趣味数学四百题

何似龙　刘蕴华　编译

江苏人民出版社
一九八〇年·南京

趣味数学四百题

何似龙　刘蕴华　编译

江苏人民出版社出版
江苏省新华书店发行
淮阴新华印刷厂印刷

1980年2月第1版　1980年2月第1次印刷
印数：1—350,000
书号：13100·037　定价：1.32元

一、题　　目

1. 池塘里睡莲的面积每天长大一倍，若经 17 天就可长满整个池塘，问需多少天，这些睡莲能长满半个池塘？

2. 今有一根竹竿和一条绳子，绳子比竹竿长 4 米，绳子对折后比竹竿短 2 米，问竹竿与绳子各长多少米？

3. 一个均匀的硬币，在连续投掷九次都出现正面的情况下，问第十次投掷出现反面的概率等于多少？

4. n 个运动员进行乒乓球单打比赛，如果规定每个运动员在输掉第一局后就退出比赛，问必须经过多少局比赛才能得出优胜者？

5. 两个木桶，分别盛放 10 公升酒和 10 公升水，先从酒桶中取出 1 公升酒倒入水桶，搅匀后再取出 1 公升倒回酒桶。问这时候，酒中含水与水中含酒的比哪一个高？

6. 把 11 个齿轮放在同一平面上，使第一个齿轮紧衔住第二个齿轮，第二个紧衔住第三个，……最后，第 11 个又紧衔住第一个。问这个齿轮系中的齿轮能转动吗？

7. 某一套丛书（共七册）各册出版间隔时间是七年，当它出完第七册后，这套书每一册出版年代的总和为 13594。问它第一册书是何年出版？

8. 三根互相交织着的绳子系在（钉进）木板 A 的三颗钉子上（图 1·1）。要求用三根新绳子分别拴在它们的自由端，而新绳子（允许它们互相交织）的另一端应该系在（钉进）木板 B 的三颗钉子上。当 A,B 两块木板对拉开后，三根绳子将

处于平行状态。怎样做才能达到这个目的？

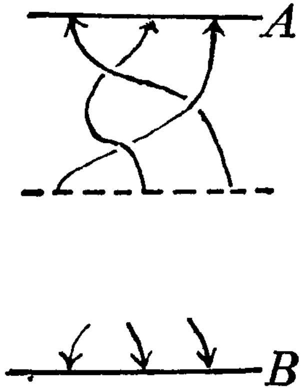

图 1·1

9. 某正三角形与一正六边形的周长相等，求它们的面积之比。

10. 某地气象站的记录表明，在某一时间周期内，这里经常出现早雨晚晴或早晴晚雨的多雨天气。如果这样的日子有 9 天，而且在这周期内有 6 个傍晚和 7 个早晨天气晴朗。问这时间周期的总计天数是多少？

11. 某试卷由 26 个问题组成，答对一题得 8 分，答错一题扣去 5 分。今有一考生虽然回答了全部 26 个问题，但所得总分为零。问他正确解答多少题？

12.（1）把图（图1·2）剪成其形状与大小完全一样的四小块；

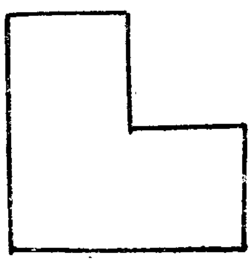
图 1·2

(2) 用五条直线把图（图 1·3）分成六块，使分成的各块能拼成一个正六边形.

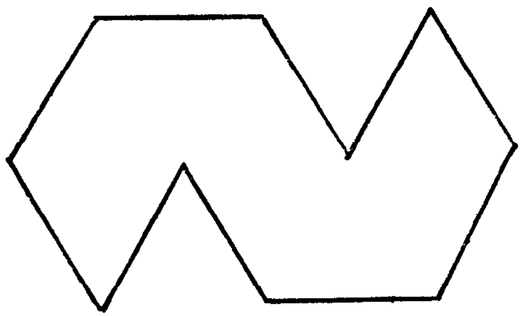

图 1·3

13. 母羊、小羊共 140 只，总计剪得羊毛 160 斤，若每只母羊可剪毛 1 斤 2 两，每只小羊可剪毛 8 两，问母羊、小羊各若干？

14. 猎人要把一只狼、一头羊和一篮白菜从河的左岸带到右岸，但他的渡船太小，一次只能带一样. 因为狼要吃羊，羊会吃白菜，所以狼和羊，羊和白菜不能在无人监视的情况下相处. 问猎人怎样才能达到目的？

15. 200 个学生排成 10 行、20 列的长方形队伍，在每一列中选出最矮者（如这样的人有几个，则任选其中一人），然后在所选出的 20 人中挑出最高者；再在每一行中选出最高者，又从所选出的10人中挑出最矮者. 试问在这两个被挑选出来的人中，谁高些？

16. 下面简单的式子，是由 1 到 9 的九个不同数字组成. 试在空白处填上其它几个数字（有两种可能的解答）.

$$\begin{array}{r} 9\ \cdot\ \cdot \\ -\ \cdot\ 4\ \cdot \\ \hline \cdot\ \cdot\ 1 \end{array}$$

17. 张三、李四和王二三个棋迷，他们定期去工人文化宫下棋．张三每隔 5 天去一次（如果他第一次是三月一日去，那么第二次便是三月六日去）；李四每隔 6 天去一次；王二每隔 9 天去一次．如果十月三日这一天他们正好都到了文化宫，问下一次他们三人正好都去文化宫是几月几日？

18. （1）求二数，使它们的差和商都等于 5．

（2）求一正数，使它的 $\frac{1}{5}$ 与它的 $\frac{1}{7}$ 相乘正好等于自身．

19. 搭火柴棒：

（1）用 6 根等长的火柴棒搭成 4 个同样大小的三角形．

（2）用10根火柴棒摆成图 1·4，问最少要移动几根火柴，才能使它变成图 1·5 的样子？

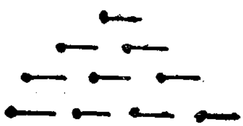

图 1·4

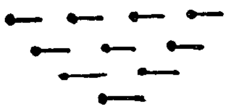

图 1·5

（3）图 1·6 是由火柴棒摆成的图形，请从图 1·6 取出一根加入图 1·7，并摆成新图形，使得图 1·6 的面积仍是图 1·7 的 3 倍．

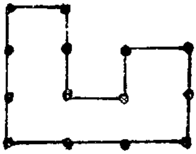

图 1·6

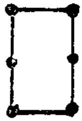

图 1·7

（4）用 3 根火柴棒摆成一个大于 3 而小于 4 的数．

注： 在各题中都不允许把火柴棒弯成弧形和折断．

20. $0.\dot{9}$ 比 1 小吗？

21. 10盒金属零件，每盒装 10 个，同盒内各零件重量相同。但因分批生产，原料不同，因而有一盒与其他盒不同。如果知道其他 9 盒内每个零件重 10 克，而这一盒内每个零件重 9 克，如何用天平（允许用法码）称一次就能把这一盒找出来。

22. 图 1·8 表示一个正多边形的三条边，问此多边形总共有几条边？

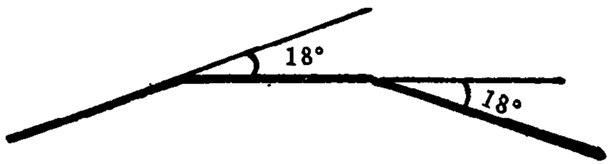

图 1·8

23. (1) 图 1·9 是某城市一角的街道示意图，各街道的长度如图所示，试计算从X到Y的最短路程。

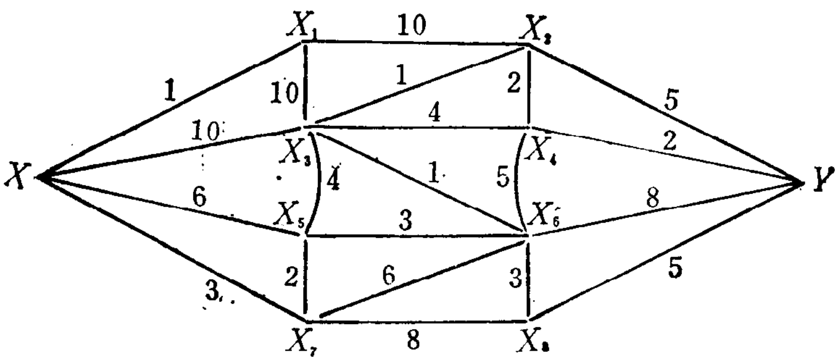

图 1·9

(2) 图 1·10 是一个迷阵模型，黑线代表篱笆，空隙代表人行通道。有人位于A端，他应怎样走，才能顺着通道经过

迷阵到达 B 端？

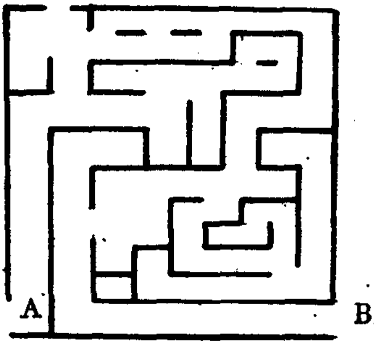

图 1·10

24. (1) 口算从 1 到 300 的正整数的常用对数乘积.

(2) 口算 85^2.

25. 谁都知道，人们在见面或分别时，经常喜欢用握手来表示友谊或礼貌. 请你证明，不论在什么时候，世界上凡握过奇数次手的人数一定是偶数.

26. 求四个相邻奇数，使它们的平方和，比夹在它们之间的偶数平方和大 48.

27. 如图 1·11，半径分别为 15 和 20 的圆周相交成直角，考察两个圆在除去公共部分后所得的两个区域，它们的面积差是多少？

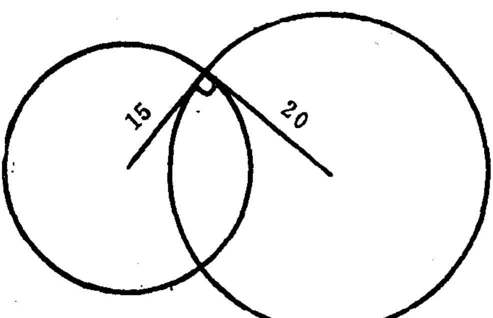

图 1·11

28. 不查表计算：

$$\lg\operatorname{tg}1^\circ+\lg\operatorname{tg}2^\circ+\lg\operatorname{tg}3^\circ+\cdots+\lg\operatorname{tg}89^\circ$$

29. 今有半径相等的球若干，一次放成正方形，一次放成正三角形，已知正方形每边的球数比三角形每边的球数少2个．求球的个数．

30. 试比较 $13^{13}\cdot11^{11}$ 与 $13^{11}\cdot11^{13}$ 的大小．

31. 证明：当 $n>2$ 时，在任何直角三角形中，斜边的 n 次幂一定大于二直角边的 n 次幂之和．

32. 求出下述分数在表达为小数时，小数点后的第一、二、三位数字．

$$\frac{0.1234\cdots5051}{0.51504948\cdots321}$$

33. 用几何方法证明：两个正数 a 和 b 的几何平均，等于这两个数的算术平均和调和平均的比例中项．

34. 在用黑白相间、大小一样共 8×8 个方格组成的方形棋盘上，任意剪去二个方格，得到一张剪残的棋盘．又有31张纸牌，每张可以遮盖棋盘的二个相邻方格．试证明：

被剪去的二个方格具有同一种颜色（或者全黑，或者全白）时，剪残的棋盘一定不能被纸牌所遮盖；

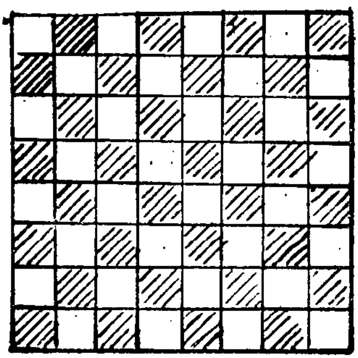

图 1·12

被剪去的二个方格正好一黑一白时，剪残的棋盘一定可用纸牌遮盖。

其中，我们约定，在遮盖过程中，每张纸牌不允许被剪成小块。

35．二数之比为 5 ：6 ，如果由第一个数的 0.7 倍减去第二个数的0.26倍，所得之差为 76。求这两个数。

36．十人抬五杆，如果规定每杆用四人，且一人同时抬两杆，如何抬法？

37．若 $a^2+b^2=1$，$c^2+d^2=1$，$ac+bd=0$。则 $ab+cd$ 应取何值？

38．把 1600 颗花生，分给 100 只猴子.证明：不管怎样分，至少有 4 只猴子得到一样多的花生。并设计一种分法，使得不会有 5 只猴子得到一样多的花生.

39．确定分别满足下述条件的凸多边形边数：

（1）对角线数为边数的 1.5 倍；

（2）对角线数与边数之和等于 10.

40．分母有理化：

（1）$\dfrac{1}{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}}$

（2）$\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}$

41．中学三年级一个班级共有男学生 31 名，请数学教师为他们编排一个乒乓球单打比赛程序表，要求每个学生恰好都参加 3 场比赛.数学教师略加思考后笑了起来，回答说：“你们提出了一个无法实现的主张”．真是这样吗？请你证明.

42．计算：

（1）$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{3638}$

(2) $\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{30}+\left(\frac{i+1}{i-1}\right)^{20}$

(3) $\frac{15i^{-24}-5\sqrt{2}i^{31}}{(3+\sqrt{2}i^{21})(\sqrt{3}-\sqrt{2}i^{-33})}$

(4) $\frac{27+8i}{3+2i^{3}}$

43. (1) 在圆周上给定 n 点，作出联接这 n 点的所有直线，假定其中任何三条直线不在圆内相交于同一点。试求出由这些直线所确定的、顶点全部落在圆周内部的三角形个数。

(2) 在凸多边形中，我们把联接任何两个不相邻顶点的线段称为对角线。如果有一个凸 n 边形，它的任何三条对角线都不在凸 n 边形内部相交于同一点。试求这些对角线彼此在凸 n 边形内部的交点总数。

44. 证明：如果线段 a、b、c 组成一个三角形，那么线段 $\sqrt{a}$、$\sqrt{b}$、$\sqrt{c}$ 同样可以组成一个三角形。

45. 某公司由 20 个部门组成，为欢度节日，全公司准备放映 15 场电影（假定在分配时，各部门不计较电影场次的不同），如何分配才能满足下述条件？

(1) 每场电影恰好由四个部门观看；

(2) 每个部门看三场电影；

(3) 每两个不同部门同看一场电影的次数不多于一。

46. 确定下式中 $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ 的值：

$$arc\ \mathrm{tg}\ \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\right)=\alpha$$

47. 假定某轮船公司较长时间以来，每天中午有一只轮船从哈佛开往纽约，并且在每天的同一时间也有一只轮船从

纽约开往哈佛。轮船在途中所花的时间，来去都是七昼夜。问今天中午从哈佛开出的轮船，在整个航运途中，将会遇到几只同一公司的轮船从对面开来？

48. 在直径等于1厘米的圆周内部任意安放着二百万个已知点。问是否存在这样的直线，在它的两侧恰好各安放了一百万个已知点？

49. 有纸片 n^2 张（n 是任意正整数），在每张纸片上用红蓝铅笔各任意写上一个不超过 n 的正整数，但要使红字相同的任意两张上所写的蓝色数字都不相同。现在把每张上的两个数相乘，证明这样得到的 n^2 个乘积之和总是一样的，并求出这个和。

50. 学过几何的人都知道，三角形中若有二边的中线（或高）相等，即为等腰三角形。如果把中线换成角平分线，那又怎么样呢？请你证明：二内角平分线相等的三角形是等腰三角形。

51. (1) 计算根式：

$$\left(\frac{1\cdot2\cdot4+2\cdot4\cdot8+3\cdot6\cdot12+\cdots}{1\cdot3\cdot9+2\cdot6\cdot18+3\cdot9\cdot27+\cdots}\right)^{\frac{1}{3}}$$

(2) 化简乘积：

$$(3^{2^0}+1)(3^{2^1}+1)(3^{2^2}+1)\cdots(3^{2^n}+1)$$

(3) 解方程：

$$\frac{1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3}{2^3+4^3+6^3+\cdots+(2n)^3}=\frac{199}{242}$$

52. 在波平如镜的湖面上，有一朵美丽的红莲，它高出水面3尺，一阵大风吹过，红莲被吹至一边，花朵齐及水面，如果知道红莲移动的水平距离为6尺，问这里水深多少？

53. 甲、乙、丙三村，甲村在丙村之南，乙村在丙村之

东．一人自甲至丙，步行六小时到达，返回时，绕道乙村，经十小时而归．如果此人每小时步行 5 公里．问甲乙二村相距若干？

54．(1) 若 a、b 均是正有理数，而 $\sqrt{a}$、$\sqrt{b}$ 是无理数，问 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 是否是无理数，为什么？

(2) 设 a、b、c 为整数且不同时为零，证明：

$$a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}\neq 0$$

(3) 设一次函数 $y=ax+b$(其中 $a\neq 0$)有一组对应值 $x=\sqrt{2}$、$y=0$，试证明 $y=ax+b$ 不能有二组以上有理数的对应值．

55．甲记住一个位于 1 和1000之间的正整数，由乙来猜，如果对于乙的猜测，甲只能回答“是”或“不是”，问怎样以最少的次数猜测后，就一定能猜中？

56．是否存在这样的正多边形，它的一条对角线等于另二条对角线之和？

57．在十进制中，试证明：

(1) 任何两位数以上的完全平方数，不能由同一个数字所组成；

(2) 任何完全平方数，不可能恰好由五个不同的同时为偶或奇的数字所组成．

58．两位数 BC 取何值时，有

(1) $$\begin{array}{r} BC \\ \times\ BC \\ \hline ABC \end{array}$$

(2) $$\begin{array}{r} BC \\ \times\ BC \\ \hline ABBC \end{array}$$

式中 $A\neq 0$．

在解(2)时，不要“硬凑”．可利用第 57 题先缩小范围，再行求解．

59. (1) 能否找到这样的三个数：它们既是等差数列，又是等比数列？

(2) 是否可以从数列 1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，…，$\frac{1}{2^n}$，…中选出无穷等比数列，使其和等于$\frac{1}{7}$？又能否在其中找出无穷等比数列，使其和等于$\frac{1}{5}$。

60. 图 1·13 是三个并列而放、大小一样的正方形，试证明：

$$\angle AHB+\angle AGB+\angle ADB=\frac{\pi}{2}$$

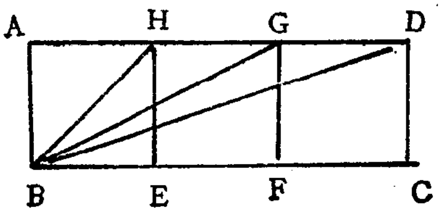

图 1·13

61. 试把图 1·14 所示的一张图折成其八分之一大小(如图 1·15)，并使数码保持 1 到 8 的次序。

1	8	7	4
2	3	6	5

图 1·14

图 1·15

62. 如果有人说$\frac{1}{2}=-1$,或者钝角等于锐角，你一定感到可笑。但是知道显明的数学事实同真正掌握和应用它，并在数学推导和论证时不犯这样那样的错误，往往还有很长一段距离。例如谁都晓得，零不能做除数，但是在复杂的代数运算中，人们往往忽视这一点，以致引起许多似是而非、莫名其妙的错误。又如在几何中，图形的直观可以启发人们找到解题的途径，但是图形的正确性又经常不被许多人所重视，这同样可以导致各种错误。

下面列出几段错误的推导和论证，请找出产生这些错误的原因。

(1) 设 $\frac{x}{y+z}=\frac{y}{z+x}=\frac{z}{x+y}$，则有

$$\frac{x}{y+z}=\frac{y}{z+x}=\frac{z}{x+y}$$

$$=\frac{x+y+z}{(y+z)+(z+x)+(x+y)}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{y+z}=\frac{y}{z+x}=\frac{x-y}{(y+z)-(z+x)}=-1$$

所以，$\frac{1}{2}=-1$

(2) 因为 $10^{\lg x}=x$，$-10^{\lg(-x)}=x$，所以

$$10^{\lg x}=-10^{\lg(-x)}$$

(3) 任作线段 AB，过端点 A 作线段 AC，使它与 AB 垂直，过 B 作线段 $BD=AC$，使 D 与 C 在 AB 同侧，且

$$\angle ABD=\frac{\pi}{2}+\alpha, \qquad \alpha>0$$

作 AB 和 CD 的中垂线相交于 Q，于是 $\triangle AQC \cong \triangle BQD$，$\angle QAC = \angle QBD$，但 $\triangle QAB$ 是等腰三角形，故 $\angle QAB = \angle QBA$，$\angle QAC - \angle QAB = \angle QBD - \angle QBA$，即 $\angle CAB = \angle ABD$，但 $\angle CAB = \frac{\pi}{2}$，$\angle ABD = \frac{\pi}{2} + \alpha$，$\alpha > 0$。

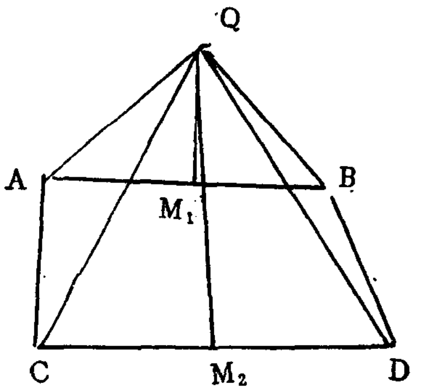

图 1·16

（4）已知 $a = \sqrt{3}$，$b = 1$，$C = 30°$。由余弦定理

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C} = 1$$

由正弦定理

$$\sin A = \frac{\sqrt{3}\sin 30°}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

故 $A = 60°$，且

$$B = 180° - (A + C) = 90°$$

这样，我们得到了一个三角分别为 30°、60° 和 90° 的等腰三角形。

63. 如图1·17，有一根长 9cm、外圆周长为 4cm的圆柱形管子。今用一段细铁丝缠绕此铁管，组成 10 个螺旋。如果铁丝与圆柱形的母线相交成定角，且铁丝的两个端点落在圆

柱面的同一母线上，求铁丝的长度。

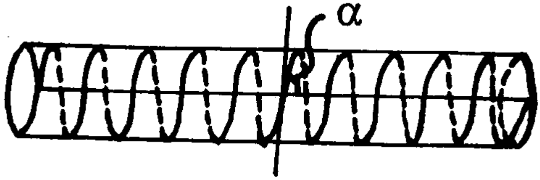

图 1·17

64. 设有两个大小一样的正方形纸板$MNPQ$和$ABCD$，如果把A点放在$MNPQ$的中心，让边AB在MN的$\frac{1}{3}$处与它相截（图 1·18）。问这两个正方形纸板的重迭部分的面积等于多少？

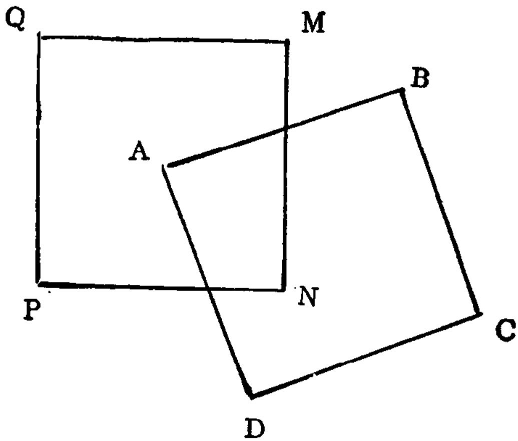

图 1·18

65. 请将下列二式因式分解

(1) $x^8-x^7y+x^6y^2-x^5y^3+x^4y^4-x^3y^5$
$$+x^2y^6-xy^7+y^8$$

(2) $a^{15}+1$

注：在(1)中，不准使用分组分解方法。