朗曼 1+1

北京朗曼教学与研究中心教研成果

# 高二数学同步讲解与测试

## （几何）

李俊发 主编

# 中学数学 1+1

宋伯涛 总主编

中国青年出版社

北京朗曼教学与研究中心资料

# 中学数学 1+1

## ——高二数学同步讲解与测试

## （解析几何）

主编　李俊发

中国青年出版社

责任编辑：李 培 广
封面设计：Paul Song

中学数学 1+1

# 高二数学同步讲解与测试（解析几何）

主编 李俊发

㊝
中国青年出版社出版 发行
社址：北京东四 12 条 21 号 邮政编码：100708
北京市昌平长城印刷厂印刷 新华书店总经销
*
850×1168 1/32 12.5 印张 360 千字
2000 年 7 月北京第 1 版 2001 年 6 月北京第 2 次印刷
定价：14.80 元
ISBN 7－5006－3664－4/G・1112

# 敬告读者

《中学1+1》系列丛书为作者精心之作，自首发以来，深受全国广大读者欢迎及肯定，作者值此再版之际向全国千百万热心读者深表谢意。

本书读者如有疑难问题，可来信与我们联系，本中心将本着为读者服务及负责的精神，及时帮助你排忧解难，与你共同切磋、共同研究，携手共勉，建立友谊。

作者声明：《中学1+1》系列丛书为北京朗曼教学与研究中心专项研究成果，已报国家专利局注册，请读者认准封面上1+1注册商标、“北京朗曼教学与研究中心成果”等字样，以防假冒。凡以《中学1+1》及“宋伯涛总主编”名誉出版的任何其它版本均为侵权行为。

作者声明：凡与本书内容雷同的任何其它版本，均为盗版物。保护正版是每个真正尊重知识的忠诚读者的义务。如发现盗版，请及时来信告诉我们，我们将根据有关法律及规定对盗版者和非法买卖盗版书的个人及单位作出严肃处理。本书在全国各地均有销售，也可来信与我们联系。

来信请寄：北京市朝阳区亚运村邮局100101－89号信箱北京朗曼教学与研究中心宋伯涛收，邮编100101。
本中心 E-mail:SPTJWLSQ@163bj.com

# 再版前言

本书是由北京朗曼教学与研究中心根据高二数学教材最新出版的《中学1+1》系列丛书之一。其特点在于结合教材对各单元重点、难点、疑点、易混淆点、考点逐条进行讲解，内容详尽，条理清晰，分析透彻，例题丰富。所涉及内容主要是各单元所应掌握的基础知识、知识运用、思维方法、解题思想、技巧等。同步测试部分根据各单元特点对基础知识、重点难点、知识应用进行巩固性的训练。其中采用了目前各地较为常用的题型，题目丰富，综合性强，旨在帮助学生巩固知识，提高综合运用知识的能力。

学生在使用本书过程中，应结合教科书，认真学习重点难点部分，努力掌握重点、难点、知识点的各种用法及注意事项，对某些重点难点要进行仔细的研究、分析和理解，结合例题，努力掌握其用法。做同步练习时要独立思考，结合教科书及讲解认真解题，然后对照题解，弄通弄懂为什么用这个答案而不用那个答案，为什么要这样说而不那样说，还可以怎样说，怎样才对，从一个点进行散发性联想思维。课后还应对某些重点题目进行反复的再思考、再分析、再理解。有问题主动询问，及时解决。本中心答疑信箱就是为这一目的而开设的。

出版前，作者对书中许多地方作了较为合理的修改，但仍难免存有不尽人意之处，谨请广大读者及听众批评指正。凡需要本书以及本系列其它丛书的读者可与本中心联系，联系电话：010－64962054，64985587。

宋伯涛

2001年6月于北师大

# 目　录


**第一章　直线和圆** …………………………………………（1）

**一　有向线段、定比分点** ……………………………………（1）

1.1 有向线段、两点间的距离 ……………………………（1）

1.2　线段的定比分点 ……………………………………（6）

有向线段、定比分点单元小综合 ……………………………（13）

**二　直线的方程** ……………………………………………（18）

1.3　一次函数的图象与直线的方程 ……………………（18）

1.4　直线的倾斜角和斜率 ………………………………（20）

1.5　直线方程的几种形式 ………………………………（25）

1.6　直线方程的一般形式 ………………………………（33）

直线的方程单元小综合 ……………………………………（36）

**三　两条直线的位置关系** …………………………………（46）

1.7　两条直线的平行与垂直 ……………………………（46）

1.8　两条直线所成的角 …………………………………（50）

1.9　两条直线的位置关系 ………………………………（55）

1.10　点到直线的距离 ……………………………………（63）

~~1.11　两条直线的位置关系单元小综合~~ ……………（67）

**本章大综合** …………………………………………………（80）

**第二章　圆锥曲线** …………………………………………（91）

**一　曲线和方程** ……………………………………………（92）

2.1　曲线和方程 …………………………………………（92）

2.2　求曲线的方程 ………………………………………（94）

2.3　充要条件 ……………………………………………（101）

2.4　曲线的交点 …………………………………………（104）

曲线与方程单元小综合 ……………………………………（111）

**二　圆** ………………………………………………………（131）

2.5　圆的标准方程 ………………………………………（131）

2.6　圆的一般方程 ………………………………………（138）

2.7 直线和圆的位置关系 …… (144)
2.8 圆与圆的位置关系 …… (149)
2.9 与直线和圆有关的轨迹问题 …… (153)
圆单元小综合 …… (158)
2.10 椭圆① …… (168)
2.11 椭圆② …… (174)
椭圆单元小综合 …… (179)
2.12 双曲线① …… (189)
2.13 双曲线② …… (196)
2.14 抛物线① …… (202)
2.15 抛物线② …… (208)
抛物线单元小综合 …… (213)
2.16 椭圆、双曲线、抛物线的统一定义 …… (226)
2.17 直线与圆锥曲线 …… (232)
2.18 圆锥曲线的轨迹问题 …… (240)
2.19 坐标轴的平移 …… (249)
2.20 对称轴平行于坐标轴的圆锥曲线的方程 …… (255)
2.21 对称变换 …… (260)
2.22 求曲线的轨迹方程 …… (265)
2.23 圆锥的曲线系 …… (270)
坐标轴的平移单元小综合 …… (275)
本章大综合 …… (286)
第三章 参数方程、极坐标 …… (322)
一 参数方程 …… (322)
3.1 曲线的参数方程 …… (322)
3.2 参数方程和普通方程的互化 …… (331)
参数方程单元小综合 …… (339)
二 极坐标 …… (352)
3.3 极坐标系 …… (352)
3.4 曲线的极坐标方程 …… (356)
3.5 极坐标和直角坐标的互化 …… (362)
极坐标单元小综合 …… (365)
本章大综合 …… (377)

# 第一章　直线和圆

## 一　有向线段、定比分点

### 1.1 有向线段、两点间的距离

**【学习目标】**

1. 了解有向直线的概念.

2. 理解有向线段的概念,有向线段的数量及表示法.

3. 掌握数轴上有向线段的数量,长度与起点坐标和终点坐标的关系.

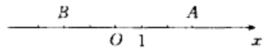
4. 熟练掌握平面内两点的距离公式及其推导、运用.

**【重点、难点知识讲解】**

1. 有向线段的数量

一般地,有向线段的数量是在有向直线的基础上定义的,如果有向线段$\overline{AB}$与有向直线 $l$ 的方向相同,则$\overline{AB}$的数量 $AB$ 为正值,$AB=|AB|$,如果有向线段$\overline{AB}$的方向与有向直线 $l$ 的方向相反,则有向线段$\overline{AB}$的数量 $AB$ 为负值,$AB=-|AB|$.

数轴 $Ox$ 上任意点 $P$ 的坐标 $x_0$,实际上就是有向线段$\overline{OP}$的数量,即 $OP=x_0$,$\overline{OP}$与 $Ox$ 轴的方向相同,则 $x_0>0$,$\overline{OP}$与 $Ox$ 轴的方向相反,则 $x_0<0$,如图$\overline{OA}$与 $x$ 轴的方向相同,$|OA|=3$,$A$ 点的坐标 $x_A=3$,有向线段$\overline{OA}$的数量 $OA=3$,有向线段$\overline{OB}$与 $x$ 轴的方向相反,$|OB|=2$,$B$ 点的坐标 $x_B=-2$,有向线段$\overline{OB}$的数量 $BO=-2$




设数轴上$A$、$B$两点的坐标分别为$x_1$,$x_2$,则有向线段$\overline{AB}$的数量$AB=x_2-x_1$,有向线段$\overline{AB}$的长度$|AB|=|x_2-x_1|$,显然有向线段$\overline{BA}$的数量$BA=x_1-x_2$,有向线段$\overline{AB}$与有向线段$\overline{BA}$的数量相反,长度相同,即$AB=-BA$,$|AB|=|BA|$.

**注意**:如果有向线段$\overline{AB}$既不在有向直线$l$上,又不与$l$平行,我们一般不讨论$\overline{AB}$的数量.

2.平面内两点的距离

平面内两点的距离公式是在数轴上两点的距离公式的基础上,利用勾股定理导出的,把与坐标轴既不平行也不垂直的线段向$x$轴、$y$轴分别作投影(射影),化"斜"为"直",化一般为特殊,通过端点坐标,利用直角三角形中的勾股定理,得出平面$P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$两点的距离$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

$|x_2-x_1|$、$|y_2-y_1|$分别表示$P_1P_2$在$x$轴,$y$轴射影的长.要注意掌握推导公式的思想方法.

实际上,设平面上任一点$P$的坐标$(x_0,y_0)$,横坐标$x_0$是线段$OP$在$x$轴的射影$\overline{OM}$(有向线段)的数量,$\overline{OM}$与$x$轴方向相同,则$x_0>0$,$\overline{OM}$与$x$轴的方向相反,则$x_0<0$,若$M$与$O$重合,则$x_0=0$,同理,纵坐标$y_0$是线段$OP$在$y$轴上射影$\overline{ON}$的数量.

两点的距离公式是平面解析几何中最重要最基本的公式,要用熟用好用活.

## 【重点、难点知识应用】

**题型1 利用有向线段的数量和长度解题**

**例1** 已知数轴上$A$、$B$、$C$三点的坐标分别是$-2,1,3$,求$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$的数量和长度.

**解**:$AB=1-(-2)=3$,$|AB|=3$

$BC=3-1=2$,$|BC|=2$

$CA=-2-3=-5$,$|CA|=5$

**例2** 已知$A$、$B$是数轴上的两点,坐标分别为$x_A$,$x_B$,根据下列条件,求$B$点的坐标$x_B$:

(1)$x_A=2$　　$AB=-3$　　(2)$x_A=-2$　　$BA=-5$

(3)$x_A=0$　　$|AB|=1$　　(4) $x_A=1$　　$|AB|=3$

**解**:(1)$x_B-2=-3$　$\therefore x_B=-1$

(2)$-2-x_B=-5$　$\therefore x_B=3$

(3)$|x_B-0|=1$　$\therefore x_B=1$ 或 $x_B=-1$

(4)$|x_B-1|=3$　$\therefore x_B-1=3$ 或 $x_B-1=-3$

$\therefore x_B=4$ 或 $x_B=-2$

**说明**:此类问题比较简单,只要掌握基本概念和公式即可.

**题型 2　利用两点间的距离公式解题**

**例 3**　若点 $P$ 到点 $P_1(0,1)$,$P_2(7,2)$及 $x$ 轴的距离相等,求 $P$ 点坐标.

**分析**:设出 $P$ 点坐标,把 $P$ 点坐标满足的条件变成方程,解方程组就可以求出 $P$ 点坐标.要注意把条件代数化(或者说方程化)这个基本思想方法

**解**:设 $P$ 点坐标为 $P(x,y)$,由两点间的距离公式,

得$\begin{cases}x^2+(y-1)^2=(x-7)^2+(y-2)^2\\x^2+(y-1)^2=y^2\end{cases}$

即$\begin{cases}7x+y-26=0\\x^2-2y+1=0\end{cases}$

消 $y$ 得 $x^2+14x-51=0$

解得:$\begin{cases}x=3\\y=5\end{cases}$　$\begin{cases}x=-17\\y=145\end{cases}$

$\therefore P$ 点坐标为 $P(3,5)$或 $P(-17,145)$

**注**:$P(x,y)$点到 $x$ 轴,$y$ 轴的距离分别为$|y|$,$|x|$

**例 4**　求 $P(\cos\theta,\sin\theta)$,$Q(\cos2\theta,\sin2\theta)$两点间的距离$(0\leqslant\theta<\pi)$

**解**:$|PQ|=\sqrt{(\cos2\theta-\cos\theta)^2+(\sin2\theta-\sin\theta)^2}$

$=\sqrt{2-2(\cos2\theta\cdot\cos\theta+\sin2\theta\sin\theta)}$

$=\sqrt{2-2\cos\theta}$

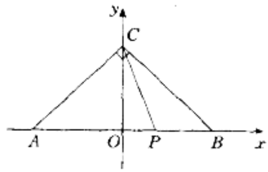
$=2\cdot\sin\dfrac{\theta}{2}$

本题要注意三角知识的运用.

**题型3　运用坐标法(也称解析法)解题**

运用坐标法解某些平面几何、代数、三角问题,即以坐标系为桥梁,恰当地建立坐标系,设点的坐标,灵活运用有关知识,依据数形结合的原则,使问题化难为易,化繁为简.

**例5**　等腰直角三角形 $ABC$ 中,$\angle C=90°$,$P$ 为 $AB$ 边上任意一点




求证:$|AP|^2+|BP|^2=2|CP|^2$

**证明**:以 $AB$ 的中点 $O$ 为坐标原点,$AB$ 所在直线为 $x$ 轴建立如图所示的平面直角坐标系,则 $C$ 点在 $y$ 轴上

设 $A(-a,0)$,$B(a,0)$,$C(0,a)$,$P(x,0)$

$|AP|^2+|BP|^2=(x+a)^2+(x-a)^2=2(x^2+a^2)$

$|CP|^2=(x-0)^2+(0-a)^2=x^2+a^2$

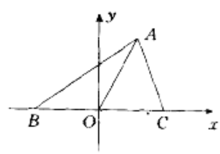
$\therefore |AP|^2+|BP|^2=2|CP|^2$

**注意**:建立坐标系要尽可能使点的坐标简单.

## 【课本范例赏析】

**例1**　平面解析几何必修本 $P_6$ 例2,$\triangle ABC$ 中,$AO$ 是 $BC$ 边上的中线(如图),求证:$|AB|^2+|AC|^2=2(|AO|^2+|OC|^2)$.

**分析**:用解析法证明平面几何问题,关键是建立恰当的坐标系,使得点及相关线段的长度表达式较为简便.本题中 $O$ 是 $BC$ 的中点,可设其为原点.




**证明**:取线段 $BC$ 所在的直线为 $x$ 轴,点 $O$ 为原点建立直角坐标系.设点 $A$ 的坐标为$(b,c)$,点 $c$ 的坐标为$(a,o)$,则点 $B$ 的坐标为$(-a,o)$.可得 $|AB|^2=(a+b)^2+c^2$,$|AC|^2=(a-b)^2+c^2$,$|AO|^2=b^2+c^2$,$|OC|^2=a^2$.

$\therefore |AB|^2+|AC|^2=2(a^2+b^2+c^2)$,

$|AO|^2+|OC|^2=a^2+b^2+c^2$.

$\therefore |AB|^2+|AC|^2=2(|AO|^2+|OC|^2)$

**评注**:用解析法证明几何问题的步骤:

$\left\{\begin{array}{l}\text{①建系，技巧}\\\text{②设点}\\\text{③代数运算}\end{array}\right.$

## 【课后跟踪练习】

### 一、单项选择题

1. 设 $A$、$B$ 是数轴上两点，则 $\overline{AB}$ 的数量是　（　　）

   A. $AB=AO+OB$　　B. $AB=AO+BO$

   C. $AB=OA+OB$　　D. $AB=OA+BO$

2. 数轴上 $A$、$B$ 两点的坐标分别为 $x_1$、$x_2$，则下列式子不正确的是　（　　）

   A. $|AB|=|x_1-x_2|$

   B. $\overline{AB}=x_1-x_2$

   C. $AB=x_2-x_1$

   D. $AB+BA=0$

### 二、填空

3. 数轴上，点 $M$、$N$、$P$ 的坐标分别为 $3,-1,-5$，则 $MP+PN$ ＝________

### 三、解答题

4. 设 $P,A,B,C$ 为同一直线上任意四点，求证：$PA\cdot BC+PB\cdot CA+PC\cdot AB=0$

5. 用解析法证明：直角三角形斜边中点到三个顶点的距离相等.

## 【跟踪练习解答】

1. $A$

2. $B$　提示：$\overline{AB}$ 表示有向线段，而 $x_1-x_2$ 是数量，两者为不同的概念，更谈不上相等，故选 $B$.

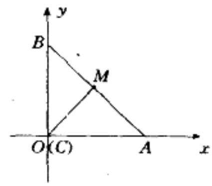
3. $-8$. 提示：$MP+PN=MN=-5-3=-8$

4. 证明：取 $P,A,B,C$ 四点所在的直线为数轴，$P$ 为原点，建立坐标系. 设 $A$、$B$、$C$ 三点的坐标分别为 $x_1,x_2,x_3$，则

   $PA\cdot BC+PB\cdot CA+PC\cdot AB=x_1(x_3-x_2)+x_2(x_1-x_3)+x_3(x_2-x_1)=0$.

5. 证明：如图，设直角三角形两直角边所在的直线为 $x,y$ 轴. 坐标 $A(2a,0)$，$B(0,2b)$，$C(0,0)$

则斜边中点为 $M(a,b)$，则




$$|MA|=\sqrt{(2a-a)^2+(0-b)^2}$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}$$
$$|MB|=\sqrt{(a-0)^2+(b-2a)^2}$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}$$
$$|CM|=\sqrt{(a-0)^2+(b-0)^2}$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}$$

$\therefore |MA|=|MB|=|MC|$

# 1.2　线段的定比分点

## 【学习目标】

1. 理解定比分点的概念，知道定比 $\lambda$ 的涵义.

2. 知道什么是内分点，什么是外分点，掌握定比 $\lambda$ 的值与定比分点 $P$ 的位置之间的关系.

3. 掌握定比分点坐标公式，中点坐标公式及其推导，会运用公式解决有关问题.

## 【重点、难点知识讲解】

1. 定比 $\lambda$ 的值与分点 $P$ 的位置的关系

$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}$，$P_1$ 是有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 的起点，$P_2$ 是终点，$P$ 是分点，如果 $P$ 是内分点，即 $P$ 在线段 $P_1P_2$ 上，此时 $\overline{P_1P}$ 与 $\overline{PP_2}$ 的方向相同，$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{|P_1P|}{|PP_2|}$，$\lambda>0$，且 $P$ 点越靠近 $P_2$，$\lambda$ 的值越大. 如果 $P$ 点在 $P_1P_2$ 的延长线上，此时，$\overline{P_1P}$ 与 $\overline{PP_2}$ 的方向相反，$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}=-\frac{|P_1P|}{|PP_2|}$，由于 $|P_1P|>|PP_2|$，$\therefore \frac{|P_1P|}{|PP_2|}>1$，$\therefore \lambda<-1$，且 $P$ 点离 $P_2$

越近，$\lambda$ 的值越小，$P$ 点离 $P_2$ 越远，$\lambda$ 的值越大，越接近于 $-1$，如果 $P$ 点在 $P_2P_1$ 的延长线上，此时，$\overline{P_1P}$ 与 $\overline{PP_2}$ 的方向相反，$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}=-\frac{|P_1P|}{|PP_2|}$，由于 $|PP_1|<|PP_2|$，$\therefore 0<\frac{|P_1P|}{|PP_2|}<1$，$\therefore -1<\lambda<0$，且 $P$ 点离 $P_1$ 越近，$\lambda$ 的值越大，越接近于 $O$，$P$ 点离 $P_1$ 越远，$\lambda$ 的值越小，越接近于 $-1$.

综上所述，如果 $P$ 点在线段 $P_1P_2$ 上，则 $\lambda>0$；如果 $P$ 点在线段 $P_1P_2$ 的延长线上，则 $\lambda<-1$；如果 $P$ 点在线段 $P_2P_1$ 的延长线上，则 $-1<\lambda<0$.

2. 定比分点坐标公式，中点坐标公式及其推导.

定比分点坐标公式的推导的基本思路是把定比 $\lambda(\lambda\neq-1)$ 用线段 $\overline{P_1P_2}$ 的端点 $P_1$，$P_2$ 及分点 $P$ 的坐标来表示，设 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，点 $P$ 分 $\overline{P_1P_2}$ 所成的比为 $\lambda$，求分点 $P$ 的坐标 $(x,y)$.

我们依然采用化一般为特殊，化"斜"为"直"的思想方法，过点 $P_1$，$P_2$，$P$ 分别作 $x$ 轴的垂线 $P_1M_1$，$P_2M_2$，$PM$，则垂足分别为 $M_1(x_1,0)$，$M_2(x_2,0)$，$M(x,0)$ 则根据平行线分线段成比例定理，得

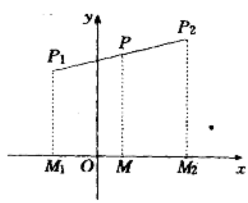
$$\frac{|P_1P|}{|PP_2|}=\frac{|M_1M|}{|MM_2|}$$

而且 $\frac{P_1P}{PP_2}$ 与 $\frac{M_1M}{MM_2}$ 的符号相同，

所以 $\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{M_1M}{MM_2}$

$\because M_1M=x-x_1$，$MM_2=x_2-x$

$\therefore \lambda=\frac{x-x_1}{x_2-x}$




即 $(1+\lambda)x=x_1+\lambda x_2$

当 $\lambda\neq-1$ 时，得 $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$

同理，将 $P_1$，$P_2$，$P$ 向 $y$ 轴作正投影（作垂线）

可以求得 $\lambda=\frac{y-y_1}{y_2-y}$

$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$

**注意**：$\lambda=\frac{x-x_1}{x_2-x}$ 是"横比"，$\lambda=\frac{y-y_1}{y_2-y}$ 是"纵比"与坐标轴上有向

线段的数量比一致，这样记忆比较容易，也融进了推导的思想方法.

当 $P$ 是线段 $\overline{P_1P_2}$ 的中点时，$\lambda=1$

显然 $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，$y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$

此即为中点坐标公式.

**说明**：在使用定比分点坐标公式时，不要盲目地套用公式，要注意分清起点，终点，分点，即弄清谁是公式中的 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，$P(x,y)$，谁是 $\lambda$，此外，要注意数形结合，灵活选取分点，一般要根据题中的具体情况，以运算简便为原则.

## 【重点、难点知识应用】

**题型 1　求有向线段的比**

**例 1**　已知 $P$ 点分线段 $\overline{AB}$ 所成的比为 $\dfrac{1}{3}$，则点 $B$ 分线段 $\overline{AP}$ 所成的比为　　　　(　　)

A. $\dfrac{3}{4}$　　　　B. $\dfrac{4}{3}$　　　　C. $-\dfrac{4}{3}$　　　　D. $-\dfrac{3}{4}$

**分析**：本题直接用公式计算不太方便，若画出图形就一目了然了，如图，显然 $B$ 分 $\overline{AP}$ 所成的比 $\lambda=\dfrac{AB}{BP}=-\dfrac{4}{3}$，故选 C.


**例 2**　已知点 $A$ 分有向线段 $\overline{BC}$ 的比为 2，下列结论中错误的是　　　　(　　)

A. 点 $C$ 分 $\overline{AB}$ 的比是 $-\dfrac{1}{3}$

B. 点 $C$ 分 $\overline{BA}$ 的比是 $-3$

C. 点 $B$ 分 $\overline{AC}$ 的比是 $-\dfrac{2}{3}$

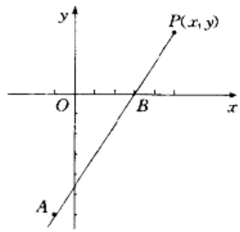
D. 点 $A$ 分 $\overline{CB}$ 的比是 2

**解**：画出示意图，依次判断即可得出答案为(D).


**注意**：解题时要注意数形结合，画图能帮助我们理清思路，进而解决问题.

**题型 2　求点的坐标.**

**例 3**　已知两点 $A(-1,-6)$，$B(3,0)$点 $P$ 是线段 $AB$ 延长线上的一点，且 $|AP|=3|PB|$，求 $P$ 点的坐标.




**解**：设 $P(x,y)$，由题：

$\lambda=\dfrac{AP}{PB}=-3$

$\therefore x=\dfrac{-1+(-3)\times 3}{1+(-3)}=5$

$y=\dfrac{-6+(-3)\times 0}{1+(-3)}=3$

$\therefore P$ 点坐标为$(5,3)$

如果题中条件改为 $P$ 在直线 $AB$ 上

且 $|AP|=3|PB|$

那么 $P$ 有两解，$\lambda=3$ 和 $\lambda=-3$

解题时要注意 $\lambda$ 的符号.

**例 4**　已知 $O(0,0)$，$A(6,3)$，若点 $P$ 在直线 $OA$ 上，且$\dfrac{OP}{PA}=\dfrac{1}{2}$，又 $P$ 是线段 $CB$ 的中点，求 $B$ 点的坐标.

**解**：由线段的定比分点坐标公式，$\lambda=\dfrac{OP}{PA}=\dfrac{1}{2}$

$$\therefore x_P=\frac{0+\frac{1}{2}\times 6}{1+\frac{1}{2}}=2 \qquad y_P=\frac{0+\frac{1}{2}\times 3}{1+\frac{1}{2}}=1$$

$\therefore P$ 点坐标为$(2,1)$

$\because P$ 为 $OB$ 的中点　$\therefore\begin{cases}x_P=\dfrac{0+x_B}{2}\\ y_P=\dfrac{0+y_B}{2}\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}x_B=4\\ y_B=2\end{cases}$　即 $B$ 点坐标为$(4,2)$

**例 5**　已知$\triangle ABC$ 的三个顶点为 $A(4,1)$，$B(7,5)$，$C(-4,7)$，

试求(1)三边的长

(2)$AB$ 边上的中线 $CM$ 的长

(3)重心 $G$ 的坐标

(4)$\angle A$ 的平分线 $AD$ 的长

**解**:(1)$|AB|=\sqrt{(4-7)^2+(1-5)^2}=5$

$|BC|=\sqrt{(7+4)^2+(5-7)^2}=5\sqrt{5}$

$|CA|=\sqrt{(4+4)^2+(1-7)^2}=10$

(2)$\because M$ 为 $A(4,1)$,$B(7,5)$的中点

$\therefore x_M=\dfrac{4+7}{2}=\dfrac{11}{2}$,

$y_M=\dfrac{1+5}{2}=3$

$\therefore |CM|=\sqrt{(-4-\dfrac{11}{2})^2+(7-3)^2}=\dfrac{5\sqrt{17}}{2}$

(3)$\because G$ 为$\triangle ABC$ 的重心

$\therefore x_G=\dfrac{4+7-4}{3}=\dfrac{7}{3}$

$y_G=\dfrac{1+5+7}{3}=\dfrac{13}{3}$

即 $G(\dfrac{7}{3},\dfrac{13}{3})$

(4)$\because D$ 为$\angle A$ 的平分线与 $BC$ 的交点

$\therefore D$ 分$\overline{BC}$所成的比 $\lambda=\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{|BD|}{|DC|}$

根据角平分线的性质

有$\dfrac{|BD|}{|DC|}=\dfrac{|AB|}{|AC|}=\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore x_D=\dfrac{x_B+\lambda x_C}{1+\lambda}=\dfrac{7+\dfrac{1}{2}\times(-4)}{1+\dfrac{1}{2}}=\dfrac{10}{3}$

$y_D=\dfrac{y_B+\lambda y_C}{1+\lambda}=\dfrac{5+\dfrac{1}{2}\times 7}{1+\dfrac{1}{2}}=\dfrac{17}{3}$

$\therefore |AD|=\sqrt{(4-\dfrac{10}{3})^2+(1-\dfrac{17}{3})^2}=\dfrac{10\sqrt{2}}{3}$

解题时要注意数量比与长度比的关系,注意以 $\lambda$ 为桥梁,解决有关问题,在一条直线上的线段“横比”与“纵比”是一致的.