现代应用数学丛书

数值计算法

〔日〕森口繁一　高田　胜　著

上海科学技术

现代应用数学丛书

数值計算法

〔日〕森口繁一 高田 勝 著
閻昌齢 譯
張 鴻 游兆永 校

上海科学技术出版社

內容提要

本书是日本岩波书店出版的現代应用数学丛书之一的中譯本。全书共分7章，計方程的解法，差分与插补，数値积分·数値微分，函数逼近，常微分方程、偏微分方程和特征値問題的数値解法。适宜于初学者以及从事于实际数値計算工作的数学工作者或工程师参考，也可供高等院校作为教学参考书。

現代应用数学丛书

数値計算法

原书名 数値計算法

原著者 〔日〕森口繁一 高田勝

原出版者 岩波书店 1958

譯者 閻昌齡

校者 張鴻 游兆永

*

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路450号)

上海市书刊出版业营业許可証出093号

新华书店上海发行所发行 各地新华书店經售

商务印书館上海厂印刷

*

开本850×1168 1/32 印張6 2/32 字数141,000

1963年3月第1版 1963年3月第1次印刷

印数 1–6,000

統一书号：13119·501

定价：(十四) 1.05元

出版説明

这一套书是根据日本岩波书店出版的"現代应用数学讲座"翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并，整理成42种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其內容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要內容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理，为了尽可能地减少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，并对全书內容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注释和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

现代应用数学丛书

书名	原作者	譯者
代数学*	弥永昌吉等	熊全淹
几何学*	矢野健太郎	孙澤瀛
复变函数	功力金二郎	刘书琴
集合·拓扑·测度*	河田敬义	賴英华
泛函分析*	吉田耕作	程其襄
广义函数*	岩村联	楊永芳
常微分方程*	福原滿洲雄	張庆芳
偏微分方程*	南云道夫	錢端壮
特殊函数*	小谷正雄等	錢端壮
差分方程*	福田武雄	穆鴻基
富里哀变换与拉普拉斯变换*	河田龙夫	錢端壮
变分法及其应用*	加藤敏夫	周怀生
李群論*	岩堀长庆	孙澤瀛
随机过程*	伊藤清	刘璋温
回轉群与对称群的应用*	山内恭彦等	張质賢
結晶統計与代数*	伏見康治	孙澤瀛
偏微分方程的应用	犬井鉄郎等	楊永芳
微分方程的近似解法	加藤敏夫等	王占瀛
数値計算法	森口繁一等	閻昌齡
量子力学中的数学方法*	朝永振一郎	周民强
工程力学系統*	近藤一夫等	刘亦珩
非綫性振动論*	古屋茂	呂紹明
力学系与映射理論*	岩田义一	孙澤瀛
平面彈性論*	森口繁一	刘亦珩
有限变位彈性論变形几何学*	山本善之 近藤一夫	刘亦珩
塑性論*	鷲津文一郎	刘亦珩
粘性流体理論*	谷一郎	刘亦珩
可压縮流体理論*	河村龙馬	刘亦珩
网絡理論	喜安善市等	賈弃營
自动控制理論*	喜安善市等	翟立林
回路拓扑学	近藤一夫	張鳴鏞
信息論*	喜安善市等	李文清
推断統計理論	北川敏男	李賢平
統計分析*	森口繁一	刘璋温
試驗設計法	增山元三郎	刘璋温
群体遺傳学的数学理論*	木村資生	刘祖洞
博奕論	官澤光一	張鍼春
綫性規划	森口繁一	刘源張
經济理論中的数学方法	安井琢磨等	談祥柏
随机过程的应用*	河田龙夫	刘璋温
計算技术	高桥秀俊	姚晋
穿孔卡計算机	森口繁一	刘源張

注：有 * 者已在1962年出版。

序

数值計算法，又有数值分析、实用分析等等的名称。这門学科虽然有着与其說是科学无宁說是技术更为恰当的一面，但因为最近以来不論在理論方面还是在实际方面都取得了显著的发展，因此，事实上已經成为(数学的)一个卓越的分支。

現代并用着从笔算一直到台式計算机的"手工計算"和从穿孔卡計算机一直到快速电子計算机的"机械計算"。由于各种計算手段按照它在性能上和經济上的不同特征各有其适用范圍，因此这种状况今后还会继續存在下去。不过，总的說来，在今后的一段时期內机械計算所占的比重将要有急驟的增长，而且在手工計算方面，計算机所占的比重无疑也还要进一步增长。面对着这样的形势，出現数值計算法的飞跃发展是可以預期的。

本书的目的在于把数值計算中常用的方法以及这些方法中的难点和处理法作一个概括的介紹。内容并不全面，而是尽可能地作了精选，并力求使它容易看懂。例題是考虑到使用10位 ×10位＝20 位左右的台式計算机而选取的，但这些例題的精神实质，大多数对于位数更少或更多的情形，乃至对于快速电子計算机也是适用的。这一类的学习只凭看书是不行的，自己編造类似的例題，并利用附近可以利用到的計算工具实际练习着計算是最重要的。这是作者們实行过的学习方法，并且愿意恳切地把它推荐給讀者。

希望本书能有助于理工方面以及其他方面的研究工作者以更高的效率进行在他們工作中所必要的計算。同时也非常希望爱好数学的广大讀者能够由于发生兴趣而进入这一分支，努力于計算

的实施并进一步发展有关的理論和方法，如果本书能成为这样的推动力，作者是很欣慰的。

第一章到第四章由森口执笔，第五章以后是高田写的而由森口作了修改。此外，在計算以及其他方面得到了伊东繁的协助，志此以表示謝意。

森　口
高　田　1957年11月22日

目　录

第1章 方程的解法

§1 綫性計算(扫除法)

联立1次方程(例如后面的(1.7))的解法是自古以来就被研究着的問題。作为理論上的解法有著名的 Cramer 公式。这公式把解表示成分数,以系数的行列式为分母,而以方程的右边代换相应的列后所得的行列式为分子。但是,在 n 元的情形应用这一公式,假定要按定义計算其中的 $n+1$ 个行列式的值,因为計算每个行列式的 $n!$ 个項的每一項都需要作 $n-1$ 次乘法,因此总共就需要作 $n!(n-1)(n+1)$ 次乘法。(此外还有加减法和除法,但比之乘法来說,它們所費的精力时間可以认为是微不足道的。)例如在 $n=10$ 的情形大約需要作 3.6×10^8 次乘法。如果用台式計算机,假定每小时能作100次乘法,按每天5小时,每年200天,即按每年工作1000小时計算,一个人一年可以作 10^5 次乘法。按照这样的速度作 3.6×10^8 次乘法就需要3600年的时間。显然,这是完全沒有实际意义的。

基于上述的理由,作为联立1次方程的解法,必需考虑另外的方法。过去所用的数値解法大体上可分为消去法和迭代法两类。本章在§1, §2中討論消去法,而在§3中討論迭代法。在§4中我們将叙述一个兼有上述两种方法特征的新的方法。

消去法是由給定的方程組出发,有时将方程乘以常数,或者将两个以上的方程相加相減,逐步消去未知数,最后导出只含一个未知数的方程。这些中間計算相当于把以系数(和"右边")为分量的向量乘以常数,或者将几个向量相加減的运算。因此可以稍为抽象地叙述如下:

用常数 c 乘向量$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$而作向量$(ca_1, ca_2, \cdots, ca_n)$，或由向量$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$减去向量$(b_1, b_2, \cdots, b_n)$的 k 倍而作向量$(a_1-kb_1, a_2-kb_2, \cdots, a_n-kb_n)$的运算都是綫性(linear)运算。

例如，以矩陣

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

的各行为单位，进行上述的綫性运算，就可以把它化成如下的形状：

$$\begin{pmatrix} 1 & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} & a'_{15} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} & a'_{25} \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} & a'_{35} \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

为此，首先用 a_{11} 除(1.1)的第1行(或者也就是用$1/a_{11}$乘)得到

$$a'_{1j}=a_{1j}/a_{11} \quad (j=2, \cdots, 5), \tag{1.3}$$

其次，对于其他各行計算

$$a'_{ij}=a_{ij}-\frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}=a_{ij}-a_{i1}a'_{1j} \quad (i=2, 3; j=2, \cdots, 5) \tag{1.4}$$

就可以了。这样的計算叫做以元素 a_{11} 为主元素(pivot)的扫除法(sweep-out)❶。

一般来說，对于 m 行 n 列$(m<n)$的矩陣(a_{ij})，以 $a_{i^*j^*}$ 为主元素的扫除法就是首先关于第 i^* 行計算

$$a'_{i^*j}=a_{i^*j}/a_{i^*j^*} \quad (j=1, \cdots, n), \tag{1.5}$$

然后关于其他各行計算

$$a'_{ij}=a_{ij}-\frac{a_{ij^*}a_{i^*j}}{a_{i^*j^*}}=a_{ij}-a_{ij^*}a'_{i^*j}\text{❷} \quad (i\neq i^*, j=1, \cdots, n). \tag{1.6}$$

---

❶ 这方法在我国的文献中通常称为 Gauss 方法。——譯者注

❷ 关于用穿孔卡計算机进行这种計算的問題，請参看本丛书中森口著《穿孔卡計算机》§11.

这样就得到 $a'_{i^*j^*}=1$, $a'_{ij^*}=0\,(i\neq i^*)$，因此所得矩陣 (a'_{ij}) 的第 j^* 列成为单位向量。

任何元素只要不等于零都可以取作主元素，按照不同的情况可以有种种的取法。在联立一次方程的解法中，通常由左上角开始逐漸向右下角移动，最后到达第 m 行第 m 列为止。这样，右面就出现了 m 阶的单位矩陣。(在以 $a_{i^*j^*}$ 为主元素的扫除法中，第 i^* 行的元素为 0 的列是不变的，因此，在以上的計算中，一旦成为单位向量的列，以后就不再变化，直到最后仍旧保持为单位向量。)

在綫性規划(参看本丛书森口、宮下著《綫性規划》)的单純形計算法中，把对应于取作基底的变量的列作为第 j^* 列，对应于要消去的变量的行作为第 i^* 行，而以 $a_{i^*j^*}$ 为主元素。并且由(1.5)計算下一个单純形表的"新出現的行"，而由(1.6)計算其他的各行。

例 1 解联立方程：

$$\left.\begin{aligned}2x+3y+4z&=6,\\3x+5y+2z&=5,\\4x+3y+30z&=32.\end{aligned}\right\}\tag{1.7}$$

按照表 1.1 計算，得到解 $x=-13$, $y=8$, $z=2$.

[注 1] 表 1.1 最上一行的 $x, y, z=$ 可以看作是由(1.7)的三个方程提出来的共同因素。右边的"1"可以看作是和表中的 6 或 5 相乘的对象。行(1)表示 2 乘以 x, 3 乘以 y, 4 乘以 z 而后相加等于 6 乘以 1. 对于以下的各行，也可以作同样的解釋。特别是，行(10)表示 $1\cdot x+0\cdot y+0\cdot z=-13\cdot 1$, 即 $x=-13$, 类似地，行(11)表示 $y=8$, 行(12)表示 $z=2$.

[注 2] 通常在初等数学中讲授的消去法，如果用表的形式表示，则以表 1.2 較为恰当。和这种方法比較，表 1.1 具有沒有"逆行部分"的特征。消去法終了时一下就得到了解的全部。从乘法的次数来看，两者大致相同，約有 n^3 次左右，但計算的方案可說表 1.1 比較簡单，因为它是步驟相同的程序的重复。基于这样的理由，在机械計算中有更多地使用表 1.1 中的方法的傾向。

一般說来，如果向量 $(a_1, \cdots, a_n)$ 滿足一次关系式

表1.1 联立方程解法(扫除法)

行	x	y	z	= 1	説明
(1)	2	3	4	6	表示(1.7)
(2)	3	5	2	5	
(3)	4	3	30	32	
(4)	1	1.5	2	3	(1)/2
(5)	0	0.5	−4	−4	(2)−(4)×3
(6)	0	−3	22	20	(3)−(4)×4
(7)	1	0	14	15	(4)−(8)×1.5
(8)	0	1	−8	−8	(5)/0.5
(9)	0	0	−2	−4	(6)+(8)×3
(10)	1	0	0	−13	(7)−(12)×14
(11)	0	1	0	8	(8)+(12)×8
(12)	0	0	1	2	(9)/(−2)

表1.2 通常的消去法

行	x	y	z	= 1	説明	
(1)	2	3	4	6	表示(1.7)	
(2)	3	5	2	5		
(3)	4	3	30	32		
(4)	1	1.5	2	3	(1)/2	前进部分
(5)	0	0.5	−4	−4	(2)−(4)×3	
(6)	0	−3	22	20	(3)−(4)×4	
(7)	0	1	−8	−8	(5)/0.5	
(8)	0	0	−2	−4	(6)+(~~8~~ 7)×3	
(9)	0	0	1	2	8 ~~(9)~~/(−2)	
(10)	0	1	0	8	(7)+(9)×8	逆行部分
(11)	1	1.5	0	−1	(4)−(9)×2	
(12)	1	0	0	−13	(11)−(10)×1.5	

$$a_1\lambda_1+\cdots+a_n\lambda_n=0, \tag{1.8}$$

那么,用 c 乘后所得的向量 $(ca_1, \cdots, ca_n)$ 也满足同样的关系式

$$(ca_1)\lambda_1+\cdots+(ca_n)\lambda_n=0. \tag{1.9}$$

如果还有另一向量 $(b_1, \cdots, b_n)$ 也满足同一关系式

$$b_1\lambda_1+\cdots+b_n\lambda_n=0, \tag{1.10}$$

那么, $(a_1-kb_1, \cdots, a_n-kb_n)$ 也满足同一关系式

$$(a_1-kb_1)\lambda_1+\cdots+(a_n-kb_n)\lambda_n=0. \tag{1.11}$$

因此,形如(1.8)的关系式在綫性运算的过程中經常保持不变。由此导出如下的定理:

定理 由矩陣 (a_{ij}) 反复使用扫除法得到矩陣 (b_{ij}) 时, 如果原来的矩陣的列之間有如下的一次关系成立:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}\lambda_1+\cdots+\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\lambda_n=0, \tag{1.12}$$

那么,关于矩陣 (b_{ij}) 也有同样的关系式成立:

$$\begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix}\lambda_1+\cdots+\begin{pmatrix} b_{1n} \\ \vdots \\ b_{mn} \end{pmatrix}\lambda_n=0. \tag{1.13}$$

例 2 对于表 1.1 开首的矩陣 (行(1), (2), (3)的部分), 下列关系式成立:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}x+\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}y+\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 30 \end{pmatrix}z=\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 32 \end{pmatrix}.$$

对于最后的矩陣,也应該有同样的关系式成立:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}x+\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}y+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}z=\begin{pmatrix} -13 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

換句話說, 如果 x, y, z 是(1.7)的解, 那就必需是 $x=-13$, $y=8$, $z=2$. 这样,在最后的矩陣中得到的就是解。

例 3 在表 1.1 开首的矩陣的右边加上单位矩陣,再在它的右边加上"总

計"列，然后如对表 1.1 那样进行(扫除法)計算就得到如下的表 1.3.

表 1.3 联立一次方程的解及其逆矩陣的計算

行	x	y	z	1	C_1	C_2	C_3	总計	說明
(1)	2	3	4	6	1	0	0	16	(1.7)，单位矩陣，总計
(2)	3	5	2	5	0	1	0	16	
(3)	4	3	30	32	0	0	1	70	
(4)	1	1.5	2	3	0.5	0	0	8	(1)/2
(5)	0	0.5	−4	−4	−1.5	1	0	−8	(2)−(4)×3
(6)	0	−3	22	20	−2	0	1	28	(3)−(4)×4
(7)	1	0	14	15	5	−3	0	32	(4)−(8)×1.5
(8)	0	1	−8	−8	−3	2	0	−16	(5)/0.5
(9)	0	0	−2	−4	−11	6	1	−10	(6)+(8)×3
(10)	1	0	0	−13	−72	39	7	−38	(7)−(12)×14
(11)	0	1	0	8	41	−22	−4	24	(8)+(12)×8
(12)	0	0	1	2	5.5	−3	−0.5	5	(9)/(−2)

在这种情形，如果在开首的矩陣中

$$\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}3\\5\\3\end{pmatrix}y+\begin{pmatrix}4\\2\\30\end{pmatrix}z=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}u+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}v+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}w$$

成立，那么在最后的矩陣中

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}y+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}z=\begin{pmatrix}-72\\41\\5.5\end{pmatrix}u+\begin{pmatrix}39\\-22\\-3\end{pmatrix}v+\begin{pmatrix}7\\-4\\-0.5\end{pmatrix}w$$

也必需成立。換句話說，如果

$$\begin{pmatrix}2&3&4\\3&5&2\\4&3&30\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix},$$

那么

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-72&39&7\\41&-22&-4\\5.5&-3&-0.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}.$$

而这就表示

$$\begin{pmatrix} -72 & 39 & 7 \\ 41 & -22 & -4 \\ 5.5 & -3 & -0.5 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 30 \end{pmatrix}^{-1}.$$

这样，在最后矩陣的 C_1, C_2, C_3 部分就得到原来“左边”的矩陣的逆矩陣。

此外,对于总計列,在开首的矩陣中下列关系式成立:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 30 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 32 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ 70 \end{pmatrix},$$

因此，在以下的每一行中，左面的元素之和必需等于总計列的对应元素。例如,在行(10)中

$$1+0+0-13-72+39+7=-38$$

应当成立。这一事实有助于在計算过程中作驗算。

[注1] 一般来說，如果在开首的矩陣中有 (A, B, I) 的部分，(A 是方陣，B 是任意矩陣，I 是单位矩陣)，在反复实行扫除法計算的过程中，变成了 (I, D, C) 的形状，那么，C 是 A 的逆矩陣而 D 等于 $A^{-1}B$.

[注2] 在作綫性运算时希望一定要如上面那样加入“和的驗算 (sum check)”，因为在发生了錯誤时，能及早发現糾正是很重要的。

[注3] 上述的定理在綫性規划中单純形表的利用上也可以便利地应用(参看森口著:綫性規划入門，日本科技联，1957，§10)。

以上說明的扫除法的計算程序可以归納成如下的流动图(flowchart):

$\boxed{(a_{ij}^{(0)})}$ 給定的(m行n列的)矩陣

$\downarrow$ (以 $a_{11}^{(0)}$ 为主元素的扫除法) $\begin{cases} a_{1j}^{(1)}=a_{1j}^{(0)}/a_{11}^{(0)}, \\ a_{ij}^{(1)}=a_{ij}^{(0)}-a_{i1}^{(0)}a_{1j}^{(1)} \quad (i\neq 1). \end{cases}$

$\boxed{(a_{ij}^{(1)})}$

$\downarrow$ (以 $a_{22}^{(1)}$ 为主元素的扫除法) $\begin{cases} a_{2j}^{(2)}=a_{2j}^{(1)}/a_{22}^{(1)}, \\ a_{ij}^{(2)}=a_{ij}^{(1)}-a_{i2}^{(1)}a_{2j}^{(2)} \quad (i\neq 2). \end{cases}$

$\boxed{(a_{ij}^{(2)})}$

$\downarrow$

$\vdots$

一般地 $\begin{cases} a_{kj}^{(k)}=a_{kj}^{(k-1)}/a_{kk}^{(k-1)}, \\ a_{ij}^{(k)}=a_{ij}^{(k-1)}-a_{ik}^{(k-1)}a_{kj}^{(k)} \quad (i\neq k) \end{cases}$

$(k=1, 2, 3, \cdots, m)$.

$\boxed{(a_{ij}^{(m-1)})}$

$\downarrow$ (以 $a_{mm}^{(m-1)}$ 为主元素的扫除法) $\begin{cases} a_{mj}^{(m)}=a_{mj}^{(m-1)}/a_{mm}^{(m-1)}, \\ a_{ij}^{(m)}=a_{ij}^{(m-1)}-a_{im}^{(m-1)}a_{mj}^{(m)} \quad (i\neq m). \end{cases}$

$\boxed{(a_{ij}^{(m)})}$ $a_{ij}^{(m)}=\delta_{ij}(i, j=1, \cdots, m)$的矩陣。

其中假定了每一个主元素 $a_{kk}^{(k-1)}(k=1, 2, \cdots, m)$ 都不等于0.

此外，系数矩陣 $(a_{ij}^{(0)}; i, j=1, \cdots, m)$ 的行列式的值，可以表示成在計算过程中使用的一切主元素的乘积，即

$$\begin{vmatrix} a_{11}^{(0)} \cdots a_{1m}^{(0)} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}^{(0)} \cdots a_{mm}^{(0)} \end{vmatrix} = a_{11}^{(0)}a_{22}^{(1)}\cdots a_{mm}^{(m-1)}. \tag{1.14}$$

証明 对左边的行列式应用上述的扫除法，一般地在第k次的扫除法中，用 $a_{kk}^{(k-1)}$ 除第k行时，行列式的值成为 $1/a_{kk}^{(k-1)}$ 倍，而在改变其他各行的計算中行列式的值保持不变。而且最后得到的是单位矩陣的行列式，因此它的值等于1. 逆推回去就得到(1.14)。 証毕

§2 記录的簡化(紧凑法，簡化 Doolittle 法，平方根法)

前节所叙述的扫除法中，在m行n列的矩陣的情形，需要記