

2001

全国各省市重点学校

“3+综合”

优秀模拟试题 精选

主编：博浩

数 学

光明日报出版社

2001 年全国各省市重点学校“3+综合”优秀模拟试题精选

数 学

主编：博 浩

光明日报出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

2001 年全国各省市重点学校 “3+综合” 优秀模拟试题精选/博浩主编. —北京: 光明日报出版社, 2001. 9

ISBN 7-80145-492-8

I. 2... I. 博... II. 课程—高中—试题—升学参考资料 N. G632.479

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2001) 第 063980 号

2001 年全国各省市重点学校 “3+综合” 优秀模拟试题精选

主 编: 博 浩

责任编辑: 程 智

出版发行: 光明日报出版社 (北京市宣武区永安路 106 号 电话: 010—63082436 邮编: 100050)

经 销: 新华书店北京发行所

印 刷: 北京市宣武育才印刷厂

开 本: 787×1092 1/16 开

印 张: 60

字 数: 1000 千字

版 次: 2001 年 9 月第一版 2001 年 9 月第一版

印 数: 1—5000 册

ISBN: 7-80145-492-8/G632.479 定价: 65 元 (全五册)

版权所有 翻印必究

(如有印刷、装订错误, 请与印刷厂调换)

前 言

2002年全国绝大部分省市都将实行“3+综合”的高考模式，这一新模式对广大高三学生来讲是一个全新的挑战和考验。如何面对挑战，适应这一新模式，是关系到每一个考生高考成败的关键。

为了使广大考生少走弯路，迅速适应新的考试模式，了解“3+综合”的命题思路和解题技巧，我们搜集了2001年在全国率先实行“3+综合”的18个省市和一些重点学校的优秀模拟试题，并对这些试题进行了精心的筛选，组织编辑了《2001年全国各省市重点学校“3+综合”优秀模拟试题精选》一书。该书两个最重要的特点是：①权威性高。这些试题是各地对“3+综合”深有研究的老师、教研员等集体智慧的结晶，它能充分检验和考查考生的综合能力、应用能力和创新能力；②针对性和实用性强。这些试题覆盖了高考的重点和难点，充分体现考点，这对考生来说是最好的练习题。

虽然我们倾注了很大的努力，但很难做到尽善尽美，希望这套书能助那些正在艰苦跋涉中的莘莘学子一臂之力，圆你一个大学梦！

编委会

2001年9月

目 录

北京市东城区 2001 年 5 月份高三第一次模拟试卷	(1)
北京市西城区 2001 年 5 月份高三模拟试卷	(4)
北京市海淀区 2001 年 5 月份高三模拟试卷	(7)
北京东城区 2001 年 6 月份高三第三次模拟试卷	(10)
北京市西城区 2001 年 6 月份高三模拟试卷	(13)
北京市海淀区 2001 年 6 月份高三模拟试卷	(16)
天津市 2001 年高中质量调查试卷	(19)
浙江省杭州市 2001 年第二次高考科目教学质量检测	(22)
2001 年绍兴市高三教学质量调测	(25)
台州市 2001 年高三年级第一次调考试题	(28)
湖北名校 2001 年届联考	(31)
2001 年哈、长、沈、大四市高中毕业班联合考试	(34)
安徽省江南片重点中学 2000—2001 学年度高三素质测试	(37)
金华、衢州、丽水十二校 2001 届高三第一次联合考试	(40)
2001 年福州市高中毕业班质量检查	(43)
武汉市高三模拟考试题	(46)
重庆市高中第二次诊断性考试试题	(49)
太原市高三第三次综合检测题	(52)
湖南师大附中高三模拟考试试题	(55)
东北师大附中模拟考试试题	(58)
济南市 6 月份高三模拟考试试题	(61)
黄冈市 6 月模拟考试试题	(65)
湖北省黄冈中学 6 月模拟考试试题	(68)
合肥市高三抽样考试试题	(71)
南昌市高三第二次测试试题	(74)
南京市高三第二次质量检测	(77)
云南省 6 月份模拟考试试题	(80)
南宁市高中毕业班适应性测试	(83)
吉林省实验中学模拟考度试题	(86)
孝感市高三考试试题	(89)
苏州、无锡、常州、镇江四市 2001 年高三教学情况调查测试题 (二)	(92)
广州市高三第一次综合测试题	(95)
2001 年广州市普通高中毕业班综合测试 (二)	(98)
成都市高中第二次诊断性检测题	(101)
成都市高中第三次诊断性检测	(104)
石家庄市第二次模拟考试试题	(107)
忻州市 2001 年高三质量检测 (一)	(110)
上海全国高等院校招生考试试题	(113)
数学参考答案	(116)



①北京市东城区 2001 年 5 月份高三第一次模拟试卷

参考公式:

三角函数的和差化积公式

$$\sin\theta + \sin\varphi = 2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}$$

$$\sin\theta - \sin\varphi = 2\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}$$

$$\cos\theta + \cos\varphi = 2\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}$$

$$\cos\theta - \cos\varphi = -2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}$$

正棱台、圆台的侧面积公式

$$S_{\text{台侧}} = \frac{1}{2}(c' + c)l$$

其中 c' 、 c 分别表示上、下底面周长,

l 表示斜高或母线长

台体的体积公式:

$$V_{\text{台体}} = \frac{1}{3}(S' + \sqrt{S'S} + S)h$$

其中 S' 、 S 分别表示上、下底面积, h 表示高.

第 I 卷

一、选择题: 本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

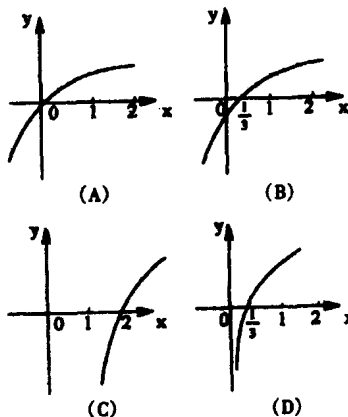
1. 若 $f(x) = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) 的定义域为 M , $g(x) = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) 的定义域为 N , 令全集 $I = \mathbb{R}$, 则 $M \cap N =$ ()

- A. M B. N C. $\overline{M}$ D. $\overline{N}$

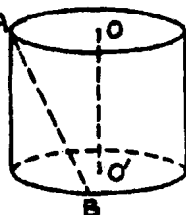
2. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, 2a_{n+1} = a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), 则这个数列前 n 项和的极限是 ()

- A. 2 B. $\frac{1}{2}$ C. 3 D. $\frac{1}{3}$

3. 已知函数 $f(x) = 3^{x-1}$, 则它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图象是 ()



4. 如图, 圆柱的高为 8, 点 A 和点 B 分别在上下底面的圆周上, 且 $AB = 10$, 则直线 AB 与圆柱的轴 OO' 所成角的大小为 ()



- A. $\arctg \frac{4}{3}$
B. $\arctg \frac{3}{4}$
C. $\arctg \frac{4}{5}$
D. $\arctg \frac{3}{5}$

5. 函数 $y = 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ 图象的两条相邻对称轴之间的距离是 ()

- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{2\pi}{3}$ C. π D. $\frac{4\pi}{3}$

6. (理) 过点 $P\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ 且平行于极轴的直线的极坐标方程是 ()

- A. $\rho \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\rho \sin\theta = 1$
C. $\rho = -\sin\theta$ D. $\rho = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\theta$

(文) 点 $(-2, 3)$ 关于直线 $y = x + 1$ 对称的点的坐标是 ()

- A. $(2, -1)$ B. $(3, 0)$
C. $(3, -1)$ D. $(2, 0)$

7. 圆台的侧面展开图是一个内外半径分别为 3 和 6, 中心角为 $\frac{4\pi}{3}$ 的扇环, 则此圆台的全面积是 ()

- A. 36π B. 38π C. 48π D. 54π

8. 定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的函数 $y=f(x)$ 在 $(-\infty, 2)$ 上是增函数, 且函数 $y=f(x+2)$ 图象的对称轴是 $x=0$, 则 ()

- A. $f(-1) < f(3)$
B. $f(0) > f(3)$
C. $f(-1) = f(-3)$
D. $f(2) < f(3)$

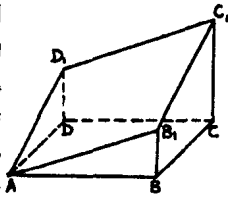
9. 若圆 $(x-1)^2 + (y+1)^2 = R^2$ 上有且仅有两个点到直线 $4x+3y=11$ 的距离等于 1, 则半径 R 的取值范围是 ()

- A. $R > 1$ B. $R < 3$ C. $1 < R < 3$ D. $R \neq 2$

10. 某体育彩票规定: 从 01 至 36 共 36 个号中抽出 7 个号为一注, 每注 2 元. 某人想从 01 至 10 中选 3 个连续的号, 从 11 至 20 中选 2 个连续的号, 从 21 至 30 中选 1 个号, 从 31 至 36 中选 1 个号组成一注, 则这人把这种特殊要求的号买全, 至少要花 ()

- A. 3360 元 B. 6720 元 C. 4320 元 D. 8640 元

11. 图中多面体是过正四棱柱的底面正方形 $ABCD$ 的点 A 作截面 $AB_1C_1D_1$ 而截得的, 且 $B_1B = D_1D$. 已知截面 $AB_1C_1D_1$ 与底面 $ABCD$ 成 30° 的二面角, $AB=1$, 则这个多面体的体积为 ()



- A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$
C. $\frac{\sqrt{6}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{6}$

12. (理) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)

的离心率 $e \in [\sqrt{2}, 2]$, 令双曲线两条渐近线构成的角中, 以实轴为角平分线的角为 θ , 则 θ 的取值范围是 ()

- A. $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$ B. $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$
C. $[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}]$ D. $[\frac{2\pi}{3}, \pi]$

(文) 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的离心率 $e \in [\sqrt{2}, 2]$, 则双曲线一条渐近线与实轴所

成锐角 θ 的取值范围是 ()

- A. $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ B. $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$
C. $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$ D. $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$

第 II 卷

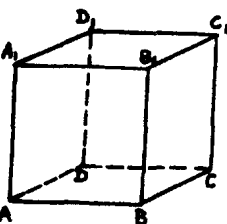
二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分. 把答案填在题中横线上.

13. 若 $(\sqrt{x} + \frac{2}{x})^n$ 展开式中的第 5 项为常数, 则 $n =$ _____.

14. 抛物线 $x = 2(y-1)^2 - 5$ 的准线方程是 _____.

15. 已知 $\lg(a+\beta) = \frac{3}{5}$, $\lg(\beta - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{3}$, 则 $\lg(a + \frac{\pi}{3})$ 的值是 _____.

16. 已知如图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, 过点 A 作 A_1 截面, 使正方体的 12 条棱所在直线与截面所成的角皆相等, 试写出满足这样条件的一个截面 _____.



(注: 只需任意写出一个.)

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 74 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (理) (本小题满分 12 分)

已知 $a > 0, a \neq 1, f(x) = \log_a(x+1), g(x) = \log_a x^2$, 求使 $f(x) - g(x) > \log_a 2$ 成立的自变量 x 的取值范围.

(文) 解关于 x 的不等式:

$$\log_a(x+1) - \log_a x^2 > \log_a 2 \quad (a > 0, a \neq 1).$$

18. (本小题满分 12 分)

已知: 复数 $z_1 = \cos \alpha + i \sin \alpha, z_2 = \cos \beta + i \sin \beta, z_1 + z_2 = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$.

求: $\lg(a+\beta)$ 的值.

19. (本小题满分 12 分)

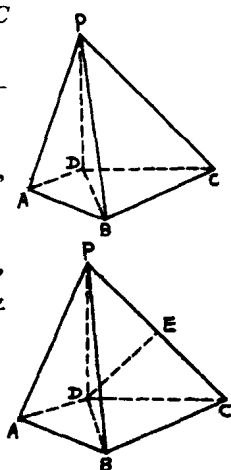
已知: 如图, $PD \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \perp DC$, $AD \parallel BC$, $PD:DC:BC=1:1:\sqrt{2}$.

(I) 求 PB 与平面 PDC 所成角的大小;

(II) 求二面角 $D-PB-C$ 的正切值;

(III)(理) 若 $AD=\frac{1}{2}BC$, 求证平面 $PAB \perp$ 平面 PBC .

(III)(文) 若 $AD=\frac{1}{2}BC$, E 为 PC 中点, 求证 $DE \parallel$ 平面 PAB .



20. (理) (本小题满分 12 分)

已知椭圆的两个焦点分别为 $F_1(0, -2\sqrt{2})$, $F_2(0, 2\sqrt{2})$, 离心率 $e=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

(I) 求椭圆方程.

(II) 一条不与坐标轴平行的直线 l 与椭圆交于不同的两点 M, N , 且线段 MN 中点的横坐标为 $-\frac{1}{2}$, 求直线 l 倾斜角的取值范围.

(文) (本小题满分 12 分)

把椭圆 $(x-1)^2 + \frac{(y-1)^2}{2} = 1$ 绕它的中心旋转 90° 后, 再沿 x 轴方向平行移动, 使变换后的椭圆截直线 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x$ 所得的线段长为 $\sqrt{3}$, 试写出变换后的椭圆方程.

21. (本小题满分 12 分)

用洗衣机洗衣时, 洗涤并甩干后进入漂洗阶段. 漂洗阶段由多次漂洗和甩干组成, 每次漂洗后可使残留物均匀分布, 每次甩干后 (包括洗涤后的甩干) 衣物中的残留水份 (含有残留物) 的重量相同, 设计时, 将漂洗的总用水量定为 a 千克, 漂洗并甩干的次数定为 3 次. 为使漂洗后衣物中的残留物最少, 怎样确定每次漂洗的用水量? 并写出你的数学依据.

注: 为了便于解决问题, 可参考以下各量的字母表示. 设每次甩干后衣物中的残留水份 (含有残留物) 的重量为 m , 洗涤并甩干后衣物中的残留物 (不含水份) 为 n_0 , 三次漂洗并甩干后衣物中的残留物 (不含水份) 分别为 n_1, n_2, n_3 , 三次用水量分别为 a_1, a_2, a_3 . (以上各量单位皆为千克)

22. (理) (本小题满分 14 分)

数列 $\{a_n\}$ 中, 前 n 项和 $S_n = an^2 + bn$ 其中 a, b 是常数, 且 $a > 0, a+b > 1, n \in \mathbb{N}$.

(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n , 并证明 $a_{n+1} > a_n > 1 (n \in \mathbb{N})$;

(II) 令 $c_n = \log_{a_n} a_{n+1}$, 试判断数列 $\{c_n\}$ 中任意相邻两项的大小.

(文) 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_1 = 1$, 前 n 项和为 S_n ; 数列 $\{b_n\}$ 是等比数列, 前 n 项和为 T_n . 若 $a_4 = b_2, S_6 = 2T_2 - 1, \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = 8$.

(I) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(II) 判断是否存在最小的自然数 n_0 , 使得大于 n_0 的一切自然数 n , 总有 $\frac{nb_n}{3a_n - 2} < \frac{1}{n}$ 成立, 并给出你的证明.



②北京市西城区2001年5月份高三模拟试卷

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的。每小题选出答案后，用铅笔在下表中将对应答案标号涂黑。

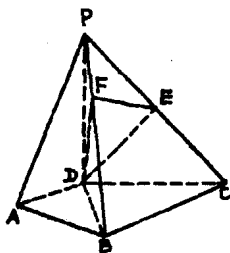
1. 已知集合 $P = \{(x, y) \mid |x| + |y| = 1\}$, $Q = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, 则()

A. $P \subset Q$ B. $P = Q$ C. $P \supset Q$ D. $P \cap Q = Q$

2. 设 α, β 均为第二象限角，且 $\sin \alpha > \sin \beta$, 则下列不等式成立的是()

A. $\tan \alpha > \tan \beta$ B. $\cot \alpha < \cot \beta$
C. $\cos \alpha > \cos \beta$ D. $\sec \alpha > \sec \beta$

3. 如下图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， EF 是异面直线 AC 和 A_1D 的公垂线，则 EF 和 BD_1 的关系是()



A. 相交不垂直 B. 相交垂直
C. 异面直线 D. 互相平行

4. 设 $a = \frac{1}{2} \cos 6^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 6^\circ$, $b = \frac{2 \tan 13^\circ}{1 + \tan^2 13^\circ}$, $c = \sqrt{\frac{1 - \cos 50^\circ}{2}}$, 则有()

A. $a > b > c$ B. $a < b < c$
C. $a < c < b$ D. $b < c < a$

5. (理) 已知圆的极坐标方程为 $\rho^2 + 2\rho(\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta) = 5$, 则此圆在直线 $\theta = 0$ 上截得的弦长为()

A. $\sqrt{6}$ B. $2\sqrt{6}$ C. $2\sqrt{3}$ D. 3

(文) 设圆 $x^2 + y^2 + 2x + 2\sqrt{3}y = 5$ 与 x 轴交于 A, B 两点，则 $|AB|$ 的长为()

A. $\sqrt{6}$ B. $2\sqrt{6}$ C. $2\sqrt{3}$ D. 3

6. 甲、乙、丙三个单位分别需要招聘工作人员2名、1名、1名，现从10名应聘人员中招聘4人到甲、乙、丙三个单位，那么不同的招聘方法共有()

A. 1260种 B. 2025种 C. 2520种 D. 5040种

7. 设 $f(x) = (1+x) + (1+x)^2 + \dots + (1+x)^n$, $f(x)$ 中 x^2 的系数为 T_n , 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n}{n^3 + 2n}$ 等于()

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{6}$ C. 1 D. 2

8. 直线 $x + \sqrt{3}y = 0$ 绕原点按顺时针方向旋转 30° 所得直线与圆 $(x-2)^2 + y^2 = 3$ 的位置关系是()

A. 直线与圆相切
B. 直线与圆相交但不过圆心
C. 直线与圆相离
D. 直线过圆心

9. 若 $x \in (1, 2)$ 时，不等式 $(x-1)^2 < \log_a x$ 恒成立，则 a 的取值范围是()

A. $(0, 1)$ B. $(1, 2)$
C. $(1, 2]$ D. $[1, 2]$

10. 某产品的总成本 y (万元) 与产量 x (台) 之间的函数关系式是 $y = 3000 + 20x - 0.1x^2$ ($0 < x < 240$, $x \in \mathbb{N}$), 若每台产品的售价为25万元，则生产者不亏本时(销售收入不小于总成本)的最低产量是()

A. 100台 B. 120台 C. 150台 D. 180台

11. 已知方程 $\frac{x^2}{|m|-1} + \frac{y^2}{2-m} = 1$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆，则 m 的取值范围是()

A. $m < 2$
B. $1 < m < 2$
C. $m < -1$ 或 $1 < m < 2$
D. $m < -1$ 或 $1 < m < \frac{3}{2}$

12. 对于已知直线 a , 如果直线 b 同时满足下列

三个条件：(1) 与 a 是异面直线；(2) 与 a 所成的角为定值 θ ；(3) 与 a 的距离为定值 d 。那么，这样的直线 b 有 ()

- A. 1 条 B. 2 条 C. 3 条 D. 无数条

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分，把答案填在题中横线上。

13. (理) 已在 $\alpha = \arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)$ ，则 $\sin \frac{\alpha}{2}$ 的值是_____。

(文) 已在 $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0\right)$ ，则 $\sin \frac{\alpha}{2}$ 的值是_____。

14. 过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点，且倾斜角为 $\frac{3\pi}{4}$ 的直线交抛物线于 P, Q 两点， O 是坐标原点，则 $\triangle OPQ$ 的面积等于_____。

15. 将一个圆形纸片沿其两个半径剪开，得到两个扇形，它们的圆心角之比为 1:2，再将它们当作圆锥侧面卷成两个圆锥，则这两个圆锥的体积之比是_____。

16. 定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足： $f(x+1) = -f(x)$ ，且在 $[-1, 0]$ 上是增函数，下面是关于 $f(x)$ 的判断：

- ① $f(x)$ 是周期函数；
- ② $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称；
- ③ $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是增函数；
- ④ $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上是减函数；
- ⑤ $f(2) = f(0)$

其中正确的判断是_____ (把你认为正确的判断都填上)。

三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 12 分)

已知由正数组成的等比数列 $\{a_n\}$ ，若前 $2n$ 项之和等于它前 $2n$ 项中的偶数项之和的 11 倍，第 3 项与第 4 项之和为第 2 项与第 4 项之积的 11 倍，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

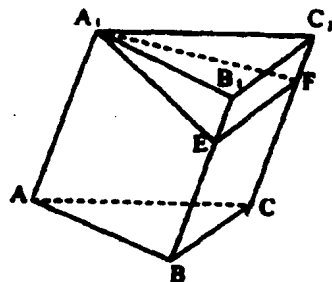
18. (本小题满分 12 分)

已知复数 $z_1 = x + ai$ ， $z_2 = x + bi$ ($b > a > 0$ ， $x > 0$) 的幅角主值分别为 α ， β ，求 $\lg(\beta - \alpha)$ 的最大值及对应的 x 的值。

19. (本小题满分 13 分)

如图，已知三棱柱 $A_1B_1C_1-ABC$ 的底面是边长为 2 的正三角形，侧棱 AA_1 与 AB ， AC 均成 45° 角，且 $A_1E \perp B_1B$ 于 E ， $A_1F \perp CC_1$ 于 F 。

- (I) 求证：平面 $A_1FE \perp$ 平面 B_1BCC_1 ；
- (II) 求点 A 到平面 B_1BCC_1 的距离；
- (III) 当 AA_1 多长时，点 A_1 到平面 ABC 与平面 B_1BCC_1 的距离相等？



20. (本小题满分 12 分)

某乡为提高当地群众的生活水平，由政府投资兴建了甲、乙两个企业，1997 年该乡从甲企业获得利润 320 万元，从乙企业获得利润 720 万元。以后每年上交的利润是：甲企业以 1.5 倍的速度递增，而乙企业则为上一年利润的 $\frac{2}{3}$ 。根据测算，该乡从两个企业获得的利润达到 2000 万元可以解决温饱问题，达到 8100 万元可以达到小康水平。

(1) 若以 1997 年为第一年，则该乡从上述两个企业获得利润最少的一年是哪一年，该年还需要筹集多少万元才能解决温饱问题？

(2) 试估算 2005 年底该乡能否达到小康水平？为什么？

21. (理) (本小题满分12分)

椭圆中心是坐标原点 O , 焦点在 x 轴上, 过椭圆左焦点 F 的直线交椭圆于 P, Q 两点, 且 $OP \perp OQ$. 求椭圆离心率 e 的取值范围.

(文) (本小题满分12分)

椭圆中心是坐标原点 O , 焦点在 x 轴上, $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 过椭圆左焦点 F 的直线交椭圆于 P, Q 两点, $|PQ| = \frac{20}{9}$ 且 $OP \perp OQ$, 求此椭圆的方程.

22. (本小题满分13分)

设 $f(x)$ 是定义在 $[-1, 1]$ 上的奇函数, $g(x)$ 的图象与 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 而当 $x \in [2, 3]$ 时, $g(x) = -x^2 + 4x + c$ (c 为常数)

(1) 求 $f(x)$ 的表达式;

(2) 对于任意 $x, x_2 \in [0, 1]$ 且 $x_1 \neq x_2$, 求证:
 $|f(x_2) - f(x_1)| < 2|x_2 - x_1|$;

(3) (理) 对于任意 $x_1, x_2 \in [0, 1]$ 且 $x_1 \neq x_2$, 求证: $|f(x_2) - f(x_1)| \leq 1$.



③北京市海淀区2001年5月份高三模拟试卷

第 I 卷

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M = \{x | x - a = 0\}$, $N = \{x | ax - 1 = 0\}$. 若 $M \cap N = M$, 则实数 a 等于()

- A. 1 B. -1
C. 1 或 -1 D. 1 或 -1 或 0

2. 二项式 $\left(2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 展开式中的常数项是()

- A. 20 B. -20 C. 160 D. -160

3. 已知命题甲：“ $x > 2$ ”、命题乙：“ $x \geq 2$ ”，那么命题甲是命题乙成立的()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 非充分非必要条件

4. (理) 极坐标平面内曲线 $\rho = 2\cos\theta$ 上的动点 P 与定点 $Q\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ 的最近距离等于()

- A. $\sqrt{2} - 1$ B. $\sqrt{5} - 1$
C. 1 D. $\sqrt{2}$

(文) 若 $\cos 2x = \frac{1}{2}$, 其中 $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, 则 x 的值是()

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{5\pi}{6}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{3}$

5. (理) 函数 $y = \sqrt{\arccos(2x-1)}$ 的值域是()

- A. $[0, \pi]$ B. $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
C. $[0, \sqrt{\pi}]$ D. $\left[0, \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right]$

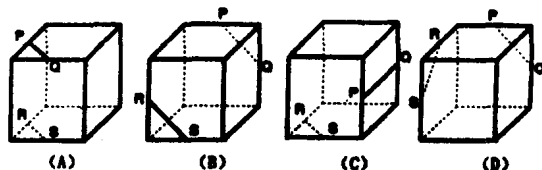
(文) 到定点的距离与到定直线的距离之比等于 $\log_2 3$ 的点的轨迹是()

- A. 圆 B. 椭圆
C. 双曲线 D. 抛物线

6. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_3 + a_{17} = 10$, 则 S_{19} 的值()

- A. 是 55 B. 是 95
C. 是 100 D. 不能确定

7. 如图, 点 P 、 Q 、 R 、 S 分别在正方体的四条棱上, 并且是所在棱的中点, 则直线 PQ 与 RS 是异面直线的一个图是()



8. 过定点 $P(0, 2)$ 作直线 l , 使 l 与曲线 $y^2 = 4(x-1)$ 有且仅有 1 个公共点, 这样的直线 l 共有()

- A. 1 条 B. 2 条 C. 3 条 D. 4 条

9. (理) 已知点 $P(x, y)$ 在经过 $A(3, 0)$ 、 $B(1, 1)$ 两点的直线上, 那么 $2^x + 4^y$ 的最小值是()

- A. 是 $2\sqrt{2}$ B. 是 $4\sqrt{2}$
C. 是 16 D. 不存在

(文) 已知点 $P(x, y)$ 在直线 $x + 2y = 3$ 上, 那么 $2^x + 4^y$ 的最小值()

- A. 是 $2\sqrt{2}$ B. 是 $4\sqrt{2}$
C. 是 16 D. 不存在

10. (理) 函数 $y = \log_2 x$ 与 $y = \log_{\frac{1}{2}}(4x)$ 的图象()

- A. 关于直线 $x=1$ 对称
B. 关于直线 $y=x$ 对称
C. 关于直线 $y=-1$ 对称
D. 关于直线 $y=1$ 对称

(文) 函数 $y = \log_2 x$ 与 $y = -2 + \log_{\frac{1}{2}} x$ 的图象()

- A. 关于直线 $x=1$ 对称
B. 关于直线 $y=x$ 对称
C. 关于直线 $y=-1$ 对称
D. 关于直线 $y=1$ 对称

11. 若 l 是过椭圆一个焦点且与长轴不重合的一条直线, 则此椭圆与 l 垂直且被 l 平分的弦()

- A. 有且只有 1 条 B. 有且只有 2 条
C. 有 3 条 D. 不存在

12. 某商场开展促销抽奖活动, 摇奖器摇出的一组中奖号码是 8、2、5、3、7、1, 参加抽奖的每位顾客从 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 这十个号码中任意抽出六个组成一组, 如果顾客抽出的六个号码中至少有 5 个与摇奖器摇出的号码相同 (不计顺序) 就可以得奖. 一位顾客可能抽出的不同号码组共有 m 组, 其中可以中奖的号码组共有 n 组. 则 $\frac{n}{m}$ 的值为

()

- A. $\frac{1}{7}$ B. $\frac{1}{30}$ C. $\frac{4}{35}$ D. $\frac{5}{42}$

第 II 卷

二、填空题: 本大题满分 16 分, 每小题 4 分, 各题只要求直接写出结果.

13. 已知 $\operatorname{tg} \alpha = 2$, $\operatorname{tg} (\alpha - \beta) = -\frac{2}{5}$, 那么 $\operatorname{tg} \beta =$ _____.

14. 不等式 $3^{x^2} < \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$ 的解集为 _____.

15. (理) 函数 $y=f(x)$ 的图象与 $y=2^x$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称, 则函数 $y=f(4x-x^2)$ 的递增区间是 _____.

(文) 函数 $y=\log_2(4x-x^2)$ 的递增区间是 _____.

16. 一个三棱锥的三个侧面中有两个是等腰直角三角形, 另一个是边长为 1 的正三角形, 这样的三棱锥体积为 _____ (写出一个可能值).

三、解答题: 本大题满分 74 分

17. (本小题满分 12 分)

已知复数 z 满足 $|z|=\sqrt{2}$, z^2 的虚部为 2.

(I) 求 $\arg z$, 并写出 z 的三角式;

(II) 设 $z, z^2, z-z^2$ 在复平面上的对应点分别为 A, B, C , 求 $\triangle ABC$ 的面积.

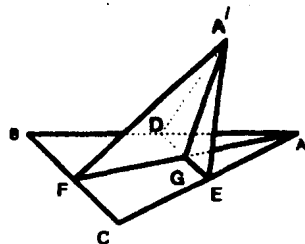
18. (本小题满分 12 分)

已知边长为 a 的正三角形 ABC 的中线 AF 与中位线 DE 相交于 G (如图), 将此三角形沿 DE 折成二面角 $A'-DE-B$.

(I) 求证: 平面 $A'GF \perp$ 平面 $BCED$;

(II) (理) 当二面角 $A'-DE-B$ 为多大时, 异面直线 $A'E$ 与 BD 互相垂直? 证明你的结论.

(I) (文) 当二面角 $A'-DE-B$ 的余弦值为多少时, 异面直线 $A'E$ 与 BD 互相垂直? 证明你的结论.



19. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, 前 n 项和为 S_n , 对于任意 $n \geq 2$, $3S_n-4, a_n, 2-\frac{3S_{n-1}}{2}$ 总成等差数列.

(I) 求 a_2, a_3, a_4 的值;

(II) 求通项 a_n ;

(III) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

20. (本小题满分 12 分)

某港口水的深度 y (米) 是时间 t ($0 \leq t \leq 24$, 单位: 时) 的函数, 记作 $y=f(t)$, 下面是某日水深的

t (时)	0	3	6	9	12	15	18	21	24
y (米)	10.0	13.0	9.9	7.0	10.0	13.0	10.1	7.0	10.0

经长期观察, $y=f(t)$ 的曲线可以近似地看成函数 $y=Asin\omega t+b$ 的图象.

(I) (理) 试根据以上数据, 求出函数 $y=f(t)$ 的近似表达式;

(I) (文) 试根据以上数据, 求出函数 $y=Asin\omega t+b$ 的最小正周期、振幅和表达式;

(II) 一般情况下, 船舶航行时, 船底离海底的距离为 5 米或 5 米以上时认为是安全的 (船舶停靠时, 船底只需不碰海底即可). 某船吃水深度 (船底离水面的距离) 为 6.5 米. 如果该船希望在同一天内安全进出港, 请问, 它至多能在港内停留多长时间 (忽略进出港所需的时间)?

21. (理) (本小题满分 12 分)

已知函数 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的周期函数, 周期 $T=5$, 函数 $y=f(x)$, ($-1 \leq x \leq 1$) 是奇函数. 又知 $y=f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是一次函数, 在 $[1, 4]$ 上是二次函数, 且在 $x=2$ 时函数取得最小值, 最小值为 -5 .

(I) 证明: $f(1)+f(4)=0$;

(II) 试求 $y=f(x)$, $x \in [1, 4]$ 的解析式;

(III) 试求 $y=f(x)$ 在 $[4, 9]$ 上的解析式.

(文) (本小题满分 12 分)

已知函数 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的周期函数, 周期 $T=5$, 函数 $y=f(x)$ ($-1 \leq x \leq 1$) 是奇函数, 且在 $[1, 4]$ 上是二次函数, 在 $x=2$ 时函数取得最小值 -5 .

(I) 证明: $f(1)+f(4)=0$

(II) 试求 $y=f(x)$, $x \in [1, 4]$ 的解析式.

22. (本小题满分 14 分)

已知圆 $C: (x+4)^2+y^2=4$, 圆 D 的圆心 D 在 y 轴上且与圆 C 外切, 圆 D 与 y 轴交于 A, B 两点, 点 P 为 $(-3, 0)$.

(I) 若点 D 坐标为 $(0, 3)$, 求 $\angle APB$ 的正切值;

(II) 当点 D 在 y 轴上运动时, 求 $\angle APB$ 的最大值;

(III) (理) 在 x 轴上是否存在定点 Q , 当圆 D 在 y 轴上运动时, $\angle AQB$ 是定值? 如果存在, 求出点 Q 坐标; 如果不存在, 说明理由.



④ 北京东城区 2001 年 6 月份高三第三次模拟试卷

参考公式：

三角函数的和差化积公式

$$\sin\theta + \sin\varphi = 2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}$$

$$\sin\theta - \sin\varphi = 2\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}$$

$$\cos\theta + \cos\varphi = 2\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}$$

$$\cos\theta - \cos\varphi = -2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}$$

正棱台、圆台的侧面积公式

$$S_{\text{侧}} = \frac{1}{2} (c' + c) l$$

其中 c' 、 c 分别表示上、下底面周长，

l 表示斜高或母线长

台体的体积公式：

$$V_{\text{台}} = \frac{1}{3} (S' + \sqrt{S'S} + S) h$$

其中 S' 、 S 分别表示上、下底面积， h 表示高。

第 I 卷

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 α 为锐角， $\text{ctg}\alpha = \frac{60}{11}$ ，则 $\cos\alpha$ 的值等于 ()

- A. $\frac{60}{61}$ B. $\frac{13}{61}$ C. $\frac{13}{60}$ D. $\frac{11}{61}$

2. 已知点 $(a, -1)$ 在函数 $y = \log_2 x$ 的图象上，则函数 $y = x^a$ 的定义域为 ()

- A. $\{x|x \geq 0\}$ B. $\{x|x > 0\}$
C. $\{x|x < 0 \text{ 或 } x > 0\}$ D. $\{x|x \in \mathbb{R}\}$

3. 若圆锥的轴截面为等边三角形，则它的侧面展开图扇形的圆心角为 ()

- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. π D. $\frac{3\pi}{2}$

4. 从原点向圆 $x^2 + y^2 - 6x + \frac{27}{4} = 0$ 作两条切线，则两条切线间圆的劣弧长为 ()

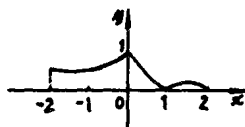
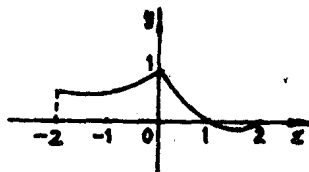
A. $\frac{2\pi}{3}$

B. π

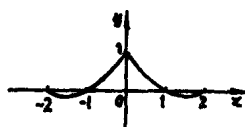
C. $\frac{3\pi}{2}$

D. $\frac{4\pi}{3}$

5. 已知函数 $y = f(x)$ 的图象如下图所示，则函数 $y = f(|x|)$ 的图象在下列四图中只可能是 ()



A



B



C



D

6. 在空间四边形的四条边中，互相垂直的最多有 ()

- A. 2 对 B. 3 对 C. 4 对 D. 6 对

7. 某邮局只有 0.60 元，0.80 元，1.10 元的三种邮票，现有邮资为 7.50 元的邮件一件，为使粘贴邮票的张数最少，且资费恰为 7.50 元，则最少要购买邮票 ()

- A. 7 张 B. 8 张 C. 9 张 D. 10 张

8. (理科) 圆 $\rho = 2\cos\theta$ 的圆心到直线 $\rho\cos(\theta - \frac{\pi}{3}) = 1$ 的距离是 ()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

(文科) 直线 $y = a(x+3) + 2$ 与直线 $y = -3x + 3$ 的交点位于第一象限，则 a 的取值范围是 ()

- A. $(-3, \frac{1}{3})$ B. $(-\infty, -3)$
C. $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ D. $(-\frac{1}{2}, +\infty)$

9. 圆台轴截面的两条对角线互相垂直, 上下两底面半径之比为 $3:4$, 圆台的侧面积是 $70\sqrt{2}\pi\text{cm}^2$, 则圆台的侧面母线长为()

- A. 10 cm B. $10\sqrt{2}\text{ cm}$
C. 8 cm D. $8\sqrt{2}\text{ cm}$

10. 现有每张上分别写有 1、2、3、4、5、6 的六张卡片, 如果可将 6 反过来看作 9, 用它们组成没有重复数字的两位数, 一共可以组成()

- A. 30 个 B. 40 个 C. 42 个 D. 60 个

11. 设 F_1 和 F_2 为双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的两个焦点, 点 P 在双曲线上且满足 $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$, 则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积是()

- A. 1 B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C. 2 D. $\sqrt{5}$

12. 若奇函数 $y=f(x)$ ($x \neq 0$) 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) = x-1$, 则不等式 $f(x-1) < 0$ 的解集是()

- A. $\{x|x < 0 \text{ 或 } 1 < x < 2\}$
B. $\{x|1 < x < 2\}$
C. $\{x|-1 < x < 0\}$
D. $\{x|x < -2 \text{ 或 } -1 < x < 0\}$

第 II 卷

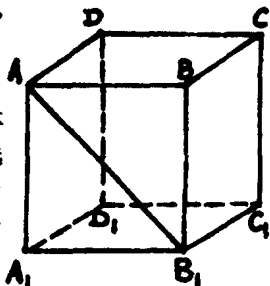
二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分. 把答案填在题中横线上.

13. 抛物线的顶点在坐标原点, 焦点为双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的左焦点, 则该抛物线方程为_____

14. $(1+x)^n$ 的展开式中, 某一项的系数为 7, 则展开式中第三项的系数是_____.

15. 等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = -5$, 它的前 11 项中的算术平均数为 5, 若从前 11 项中抽出 1 项, 余下 10 项的算术平均数还是 5, 则抽出的是第_____项.

16. 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 选出两条棱和两条面的对角线, 使这四条线段所在的直线两两都是异面直线.



如果我们先选定一条面的对角线 AB_1 , 那么另外三条线段可以是_____ (只需写出一种情况即可).

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 74 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

已知: $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\alpha = -\frac{4\sqrt{3}}{5}$, $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$.

求: $\cos\alpha$ 的值.

18. (本小题满分 12 分)

已知复数 z_1 和 z_2 满足 $|z_1| = \sqrt{2}|z_2|$, $\arg \frac{z_1}{z_2} = \frac{\pi}{4}$, $|z_1 - z_2| = 2$. z_1 和 z_2 在复平面内对应的点分别为 A 和 B , O 为坐标系原点, 求 $\triangle AOB$ 的面积.

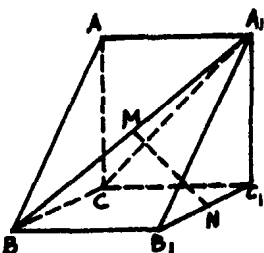
19. (本小题满分12分)

已知:如图,直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AC \perp BC$, $AC=BC=CC_1$, M 、 N 分别为 A_1B 、 B_1C_1 的中点.

(I) 求证: $MN \parallel$ 平面 ACC_1A_1 ;

(II) 求证: $MN \perp$ 平面 A_1BC ;

(III) 求二面角 $A-A_1B-C$ 的大小.



21. (本小题满分12分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且对任意自然数 n , 总有 $S_n = p(a_n - 1)$ (p 是常数且 $p \neq 0$, $p \neq 1$). 数列 $\{b_n\}$ 中, $b_n = 2n + q$ (q 是常数).

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 若 $a_1 = b_1$, $a_2 < b_2$, 求 p 的取值范围.

20. (本小题满分12分)

某种射线在通过平板玻璃时,每经过1 mm 的厚度其强度衰减为原来的 $\alpha\%$, 试验发现,将10块1 mm 厚的平板玻璃叠加,该射线通过这10块玻璃后的射线强度与通过一块11 mm 厚的平板玻璃后的射线强度相同,这种现象说明每两块玻璃之间的缝隙也有衰减.为不低于通过20 mm 厚的一块平板玻璃后的射线强度,至少需要多少块1 mm 厚的平板玻璃叠加?

(注:假设每两块平板玻璃之间的缝隙相同,可设每通过一个缝隙后射线强度衰减为原来的 $x\%$.)

22. (本小题满分14分)

已知椭圆 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$ 与射线 $y = \sqrt{2}x$ ($x \geq 0$) 交于点 A ,过 A 作倾斜角互补的两条直线,它们与椭圆的另一个交点分别为点 B 和点 C .

(I) 求证:直线 BC 的斜率为定值,并求出这个定值;

(II) 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.