高等学校教学参考书

线性代数

栾汝书 编

高等教育出版社

高等学校教学参考书

线 性 代 数

栾汝书 编

内 容 提 要

这本教材是作者栾汝书教授根据清华大学二年级所设50学时的线性代数课程的要求编写的。本书层次清晰，论证严密、透彻，并配有具有启发性的例题和习题。内容包括：行列式，线性方程组，矩阵，线性空间与线性变换，欧氏空间与二次型等，外加四个附录。

本书可作为高等工科院校开设线性代数的各专业学生的教材或参考书，也可供理科有关专业的学生及工程技术人员参考。

高等学校教学参考书

线 性 代 数

栾汝书 编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷一厂印刷

北京通县满庄装订厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 10.625 字数 255,000

1983年9月第1版 1984年4月第1次印刷

印数 00,001—29,500

书号 13010·0940 定价 1.65元

序　言

这本教材是 1981 年根据当时清华大学一年级“空间解析几何与线性代数”课程的要求编写的，其中线性代数部分的讲课学时约为 50．为了便于学有余力的同学参考，编写时适当扩充了线性代数的内容，同教学大纲的相比约增加了20%，超出大纲部分用 * 号标出，另外还有四个附录。教材于 1981，1982 年在清华大学试用过两次．根据广大讲课教师使用的意见，这次又作了些修改．由于从 1983 年入学的学生的线性代数课将改到二年级学习，这次修改时将线性代数部分单独抽出编成一册．

编写这份教材时，考虑到以下三个问题．

一、内容的选择　由于教材内容要比教学大纲规定的适当多出一些，这样就面临着选题的问题．根据什么原则选择超出大纲要求的内容呢？线性代数是一门基础理论课，新增加的内容应该有利于基本理论、基本知识的提高与巩固，有利于基本方法的训练与掌握，通过这些内容的学习使学生对这门课程有比较系统的了解，并较牢固地掌握课程的基本方法与计算．这样，围绕基本内容除适当增加一些内容外，还增加一些定理的证明及一些有启发性的例题和应用问题，以便培养和提高学生分析问题、解决问题和理论联系实际的能力。

学生应在基本内容初步掌握后再学习这些增加的部分。后者虽然可以加深对前者的理解，但相比起来后者居于次要地位．例如，行列式的拉普拉斯展开定理是一个较复杂的内容，打有 * 号，但只要搞清楚行列式的定义与性质，理解这个定理的实际意义，并给出定理证明的思路并不是很困难的．当然，要将证明层次分明

地表达出来，需要有一定的技巧．反过来讲，如果行列式的定义与性质尚不清楚，要学习这个定理就是舍本逐末，会遇到较大的困难．

二、次序的安排　线性代数中有一些章节的内容有密切的内在联系，很难将它们按次序单独一一讲出．例如线性方程组的方法与理论就需要有矩阵的概念、矩阵的秩、矩阵的初等变换，向量的线性相关、线性无关等等预备知识．反之，矩阵的内容又需要有线性方程组的理论做为基础．因此，在确定各章次序后，当有些前面章节的内容需要用到后面的内容时，就应适当地提到前面讲授．应该做到既按题目分章节，又要有相互间的穿插．当后面的章节讲到的新方法，还可选择前面章节的一些内容用新方法重新加以解决．这样做还会起到复习、提高的作用．

线性方程组与矩阵这两章次序的安排各教师有不同的处理．经过多次考虑，我采用了先讲线性方程组，后讲矩阵的次序．这是因为，线性方程组相对讲比较具体，容易接受．高斯消元法实用价值大，目的性明确，由此引进矩阵概念、矩阵的秩、矩阵的初等变换等都较为自然．

考虑到有不少教师倾向于先讲矩阵，后讲线性方程组的情况，在编写时尽量使这份教材也能适用于这种讲法．

三、教材的使用　这本教材可供作一般工科院校线性代数的参考书．对于学时较多的（如讲课学时在50左右）可做为教材．在讲授时对打＊号的可以不讲．二、三阶行列式在中学课程中已学过，这里也不需要讲，可供同学复习用．书中有些定理的证明可以不讲，有两个证明的定理可以选择讲解其中一个．某些例题可以留给学生自学．就是说教材中一部分内容供讲课用，另一部分可留学生自学．要做到“教”与“学”结合，不要以“教”挤掉“学”．另外，在讲课中，要针对学生做习题中出现的问题加以总结，指导学生得

出正确的解题方法.

这本教材是在清华大学应用数学系广大教师支持下编写的，特别是康静安同志几次鼓励，没有他的推动，我是没有勇气提笔的。各章的习题是李国瑞同志选编的. 这次修改时广大讲课教师又提出了宝贵意见，其中林翠琴、张元德、何坚勇三位同志还提出书面意见，在此一并致谢.

限于个人水平，教材中还会存在不少缺点与错误，希望大家不吝指正，以便今后有机会时再做修改.

编　者

1983, 4.

目　录

第一章 行 列 式

行列式是一个重要的数学工具，不但在数学的各个领域中，而且在其他各学科中都会经常用到它，特别在线性代数中它更是一个不可缺少的工具．在中学代数中我们知道二，三元线性方程组的解利用行列式可以简单地表示出来．在解析几何中，特别是空间解析几何中，有许多结果通过行列式可以较简单地推导，表示出来．

在这一章内我们首先复习二、三阶行列式，然后讲一般阶行列式的定义、性质、计算及其简单应用．

第一节 二、三阶行列式

1.1.1. 二、三阶行列式的定义

我们从解线性方程组引进二、三阶行列式．

二元线性方程组可以化为下列标准形式

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ 是常数，x, y 是待定元．

若$a_1b_2-a_2b_1 \neq 0$，利用消元法，方程组有唯一的一组解

$$\begin{cases} x=\dfrac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \\ y=\dfrac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \end{cases} \tag{2}$$

为了便于记忆这个公式，我们引进二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1,$$

等式左端是四个数排成两行两列的方块，称为二阶行列式. 横的称为行，竖的称为列. 例如 a_1, b_1 构成行列式的第一行，b_1, b_2 构成行列式的第二列. 行列式的值是第一行，第一列的元素 a_1 与第二行，第二列元素 b_2 的乘积 a_1b_2 减去第二行，第一列的元素 a_2 与第一行，第二列的元素 b_1 的乘积 a_2b_1.

有了二阶行列式，二元线性方程组(1)的解可以表示为

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \tag{2'}$$

两个分母的行列式相同，是方程组的待定元的系数按照原来次序排列所构成的二阶行列式. x 的分子的行列式是用方程组的常数项代替分母行列式的第一列所得到的行列式，y 的分子的行列式是用常数项代替分母行列式的第二列所得到的行列式.

例1. 试用行列式解线性方程组

$$\begin{cases} 2x+3y=9 \\ 3x-2y=-19. \end{cases}$$

解: 利用公式(2)′,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 3 \\ -19 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-18+57}{-4-9} = \frac{39}{-13} = -3,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 3 & -19 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-38-27}{-13} = \frac{65}{13} = 5.$$

故得到方程组的解:

$$\begin{cases}x=-3,\\ y=5.\end{cases}$$

完全类似地，我们可以对三元线性方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=d_1\\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2\\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3\end{cases} \tag{3}$$

经过消元法，得到方程组的解

$$x=\frac{d_1b_2c_3+d_2b_3c_1+d_3b_1c_2-d_1b_3c_2-d_2b_1c_3-d_3b_2c_1}{a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1},$$

$$y=\frac{a_1d_2c_3+a_2d_3c_1+a_3d_1c_2-a_1d_3c_2-a_2d_1c_3-a_3d_2c_1}{a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1},$$

$$z=\frac{a_1b_2d_3+a_2b_3d_1+a_3b_1d_2-a_1b_3d_2-a_2b_1d_3-a_3b_2d_1}{a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1}.$$

以上假定分母的值不为 0.

这个结果比二元线性方程组的结果更难记忆，为此我们引进三阶行列式的定义. 对于排成三行，三列的九个有次序的数，

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix},$$

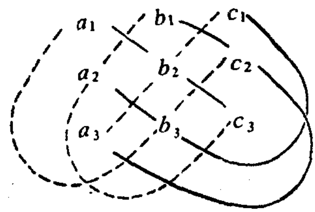
我们把由这九个数所得到的值 $a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1$ 称为该九个数排成三行，三列的方块的值，即

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1$$

定义了方块的值，我们将这个三行，三列的方块称为一个三阶行列式. 三个字母 a 所在的列称为第一列，三个字母 b 所在的列称为第二列，三个字母 c 所在的列是第三列；三个足标为 1 的元素所在

的行称为第一行，三个足标为 2 的元素所在行称为第二行，三个足标为 3 的元素所在行称为第三行．

三阶行列式的的值有六项，每一项是三个元素的乘积．这三个元素在每行中占有一个，在每一列中也占有一个．三项前置正号，另三项前置负号，然后求其代数和．为了便于记忆这六项，前带正号的三项用实线连接起来；前带负号的三项用虚线连接起来．三条实线各从左上方指向右下方；三条虚线各从右上方指向左下方（见图）．



三元线性方程组的解的分母是三个元素的系数按照原来次序所构成的三阶行列式；分子是将线性方程组的常数项所构成的列分别代替分母行列式的第一列，第二列，第三列所得到的行列式．我们将以上结果写成

定理1． 若三元线性方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3. \end{cases}$$

的系数行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

则方程组有唯一的一组解：

$$x=\frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad z=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

以上求线性方程组解的方法称为**克莱姆**法则(Cramer rule).

例2. 用克莱姆法则解下列线性方程组

$$\begin{cases}2x-3y+2z=-3\\ x+4y-3z=6\\ 3x-y-z=1.\end{cases}$$

解: 系数行列式为

$$\begin{vmatrix}2 & -3 & 2\\ 1 & 4 & -3\\ 3 & -1 & -1\end{vmatrix}=-8-2+27-6-3-24=-16$$

$$\neq 0,$$

方程组有唯一解. 解的分子行列式分别为

$$\begin{vmatrix}-3 & -3 & 2\\ 6 & 4 & -3\\ 1 & -1 & -1\end{vmatrix}=12-12+9+9-18-8=-8,$$

$$\begin{vmatrix}2 & -3 & 2\\ 1 & 6 & -3\\ 3 & 1 & -1\end{vmatrix}=-12+2+27+6-3-36=-16,$$

$$\begin{vmatrix}2 & -3 & -3\\ 1 & 4 & 6\\ 3 & -1 & 1\end{vmatrix}=8+3-54+12+3+36=8.$$

于是方程组的解为

$$x=\frac{-8}{-16}=\frac{1}{2},\qquad y=\frac{-16}{-16}=1,\qquad z=\frac{8}{-16}=-\frac{1}{2}.$$

这样就得到方程组的唯一解

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\ y=1\\ z=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

推论1. 若三元线性齐次方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=0,\\a_2x+b_2y+c_2z=0,\\a_3x+b_3y+c_3z=0,\end{cases}$$

的系数行列式

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\neq 0,$$

则方程组的唯一解为 $x=y=z=0$, 这组解称为零解.

这是由于三个分子的行列式各有一列全为 0, 因此分子行列式的值都为零.

推论2. 若三元线性齐次方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z=0,\\a_2x+b_2y+c_2z=0,\\a_3x+b_3y+c_3z=0.\end{cases}$$

有非零解, 则系数行列式必为 0, 即

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=0.$$

推理 2 很重要, 我们通过两个例题说明它的应用.

例3. 求通过平面上两个不同点 (x_1, y_1), (x_2, y_2) 的直线方程.

解: 设直线方程为

$$ax+by+c=0.$$

问题化为求 a, b, c 的值. 将 (x_1, y_1), (x_2, y_2) 代入上述方程, 得到

$$ax_1+by_1+c=0,$$

$$ax_2+by_2+c=0,$$

在直线上任取一点(x, y)，将x, y, x_1, y_1, x_2, y_2，看成常数，将a, b, c看成待定元，得到a, b, c的线性齐次方程组

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ ax_1+by_1+c=0 \\ ax_2+by_2+c=0. \end{cases}$$

由于这个方程组有非零解(a, b, c)，由推论2得知其系数行列式必为0，即

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

这是所求直线上任意一点(x, y)所应满足的方程，它就是所求直线的方程. 利用行列式的展开式，可以看出这确是x, y的一次方程，x的系数为(y_1-y_2)， y的系数为(x_2-x_1). 由于原给定的两个点是不同的，这两个系数不会全为0，因此它确是一个一次方程.

例4. 求通过不在一直线上的三个点

$$(0, 0),\quad (x_1, y_1),\quad (x_2, y_2)$$

的圆的方程.

解: 由于圆要求通过坐标原点$(0, 0)$，可设圆的方程为

$$x^2+y^2+Ex+Fy=0.$$

将圆上任意一个点(x, y)及已给两个点(x_1, y_1)，(x_2, y_2)代入上述方程，得到方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2+Ex+Fy=0 \\ x_1^2+y_1^2+Ex_1+Fy_1=0 \\ x_2^2+y_2^2+Ex_2+Fy_2=0. \end{cases}$$

这个方程组必有解E, F，由此可知下列线性齐次方程组

$$\begin{cases}(x^2+y^2)D+Ex+Fy=0\\(x_1^2+y_1^2)D+Ex_1+Fy_1=0\\(x_2^2+y_2^2)D+Ex_2+Fy_2=0\end{cases}$$

(将 x, y, x_1, y_1, x_2, y_2 看成已知量；D, E, F 看成待定元)必有非零解 $(D, E, F)=(1, E, F)$. 由推论 2，知系数行列式必为 0，即

$$\begin{vmatrix}(x^2+y^2) & x & y\\(x_1^2+y_1^2) & x_1 & y_1\\(x_2^2+y_2^2) & x_2 & y_2\end{vmatrix}=0.$$

这就是所求圆的方程. 由于行列式展开式中 x^2 的系数为 $x_1y_2-x_2y_1\neq 0$(由于已知三点不在一直线上)，以上的方程确是 x, y 的二次方程，它是通过已给三个点的圆的方程.

1.1.2. 二、三阶行列式的性质与计算

本段将研究行列式的性质，利用这些性质使我们可以更快地计算出行列式的值. 由于二阶行列式较简单，我们只讨论三阶行列式，二阶行列式的有关性质请读者自己补充.

性质1. 将行列式的行改为列，行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\b_1 & b_2 & b_3\\c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}.$$

以上两个行列式互为转置行列式.

证: 将行列式的行改为列，相当于将行列式绕主对角线 $a_1b_2c_3$ 旋转 180°(见下图):

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\\a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\longrightarrow\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\b_1 & b_2 & b_3\\c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}.$$

经过旋转，原行列式中的四项保持不变，另两项(即 $a_3b_1c_2$, $a_2b_3c_1$)互相调换，因此两个行列式的值相等.

有了这个性质，行列式有关行的性质对列也成立.

在三阶行列式展开式的六项中，每一项包含每一行中的一个元素，即

性质2. 三阶行列式是每一行的三个元素的一次齐次式，即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_iA_i + b_iB_i + c_iC_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

其中 A_i, B_i, C_i 中都不包含 a_i, b_i, c_i. 同样，行列式是每一列的三个元素的一次齐次式，即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3$$

$$= b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3$$

$$= c_1C_1 + c_2C_2 + c_3C_3,$$

这里 A_i, B_i, C_i 分别称为 a_i, b_i, c_i 的代数余子式，($i=1, 2, 3$)，一个元素的代数余子式的求法如下：在行列式中将该元素所在的行与列去掉，得到一个二阶行列式，将这个二阶行列式乘以 $(-1)^{i+j}$，就得到该元素的代数余子式，这里 i, j 分别是该元素所在的行数与列数. 例如

$$A_3 = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= b_1c_2 - b_2c_1$$

$$B_3 = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_2c_1 - a_1c_2,$$

每个元素的相应正负号 $(-1)^{i+j}$ 可以表示如下