为

$$d\sigma = E_t d\varepsilon \quad (2-2)$$

一般地 E_t 不是常数,所以式(2-2)不是线性关系。根据式(1-6)及(1-8),有

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p = \frac{d\sigma}{E} + d\varepsilon^p = \frac{d\sigma}{E_t}$$

由此可得

$$d\varepsilon^p = \frac{1}{E_p} d\sigma \quad (2-3)$$

其中

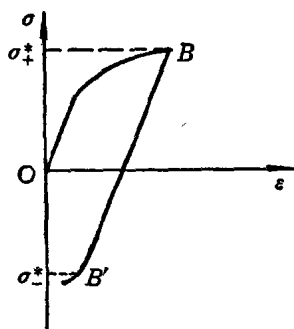


图 1-5

$$\frac{1}{E_p} = \frac{1}{E_t} - \frac{1}{E} \quad (2-4)$$

E_p 可称为塑性模量,它是 $d\sigma$ 与 de^p 的比值,一般地不是常数。

如果应力变化是向弹性范围内部的,使材料从塑性状态回到弹性状态,这种应力变化叫卸载过程,可用下式表示

$$\sigma d\sigma < 0 \quad (2-5)$$

这时应力应变关系又为

$$d\sigma = E d\epsilon, \quad de^p = 0 \quad (2-6)$$

不等式(2-1)及(2-5)分别称为加载准则和卸载准则,这只是最简单的表示形式。更一般的形式应该用屈服函数来表示[参阅式(2-10)]。

1-2-2 弹性范围的边界——屈服点

以上分析表明,在塑性力学的基本理论中,很重要的一个问题是要确定弹性范围的边界,在一维应力情况下,就是要确定屈服点。初始屈服点可以由试验一次加以确定。相继屈服点(σ_1^* , σ_2^*)则不然,它本身是与以前的变形历史有关的,不能只由瞬时的应力或应变来确定。例如,对于同一个应力值 σ ,它可能是位在弹性范围的边界上,也可能位在不同的相继弹性范围之内;其相继屈服点可以是 σ_1^* 或 σ_2^* , 等等(图 1-6)。因此,只有了解了此刻以前的全部变形历史,才能确定相继屈服点,判别瞬时应力是位在某一相继弹性范围之内或在其边界上。因而相继屈服点是应力和变形历史的函数。但是,前已说明,应力在相继弹性范围内的变化(也是应力历史或变形历史的一部分)不影响相继屈服点,只当应力变化为加载过程时(塑性应变变化),相继屈服点才改变。所以相继屈服点只

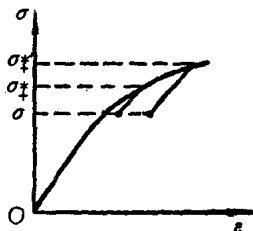


图 1-6

史或变形历史的一部分)不影响相继屈服点,只当应力变化为加载过程时(塑性应变变化),相继屈服点才改变。所以相继屈服点只

和与加载过程有关的那部分历史有关, 这部分历史叫做材料力学性质的记录史, 可用参数 H_a 表示。于是相继屈服点可写成

$$\sigma^* = \sigma^*(\sigma, H_a) \quad \text{或} \quad \varphi(\sigma, H_a) = 0 \quad (2-7)$$

1-2-3 强化规律、强化模型

相继屈服点的变化规律称为强化规律。确定材料的强化规律, 即确定式(2-7)中的函数 $\varphi(\sigma, H_a)$ 的具体形式。这是一个塑性力学中至今尚未很好解决的问题。下面主要介绍两种最简单的模型, 也是当前较为普遍采用的模型(对复杂应力状态也是如此)。

(1) 等向强化模型

这个强化模型认为: 材料如果在一个方向得到强化, 则在各个方向都有同等的强化。在一维应力情况下, 则有

$$\sigma_s^* \equiv |\sigma_s^*| \quad (2-8)$$

或者写成函数形式

$$\varphi(\sigma, H_a) = \sigma^2 - \sigma^{*2} = 0, \quad \sigma^{*2} \geq \sigma_s^2 \quad (2-9)$$

φ 称为加载函数。其中 σ^* 乃此前历史中应力在数值上曾达到过的最大值。当 $\sigma^{*2} < \sigma_s^2$ 时, 取 $\sigma^{*2} = \sigma_s^2$ 。应当注意, σ^{*2} 为一单调增加(只增不减)的正数, 它是材料力学性质记录史的一种参数。式(2-9)乃式(2-7)的具体化。而加载准则和卸载准则可分别写成:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} d\sigma &> 0 \quad (\text{加载}) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} d\sigma &< 0 \quad (\text{卸载}) \end{aligned} \right\} \quad (2-10)$$

这是加载准则和卸载准则的一般表达形式, 可推广到复杂应力的情况。

当然, 也可取塑性比功 W^p 或塑性应变强度 ϵ_s^p 作为记录史参数。而

$$W^p = \int_{\sigma_s}^{\sigma^*} \sigma d\varepsilon^p = \int_{\sigma_s}^{\sigma^*} \frac{\sigma d\sigma}{E_p} \quad (2-11)$$

$$\varepsilon_e^p = \int |d\varepsilon^p|$$

与此对应,加载函数可分别写为

$$\sigma^2 - F(W^p) = 0 \quad (2-12)$$

$$\sigma^2 - g(\varepsilon_e^p) = 0 \quad (2-13)$$

(2) 随动强化模型

等向强化模型完全没有考虑材料的包辛格效应,这是一个缺点;但因为它在应用中比较简单,所以仍然得到了比较多的应用。为了考虑材料因塑性变形而引起的各向异性,提出了随动强化模型。这个模型认为(图 1-7,此处假定 $E_t = \text{常数}$),材料若在一个方向强化了,则在相反方向将同等地弱化。在一维应力情况下,则有

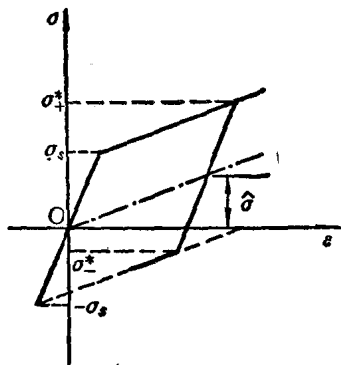


图 1-7

$$\sigma_s^* - \sigma_s^* = 2\sigma_s \quad (2-14)$$

这意味着材料在塑性变形过程中,弹性范围的尺度保持不变。加载函数可写成

$$\varphi(\sigma, H_a) = (\sigma - \hat{\sigma})^2 - \sigma_s^2 = 0 \quad (2-15)$$

$\hat{\sigma}$ 为弹性范围的中心(点 O)在应力轴上的位移。当 $E_p = \text{常数}$ 时,则可证明

$$\hat{\sigma} = E_p \varepsilon^p \quad (2-16)$$

式(2-15)乃式(2-7)的另一种具体形式。 $\hat{\sigma}$ 或 ε^p 都可作为随动强化材料记录史的参数。

随动强化模型的缺点是将包辛格效应绝对化了,与实际材料