

蒋智翔 编著

材料力学

下 册

清华大学出版社

材 料 力 学

(下 册)

蒋智翔 编著

清 华 大 学 出 版 社

内 容 介 绍

本书为工科高等院校的材料力学教材。书中对材料力学基本内容部分的课程体系作了较大的变动。内容安排力求由浅入深,突出重点,以利于自学及缩短教学时间。同时,加强了某些进一步内容的基础知识及分析方法。

全书分为上下两册。上册内容为细长杆件的强度、刚度及稳定计算。可单独作为机械类型多学时专业的教材。下册内容包括超静定结构、实验应力分析、能量理论、开口薄壁杆件的非均匀翘曲以及弹性理论的基本知识。上下册合用可作为机械类型多学时专业的教材,有些章节可作为因材施教内容。

本书各章都附有思考题及习题。

材 料 力 学

(下册)

蒋智翔 编著



清华大学出版社出版

北京 清华园

北京市通县向阳印刷厂印刷

新华书店北京发行所行·各地新华书店经售



开本: 787×1092 1/16 印张: 10 字数: 254千字

1986年4月第一版

1986年4月第一次印刷

印数: 00001~15000

统一书号: 15235·210

定价: ~~1.50~~元
1.50



目 录

第九章 超静定结构	1
§9.1 力法正则方程式.....	1
§9.2 内超静定结构.....	8
§9.3 对称超静定结构.....	19
(一) 对称结构.....	19
(二) 对称变形结构.....	19
(三) 反对称变形结构.....	27
(四) 一般变形的对称结构.....	32
§9.4 位移法解超静定结构的基本原理.....	32
§9.5 弹性基础上的梁.....	34
第十章 能量理论	48
§10.1 变形能基本定理.....	48
(一) 变形能.....	48
(二) 卡氏第一定理.....	50
(三) 总势能驻值定理.....	51
§10.2 瑞利-李兹法.....	57
§10.3 余能基本定理.....	67
(一) 余能.....	67
(二) 克罗第-恩格塞定理.....	68
第十一章 实验应力分析	74
§11.1 电测试验.....	74
(一) 基本原理.....	74
(二) 平面应力状态的测定.....	76
(三) 细长杆件内力的测定.....	79
(四) 电测试验误差分析简介.....	82
§11.2 光弹性试验.....	85
(一) 基本原理.....	85
(二) 应力计算.....	88
第十二章 开口薄壁杆件的非均匀翘曲	92
§12.1 薄壁杆件约束扭转的概念.....	92
§12.2 约束扭转时的变形规律.....	94
§12.3 约束扭转时扇性正应力公式.....	96
§12.4 横截面主扇性坐标及主扇性惯性矩的计算.....	100
§12.5 约束扭转时的扇性剪应力.....	106

§12.6 约束扭转微分方程及其积分	109
第十三章 弹性理论知识	121
§13.1 直角坐标平面问题的基本方程及解法	121
(一) 平面问题的类型	121
(二) 直角坐标平面问题的基本方程	123
(三) 直角坐标平面问题的基本解法	128
§13.2 极坐标平面问题的基本方程及解法	134
(一) 极坐标平面问题的基本方程	134
(二) 极坐标平面问题的基本解法	137
§13.3 空间问题的基本方程	142
(一) 直角坐标空间问题的基本方程	142
(二) 空间轴对称问题的基本方程	144
§13.4 有限单元法解弹性理论问题的基本原理	146
(一) 总势能驻值定理的应用	146
(二) 有限单元法的基本原理及解题步骤	151

第九章 超静定结构

在第六章内介绍了力法解简单超静定结构的方法及步骤，以及超静结构的特点。本章将进一步讨论力法解较复杂超静定结构的方法，以及位移法解超静定结构的基本步骤。

§ 9.1 力法正则方程式

在第六章内曾指出，力法解超静定结构的基本方法及步骤为：在确定结构超静定次数后，选择一静定及稳定的静定基，将多余约束看成载荷作用在静定基上，以相应的约束条件解出多余约束反力的数值。

对于较复杂的超静定结构，基本方法及步骤仍是相同的，但由于多余约束反力及相应的约束条件较多，计算过程将很复杂。为了能简化计算过程，可以将约束条件写得更有规律些。下面以图9-1(a)所示梁为例说明之。

此梁为二次超静定结构。取静定基及多余约束反力如图9-1(b)所示。为了有一定的规律性，今以 X_1 及 X_2 分别表示此两多余约束反力。符号 X 并不一定表示 x 方向约束力，而统一表示各种形式的多余约束反力，下标表示多余约束反力的编号。

这样，其相应的约束条件应为

$$\Delta_1 = 0$$

$$\Delta_2 = 0$$

式中 Δ_1 或 Δ_2 为对应于广义力 X_1 或 X_2 的广义位移。在静定基上， Δ_1 及 Δ_2 应是载荷 P 及各多余约束反力 X_1 及 X_2 共同产生的变位，故将上式展开后根据叠加原理可写成

$$\Delta_1 = \Delta_{1P} + \Delta_{1X_1} + \Delta_{1X_2} = 0$$

$$\Delta_2 = \Delta_{2P} + \Delta_{2X_1} + \Delta_{2X_2} = 0$$

式中有双下标的项中的第一个下标表示该变位(对应于相应的多余约束反力)的编号，第二个下标表示产生该变位的力。例如 Δ_{1P} 表示载荷 P 在静定基上产生的对应 X_1 的广义位移； Δ_{2X_1} 表示 X_1 在静定基上产生的对应 X_2 的广义位移。因此，在 Δ_{1X_1} 、 Δ_{1X_2} 、 Δ_{2X_1} 及 Δ_{2X_2} 中都分别包含有未知的多余约束反力 X_1 及 X_2 。按上述约束条件即可解出多余约束反力 X_1 及 X_2 。在弹性范围小变形时，外力与位移间呈线性关系。为了能使 X_1 及 X_2 在约束条件内表示得更为明显，可以将由多余约束反力所产生的变位改写成该多余约束反力乘以一比例系数，即将上述约束条件改写成

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{1P} + X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} &= 0 \\ \Delta_{2P} + X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9-1)$$

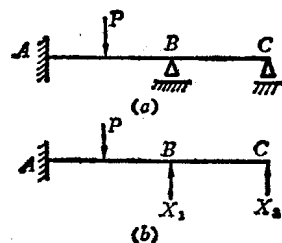


图 9-1

式中的比例系数 δ_{ij} ($i=1, 2, j=1, 2$)实际上表示当 $X_j=1$ 时在静定基上所产生的对应 X_i 的广义位移。例如, 由于 X_2 与所产生的变位 Δ_{1X_2} 成正比, 故 Δ_{1X_2} 可写成

$$\Delta_{1X_2} = X_2 \delta_{12}$$

故 δ_{12} 即为 $X_2=1$ 时所产生的对应 X_1 的广义位移, 如图9-2所示。

将约束条件写成式(9-1)形式的优点是在式(9-1)中除了多余约束反力 X_1 及 X_2 是未知数外, 其他的数量都是已知值, 只需在静定基上求出 Δ_{ip} 及 δ_{ij} 后, 即可解出多余约束反力 X_1 及 X_2 。

根据上述 δ_{ij} 所表示的意义, 还可证明当 $i \neq j$ 时

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} \quad (9-2)$$

利用图形互乘法很易证明上述结论。当采用图形互乘法求 δ_{ij} 时, 需要计算的是将 $X_i=1$ 与 $X_j=1$ 所产生的弯矩图互乘(图9-3), 而求 δ_{ji} 时则是将 $X_j=1$ 与 $X_i=1$ 所产生的弯矩图互乘。显然两者计算的结果必然相同。因此式(9-2)对于所有 δ_{ij} 都是成立的。式(9-2)称为位移互等定理, 即 $X_i=1$ 所产生的对应 X_j 的广义位移等于 $X_j=1$ 所产生的对应 X_i 的广义位移。这样, 在约束条件中对于 δ_{ij} 及 δ_{ji} 值(当 $i \neq j$ 时), 只需进行一次计算即可, 节省了计算工作量。例如在式(9-1)中 $\delta_{12} = \delta_{21}$, 故只需计算 δ_{12} 即可。

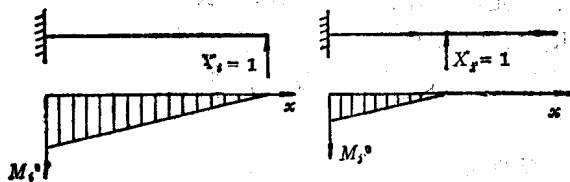


图9-3

上述形式的约束条件可推广到 n 次超静定结构中。对于 n 次超静定结构, 必然有 n 个多余约束反力及 n 个相应的约束条件。若构件对应各个多余约束反力的广义位移都为零, 则约束条件可写成

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= \Delta_{1p} + X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \cdots + X_n \delta_{1n} = 0 \\ \Delta_2 &= \Delta_{2p} + X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + \cdots + X_n \delta_{2n} = 0 \\ &\dots\dots\dots \\ \Delta_n &= \Delta_{np} + X_1 \delta_{n1} + X_2 \delta_{n2} + \cdots + X_n \delta_{nn} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (9-3, a)$$

或写成

$$\sum_{j=1}^n X_j \delta_{ij} + \Delta_{ip} = 0 \quad i=1, 2, \dots, n \quad (9-3, b)$$

式(9-3)称为超静定结构的正则方程式。式中 X_j ($j=1, 2, \dots, n$)为多余约束反力, δ_{ij} ($i, j=1, 2, \dots, n$)为 $X_j=1$ 时在 X_i 处所产生的对应 X_i 的广义位移, Δ_{ip} ($i=1, 2, \dots, n$)为外界因素在 X_i 处所产生的对应 X_i 的广义位移。所谓“外界因素”是泛指能使结构发生变形的各种因

素, 例如外载荷、温度变化、制造不正确以及弹性支座位移等 (详见例9-5)。

根据正则方程(9-3), 即可解出各多余约束反力 $X_i (i=1, 2, \dots, n)$ 。

下面举例说明正则方程式的应用。

例9-1 试求图9-4所示刚架的最大弯矩 $M_{\max}$ 及 C 处的转角 θ_c 。已知刚架的抗弯刚度 EJ 为常数。计算时忽略拉伸压缩变形所产生的变位。

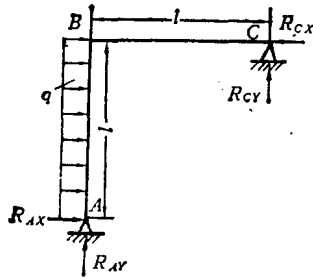


图 9-4

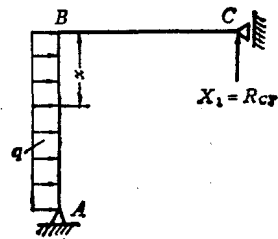


图 9-5

解:

(1) 确定超静定次数

此刚架在 A 及 C 处各有一固定铰支座, 故共有 $2 \times 2 = 4$ 个独立约束反力, 即 R_{AX} , R_{AY} , R_{Cx} , 及 R_{Cy} 。刚架在平面内具有三个平衡条件, 故它的超静定次数为 $4 - 3 = 1$ 次。

(2) 选择多余约束及静定基

在刚架的 AB 杆上作用着均布载荷 q 。选择静定基时应考虑到在列出物理条件时均布载荷弯矩图的面积及其形心位置较易计算, 以便按图形互乘法计算所产生的变位。

今取如图 9-5 所示的刚架作为静定基, 即将 C 处的固定铰支座以能在铅直方向移动的滚动铰支座代替。多余约束反力为 C 处的铅直约束力 R_{Cy} 。

在此静定基上画出的均布载荷弯矩图如图 9-6(a) 所示。可以看出, 此弯矩图是对称的二次抛物线, 面积及其形心位置很易确定, 且只在 AB 杆内存在弯矩, BC 杆的弯矩为零, 这样可减少以后的计算工作量。

(3) 求多余约束反力

将多余约束反力 R_{Cy} 以 X_1 表示。正则方程式(9-3)可写成

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1p} = 0$$

式中 δ_{11} 为 $X_1 (R_{Cy}) = 1$ 时在 X_1 方向产生的变位, Δ_{1p} 为载荷在 X_1 方向产生的变位。 X_1 方向的变位实际上即为 C 处的铅直向上位移。

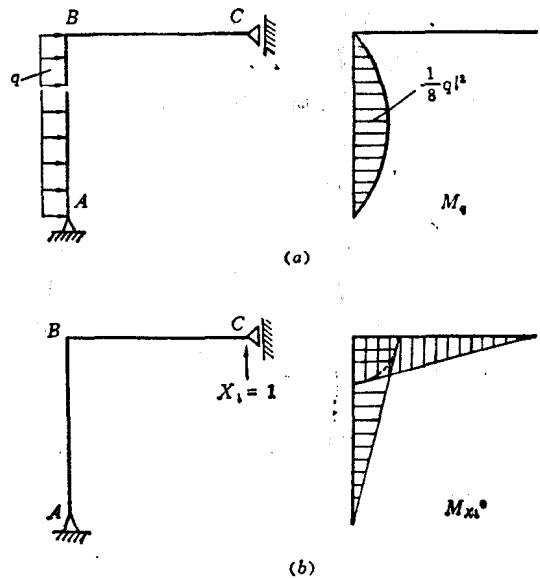


图 9-6

利用图形互乘法求 δ_{11} 及 Δ_{1p} 时,先分别画出 $X_1=1$ 及载荷所产生的弯矩图如图9-6所示。
 δ_{11} 为 $X_1=1$ 的弯矩图 $M_{X_1}^0$ 自乘的结果,得

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{2} l \times l \times \frac{2}{3} l + \frac{1}{2} l \times l \times \frac{2}{3} l \right) = \frac{2}{3} \frac{l^3}{EJ}$$

Δ_{1p} 为载荷的弯矩图 M_q 与 $X_1=1$ 的弯矩图互乘的结果,即

$$\Delta_{1p} = \frac{1}{EJ} \frac{2}{3} \times \frac{1}{8} ql^2 \times l \times \frac{1}{2} l = \frac{1}{24} \frac{ql^4}{EJ}$$

代入正则方程式,即得多余约束反力

$$R_{CY} = X_1 = -\frac{1}{16} ql$$

负号表示 R_{CY} 的实际方向与所假设方向相反,即方向向下。

(4) 画刚架弯矩图,并求 $M_{\max}$ 值

刚架各截面的弯矩值可将载荷 q 的弯矩值 M_q 与多余约束反力 R_{CY} 的弯矩值叠加求得,即

$$M = M_q + X_1 M_{X_1}^0 = M_q + R_{CY} M_{X_1}^0$$

例如结点 B 处的弯矩为

$$\begin{aligned} M_B &= M_{Bq} + R_{CY} M_{BX_1}^0 \\ &= 0 - \frac{1}{16} ql \times l = -\frac{1}{16} ql^2 \end{aligned}$$

负号表示受拉边与 $M_{BX_1}^0$ 的相反,即在结点 B 处 AB 杆左侧受拉。

将各点的弯矩值求出后,得超静定刚架的弯矩图如图9-7所示。欲求 AB 杆的最大弯矩 $M_{\max}$ 值,必须首先确定 $M_{\max}$ 截面的位置。这可由剪力 Q 等于零的条件求得。剪力方程式为(图9-5)

$$Q = R_{CX} - qx$$

约束反力

$$R_{CX} = \frac{1}{l} \left(\frac{1}{2} ql^2 - R_{CY} l \right) = \frac{9}{16} ql$$

故当 $Q=0$ 时

$$x_1 = \frac{R_{CX}}{q} = \frac{9}{16} l$$

由此可得

$$\begin{aligned} M_{\max} &= R_{CY} l + R_{CX} x_1 - \frac{1}{2} qx_1^2 \\ &= -\frac{1}{16} ql^2 + \frac{81}{256} ql^2 - \frac{81}{512} ql^2 = \frac{49}{512} ql^2 \end{aligned}$$

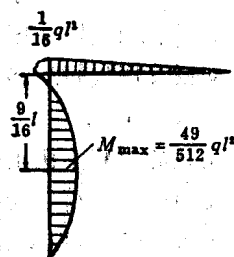


图9-7

(5) 求 C 处的转角

静定基的内力及位移与原来超静定刚架的内力及位移是完全相同的，因此在求超静定刚架的位移时，只需求出它的静定基上相应处的位移即可。这样，在利用图形互乘法求位移时，单位载荷只需施加在静定基，不必施加在原来的超静定刚架上（若施加在原来的超静定刚架上，还需解一次超静定刚架问题才能求出它的弯矩图）。由于静定基上作用的多余约束反力是在满足约束条件的基础上求得的，可以证明单位载荷施加在静定基上所得的位移与单位载荷施加在超静定刚架上的结果必然是相同的。

在静定基上 C 点处施加单位力偶后所画出的弯矩图如图 9-8 所示。将它与 M_0 及 $X_1 M_{x1}^0$ 图相乘后，即可求得 C 点的转角为

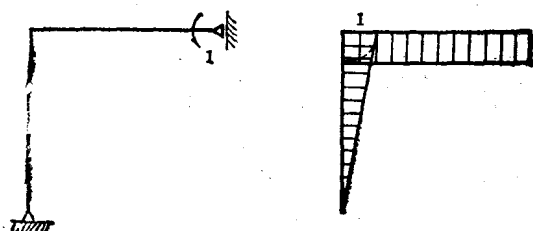


图 9-8

$$\begin{aligned}
 EJ\theta_c &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{8} ql^2 \times l \times \frac{1}{2} + X_1 \left(\frac{1}{2} l \times l \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} l \times l \times 1 \right) \\
 &= \frac{1}{24} ql^3 - \frac{1}{16} ql \times \frac{5}{6} l^2 = -\frac{1}{96} ql^3
 \end{aligned}$$

例 9-2 试求图 9-9 所示刚架的最大弯矩值。已知 EJ 为常数。忽略拉伸压缩变形的影响。

解：

(1) 确定结构的超静定次数

A 及 B 都为固支端，故刚架具有 $2 \times 3 = 6$ 个约束反力。刚架在平面内有三个平衡条件 $\sum X = 0$ ， $\sum Y = 0$ 及 $\sum m(P) = 0$ 。因此此刚架为 $6 - 3 = 3$ 次超静定结构。

(2) 选择静定基及多余约束反力

选择静定基如图 9-10 所示。相应的多余反力为 B 处的约束反作用力 $X_1 (=X_B)$ ， $X_2 (=Y_B)$ ，及 $X_3 (=m_B)$ 。

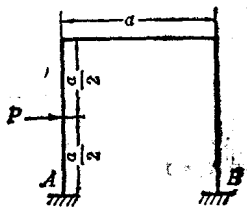


图 9-9

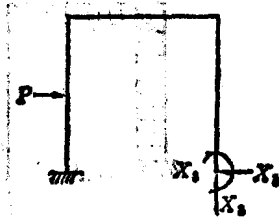


图 9-10

(3) 求出正则方程式中的各系数

首先画出载荷 P 在静定基上的弯矩 M_p 图, 以及 $X_1=1$, $X_2=1$, $X_3=1$ 分别产生的弯矩 M_{x1}^0 , M_{x2}^0 及 M_{x3}^0 图, 如图 9-11 所示。由于忽略拉伸压缩变形的影响, 不必画出轴向力图。

采用图形互乘法时, 正则方程式(9-3)内 Δ_{ip} ($i=1, 2, 3$) 为 M_p 与 M_{xi} 图分别相乘的结果, 计算得:

$$\Delta_{1p} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} Pa \times \frac{1}{2} a \right) \times \frac{1}{6} a = \frac{1}{48} \frac{Pa^3}{EJ}$$

$$\Delta_{2p} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{8} Pa^2 \right) (-a) = -\frac{1}{8} \frac{Pa^3}{EJ}$$

$$\Delta_{3p} = \frac{1}{EJ} \left(\frac{1}{8} Pa^2 \right) (-1) = -\frac{1}{8} \frac{Pa^2}{EJ}$$

正则方程式(9-3)内的 δ_{ii} ($i=1, 2, 3$) 为 M_{xi}^0 图各自自乘的结果, 计算得

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \left[2 \left(\frac{1}{2} \times a \times a \times \frac{2}{3} a \right) + a \times a \times a \right] = \frac{5}{3} \frac{a^3}{EJ}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} \times a \times a \times \frac{2}{3} + a \times a \times a \right] = \frac{4}{3} \frac{a^3}{EJ}$$

$$\delta_{33} = \frac{1}{EJ} [3(1 \times a \times 1)] = \frac{3a}{EJ}$$

δ_{ij} ($i \neq j$), ($i, j=1, 2, 3$) 为相应的 M_{xi}^0 及 M_{xj}^0 图交叉相乘的结果。由位移互等定理可知 $\delta_{ij} = \delta_{ji}$, 故可计算得

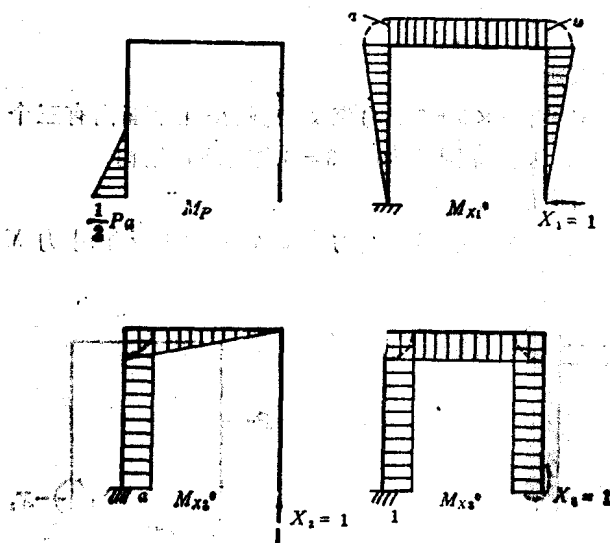


图 9-11

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} \times a \times a (-a) + a \times a \left(-\frac{1}{2}a \right) \right] = -\frac{a^3}{EJ}$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \frac{1}{EJ} \left\{ 2 \left[\frac{1}{2} \times a \times a (-1) \right] + a \times a (-1) \right\} = -\frac{2a^2}{EJ}$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} \times a \times a \times 1 + a \times a \times 1 \right] = \frac{3}{2} \frac{a^2}{EJ}$$

(4) 解正则方程式

将正则方程式整理后可简化成如下形式:

$$\frac{5}{3}X_1a - X_2a - 2X_3 = -\frac{1}{48}Pa$$

$$-X_1a + \frac{4}{3}X_2a + \frac{3}{2}X_3 = \frac{1}{8}Pa$$

$$-2X_1a + \frac{3}{2}X_2a + 3X_3 = \frac{1}{8}Pa$$

解正则方程式可用行列式的方法。主行列式为

$$W = \begin{vmatrix} \frac{5}{3}a & -a & -2 \\ -a & \frac{4}{3}a & \frac{3}{2} \\ -2a & \frac{3}{2}a & 3 \end{vmatrix} = \frac{7}{12}a^3$$

各分行列式为

$$W_1 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{48} & -a & -2 \\ \frac{1}{8} & \frac{4}{3}a & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{2}a & 3 \end{vmatrix} Pa = \frac{7}{64}Pa^3$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} \frac{5}{3}a & -\frac{1}{48} & -2 \\ -a & \frac{1}{8} & \frac{3}{2} \\ -2a & \frac{1}{8} & 3 \end{vmatrix} Pa = \frac{1}{16}Pa^3$$

$$W_3 = \begin{vmatrix} \frac{5}{3}a & -a & -\frac{1}{48} \\ -c & \frac{4}{3}a & \frac{1}{8} \\ -2a & \frac{3}{2}a & \frac{1}{8} \end{vmatrix} Pa = \frac{19}{288} Pa^3$$

故得

$$X_1 = \frac{W_1}{W} = \frac{3}{16}P, \quad X_2 = \frac{W_2}{W} = \frac{3}{28}P, \quad X_3 = \frac{W_3}{W} = \frac{19}{168}Pa$$

(4) 画出弯矩图

将 $M_{x_1}^0$, $M_{x_2}^0$ 及 $M_{x_3}^0$ 图分别乘以 X_1 , X_2 及 X_3 , 且与 M_p 图一起叠加起来后, 可得刚架的弯矩图, 如图 9-12 所示。由图可见, 最大弯矩为 $M_A = \frac{47}{168}Pa$, 小于 M_p 图中 A 处的弯矩 $M_{p,A} = \frac{1}{2}Pa$ 。

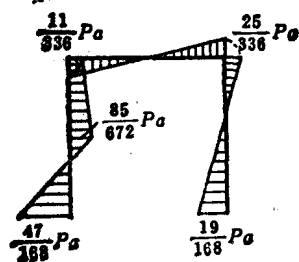


图 9-12

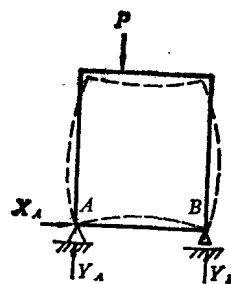


图 9-13

§ 9.2 内超静定结构

迄今为止, 讨论的超静定结构的超静定性都是由于外界给予的约束过多所形成的。在工程实际中, 还存在着的一类本身具有一定超静定性的结构, 例如图 9-13 中所示的封闭刚架, 它支撑在一个固定铰支座及一个滚动铰支座上, 故仅有三个未知的约束反力 X_A , Y_A 及 Y_B 。在平面内刚架的外力共需满足三个平衡条件 $\sum X=0$, $\sum Y=0$, $\sum m(P)=0$, 因此此刚架应该说是静定的。但可看出, 利用静力学平衡方程式求出约束反力后, 仍无法利用截面法求出刚架各杆件横截面的内力。其主要原因在于此刚架为一封闭系统, 刚架的某一根杆件被截开后, 整个刚架仍为一整体, 并没有被截成两部分。从这个意义上来说, 这个刚架的封闭性对刚架的整体平衡是多余的, 或者说即使刚架没有被封闭住(例如在图 9-14 内 C 处被切断), 只要所受的外力(包括约束反力)满足平衡条件, 它仍能保持整体平衡。当然, 开口刚架(图 9-14)与封闭刚架的变形状态是有很区别的。开口刚架在 C 处的位移及转角是不连续的, 而封闭刚架变形后的形状在 C 处应为连续光滑的曲线。若将封闭刚架在 C 处以截面法截开后, C 截面内

将出现一定的内力(见图 9-15), 但这些内力对整个刚架的平衡来说并没有影响(它们必然是大小相等、方向相反), 而它们的主要作用是为了使封闭刚架变形后在 C 处仍形成连续光滑的曲线。这种对平衡有“多余内力”(内约束或简称约束)的结构称为内超静定结构。它的超静定次数等于它的“多余”内力素的个数。

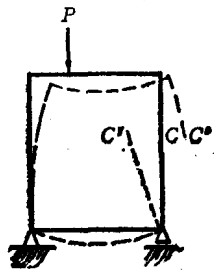


图 9-14

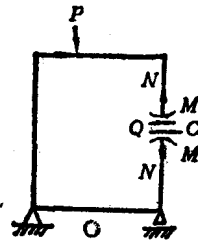


图 9-15

一般来说, 连续杆件任一横截面内应存在六个内力素——轴向力 N , 扭矩 M_x , 两个剪力分量 Q_y, Q_z 及两个弯矩分量 M_y, M_z 。但对于承受不同载荷形式的结构, 横截面内实际存在的内力素数目及类型是不同的。例如对于两端铰支的二力杆件, 内力素仅为轴向力 N 。对小变形平面刚架, 若载荷仅作用在刚架平面内时, 横截面内仅存在使杆件在刚架平面内变形的三个内力素; 若刚架承受平面外载荷作用时, 横截面内将仅存在使杆件在刚架平面外变形的其余三个内力素。例如对于图 9-15 所示的平面封闭刚架, 载荷作用在刚架平面内, 横截面内仅存在 M, Q 及 N 三个内力素——“多余”内力, 故此刚架为三次超静定结构。

内超静定结构的解法与前面介绍的外超静定结构(具有多余的支座约束)的解法是相同的。首先要选择一定形式的静定基及相应的多余(内)约束力。从内超静定结构的特点可看出, 必须要截开超静定结构的某个或某些截面, 才能得到静定基, 而其相应的多余(内)约束力即为这些截面内的内力素。例如对于图 9-13 所示的超静定刚架, 图 9-15 所示的开口刚架即可作为它的静定基, 而多余(内)约束力为此截开截面的内力素 M, Q 及 N 。

确定多余(内)约束力仍需依靠相应的约束(变形)条件。前面已讨论过, 封闭结构与开口结构的区别在于开口处的变形情况不同。因此, 为了使静定基的变形情况与原来的超静定结构相一致, 约束(变形)条件应为多余(内)约束处构件相应的相对位移等于零, 这样才能保证静定基在截开处的变形曲线是连续光滑的。例如对于图 9-15 所示的静定基, 其约束条件应为

$$\Delta u_c = \Delta v_c = \Delta \theta_c = 0$$

式中 $\Delta u_c, \Delta v_c$ 及 $\Delta \theta_c$ 分别为 C 截面处被截开后两截面的相对水平位移, 相对铅直位移及相对转角。可以看出, 这些相对位移与其对应的(内)约束力间仍保持广义位移与广义力的关系, 与外超静定结构中的多余约束反力与约束条件间的关系相同。

以内力作为多余约束力的分析方法不但对内超静定结构是适用的, 而且对于某些外超静定结构也是适用的。有些外超静定结构, 采用内力作为多余约束力来进行分析计算, 甚至更为方便些(见例 9-4)。

最后应说明, 一般来说结构可以同时为外超静定及内超静定的。例如图 9-13 所示的封闭刚架, 若 A, B 处都为固定铰支座, 则此结构将为一次外超静定及三次内超静定, 故共为四次超静

定结构。解这类结构的方法仍与上述的相同。取一定形式的静定基后,根据相应的约束条件,同时解出多余支座约束反力及内约束力。

例9-3 试求图9-16所示结构各杆的内力。已知各杆的抗拉(压)刚度 EF 都相同。

解:

先分析此结构的外超静定性,即将 $ABDC$ 看成一整体来考虑。它具有三个独立的约束反力 Y_B , Y_D 及 X_D ,在平面内有三个平衡方程式,故从外超静定角度来分析,它是静定的。

现在进一步分析 $ABDC$ 结构的内超静定性。由于载荷及约束反力仅作用在结点上,故各杆都应为二力杆。对于由二力杆系组成的结构(桁架),由静力学分析可知,当它们以三角形形式组成时,各杆的内力可用平衡条件求出,例如若不存在斜杆 BC 时,其他各杆的内力仅按平衡条件就可确定,即此时是静定的。当存在 BC 杆时,整个结构多了一个未知内力,仅用平衡条件就无法确定杆件的内力。因此,此桁架应为一次内超静定结构。

对于内超静定结构,必须取内力作为多余约束反力。至于取哪个内力作为多余约束反力,可根据计算时较方便的方案来选择。今若取 AC 杆的内力 N_{AC} 作为多余约束反力。静定基的取法可以有如图9-17(a)及(b)所示的两种形式。图9-17(a)内所示的静定基是将杆 AC 取走后由剩余的五根杆件所组成的静定结构。此时相应的约束条件应为

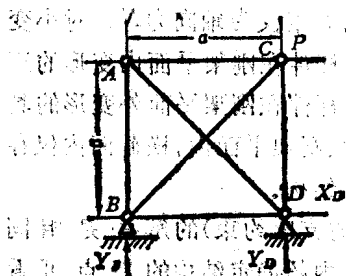
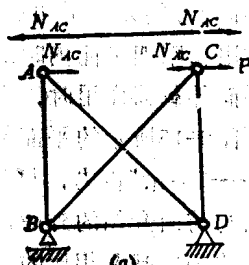
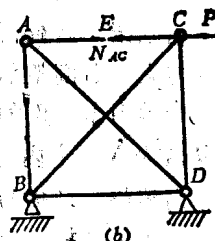


图 9-16



(a)



(b)

图 9-17

式中 u_{AC} 为此静定结构上 A , C 两结点变形后的相对位移, Δ_{AC} 为 AC 杆的变形。在具体列出约束条件时应注意等式两边的符号协调一致。若 u_{AC} 表示 A , C 两点间的相对分离位移,则 Δ_{AC} 应为 AC 杆的伸长;反之,若 u_{AC} 表示 A , C 两点间的相对接近位移,则 Δ_{AC} 应为 AC 杆的缩短。两边符号不协调,需用正负号加以调整。

图9-17(b)所示的静定基是将 AC 杆在 E 截面处截开后仍由六根杆件所组成的静定结构。此时相应的约束条件应为

$$\Delta u_E = 0$$

式中 Δu_E 表示此静定结构上 E 处两截面间的相对位移。

比较上述两种静定基可以看出它们的约束条件本质上是相同的,区别仅在于所考虑的对象有所不同。 Δu_E 实际上已同时反映了 A , C 两结点间的相对位移及 AC 杆的变形。在具体运算时,以图9-17(b)所示结构作为静定基是较为方便的。在列出约束条件时不需要考虑 u_{AC} 与 Δ_{AC} 间的符号是否协调,直接求出 Δu_E 即可。下面以图9-17(b)所示的静定基为基础进行求解。约束条件可写成

$$\Delta u_E = \delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0$$

式中 X_1 表示多余约束内力 N_{AC} 。利用单位载荷法求 δ_{11} 及 Δ_{1P} ,载荷 P [图9-18(a)]及在 E 截

面处两端施加一对单位力[图9-18(b)]在静定基上产生的各杆内力分别为

对于荷载 P

$$\begin{aligned} N_{AB}^{(P)} &= 0, & N_{AD}^{(P)} &= 0, & N_{AC}^{(P)} &= 0 \\ N_{CD}^{(P)} &= -P, & N_{CB}^{(P)} &= \sqrt{2}P, & N_{BD}^{(P)} &= -P \end{aligned}$$

对于单位荷载

$$\begin{aligned} N_{AB}^0 &= 1, & N_{AD}^0 &= -\sqrt{2}, & N_{AC}^0 &= 1 \\ N_{CD}^0 &= 1, & N_{CB}^0 &= -\sqrt{2}, & N_{BD}^0 &= 1 \end{aligned}$$

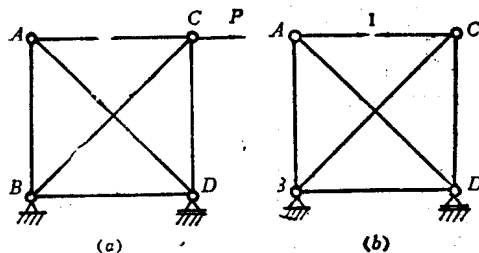


图 9-18

由于各杆的 $N_i^{(P)}$ 及 N_i^0 都为常数, 故按单位荷载法计算变位时的公式可写成

$$\begin{aligned} \Delta_{1P} &= \sum \frac{N_i^{(P)} N_i^0 l_i}{E_i F_i} = \frac{1}{EF} [(0)(1)(a) + (0)(-\sqrt{2})(\sqrt{2}a) \\ &\quad + (0)(1)(a) + (-P)(1)(a) + (\sqrt{2}P)(-\sqrt{2})(\sqrt{2}a) + (-P)(1)(a)] \\ &= -\frac{2(1+\sqrt{2})Pa}{EF} \\ \delta_{11} &= \sum \frac{(N_i^0)^2 l_i}{E_i F_i} = \frac{1}{EF} [(1)^2(a) + (-\sqrt{2})^2(\sqrt{2}a) + (1)^2a \\ &\quad + (1)^2a + (-\sqrt{2})^2(\sqrt{2}a) + (1)^2a] \\ &= \frac{4(1+\sqrt{2})a}{EF} \end{aligned}$$

故得

$$X_1 = N_{AC} = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{1}{2}P$$

按 $N_i = N_i^{(P)} + N_i^0 X_1$ 可求出各杆的内力为

$$\begin{aligned} N_{AB} &= \frac{1}{2}P, & N_{AD} &= -\frac{\sqrt{2}}{2}P, & N_{AC} &= \frac{1}{2}P \\ N_{CD} &= -\frac{1}{2}P, & N_{CB} &= \frac{\sqrt{2}}{2}P, & N_{BD} &= -\frac{1}{2}P \end{aligned}$$

例9-4 以内力为多余约束力, 求解例9-2所示刚架(图9-9)的内力图。

解:

已知此刚架为三次超静定结构。今取图9-9所示的结构为静定基, 即将刚架在横梁中点 C 处截开, 成为两分离的刚架 AC 及 CB 。应注意此时仍应保证静定基(两分离刚架)在荷载及多余约束作用下都是稳定的静定结构。由于 A, B 处都是固定端, 故上述条件是满足的。

在此静定基上的多余约束力为 C 截面的内力。由于荷载 P 作用在刚架平面内, 内力仅为

轴向力 N_c 、剪力 Q_c 及弯矩 M_c ，将它们相应地表示为 X_1 、 X_2 及 X_3 。这些多余约束力大小相等、方向相反地分别作用在两刚架 AC 及 CB 上。由于取内力为多余约束力，约束条件应为此处相应的相对位移等于零。 C 处两刚架相应的相对位移为水平相对位移 Δu_c 、铅直相对位移 Δv_c 及相对转角 $\Delta \theta_c$ 。若将它们对应地以 Δ_1 、 Δ_2 及 Δ_3 表示，且将约束条件写成正则方程式的形式，则可得

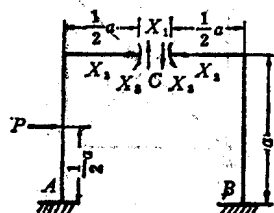


图9-19

$$\Delta_1 = \Delta_{1p} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 = 0$$

$$\Delta_2 = \Delta_{2p} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 = 0$$

$$\Delta_3 = \Delta_{3p} + \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 = 0$$

式中 Δ_{ip} ($i=1, 2, 3$) 为载荷 P 在 C 处产生的对应 X_i 的相对位移； δ_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) 为 $X_j=1$ 在 C 处产生的对应 X_i 的相对位移。采用图形互乘法求 Δ_i 及 δ_{ij} 时，可先画出载荷 P 及 $X_i=1$ ($i=1, 2, 3$) 所产生的弯矩 M_p 及 M_{xi} 图，如图9-20所示。由此求得

$$\Delta_{1p} = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} Pa \times \frac{1}{2} a \left(-\frac{1}{2} a \right) \right] = -\frac{1}{16} \frac{Pa^3}{EJ}$$

$$\Delta_{2p} = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} Pa \times \frac{1}{2} a \left(-\frac{5}{6} a \right) \right] = -\frac{5}{48} \frac{Pa^3}{EJ}$$

$$\Delta_{3p} = \frac{1}{EJ} \left[\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} Pa \times \frac{1}{2} a \times 1 \right] = \frac{1}{8} \frac{Pa^2}{EJ}$$

$$\delta_{11} = \frac{2}{EJ} \left[\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} a \times \frac{1}{2} a \times \frac{1}{3} a + \frac{1}{2} a \times a \times \frac{1}{2} a \right] = \frac{7}{12} \frac{a^3}{EJ}$$

$$\delta_{22} = \frac{2}{EJ} \left[\frac{1}{2} \times a \times a \times \frac{2}{3} a \right] = \frac{2}{3} \frac{a^3}{EJ}$$

$$\delta_{33} = \frac{2}{EJ} \left[1 \times a \times 1 + 1 \times \frac{1}{2} a \times 1 \right] = \frac{3}{2} \frac{a^2}{EJ}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = 0$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = 0$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \frac{2}{EJ} \left[\frac{1}{2} \times a \times a (-1) \right] = -\frac{a^2}{EJ}$$

代入正则方程式，进行整理及简化后得

$$\frac{7}{12} X_1 = \frac{1}{16} \frac{Pa^3}{EJ}$$

$$\frac{2}{3} X_2 + X_3 = \frac{5}{48} \frac{Pa^3}{EJ}$$

$$-X_2 + 3X_3 = -\frac{1}{8} \frac{Pa^2}{EJ}$$