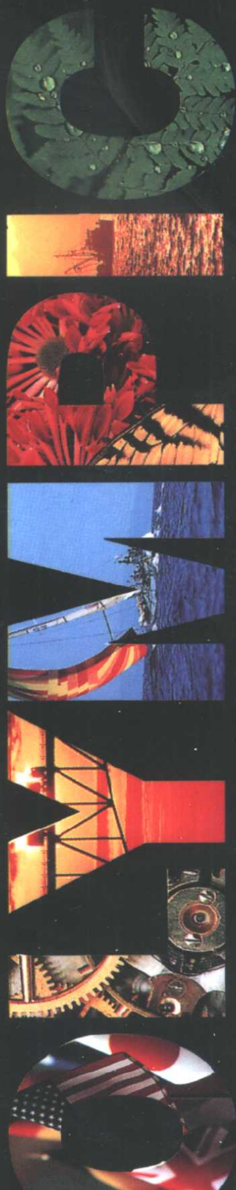

初一年级 SHU XUE

（普及本修订版）

数学
奥林匹克教材

中国教育学会数学教育研究发展中心 审定

首都师范大学出版社

shuxue
aolinpike
jiaocai

奥林匹克

OLYMPIC

数学
奥林匹克教材

中国教育学会数学教育研究发展中心 审定

初一年级

（普及本修订版）

奥林
匹克

首都师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学奥林匹克教材:普及版/中国教育学会数学教育研究发展中心审定.—北京:首都师范大学出版社,1994.8(2000 修订)(数学奥林匹克丛书)

初中一年级用

ISBN7-81039-386-3

Ⅰ.数… Ⅱ.中… Ⅲ.数学-竞赛-中学-教材 Ⅳ.G634.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1994)第 08398 号

作者 熊 军 张 芃 朱 虹 徐 灏

SHUXUE AOLINPIKE JIAOCAI

数学奥林匹克教材

(普及版)

初中一年级用

首都师范大学出版社

(北京西三环北路 105 号 邮政编码 100037)

北京国马印刷厂印刷 全国新华书店经销

2000 年 1 月第 2 版 2000 年 1 月第 1 次印刷

开本 850×1168 1/32 印张 9.75

字数 250 千 印数 00,001～15,000 册

定价 11.50 元

首都师大奥林匹克图书
助你叩击成功之门

目　录

一、有理数的计算

数的计算是初中数学的一个重要内容，同时，培养计算能力也是九年义务教育大纲中规定的重要教学目标之一．要达到真正的运算准确、合理，除了提高口算能力、心算能力外，还需要灵活熟练运用有理数的四则运算法则和有关公式，学会一些巧算的方法，这样对培养思维的敏捷性和灵活性有很大的帮助．有的人误以为计算是纯机械化的劳动，没有多少逻辑推理的成份，更无兴趣可言．而事实上计算的每一步骤都包含着逻辑推理的成份．在计算中进行逻辑推理的依据是数的运算律和一些公式、法则．例如

计算　$87+68+23+12$

$=87+23+68+12$　（应用加法的交换律）

$=(87+23)+(68+12)$　（应用加法的结合律）

$=110+80=190$

整数（包括正整数、负整数、零）和分数（包括正分整、负分数）统称为有理数．由于对任何整数 n 均可以表示成 $\frac{n}{1}$ 的形式，即整数可以写成分母是 1 的分数形式，所以任何整数和分数都具有 $\frac{m}{n}$ 的形式．这就是说，有理数就是能够表示成分数形式 $\frac{m}{n}$ 形式的数（m、n 为互质整数，且 $n\neq0$）．

下面，介绍几种在有理数的计算中常用到的方法和技巧．

（一）凑整与分拆

凑整指的是在有理数计算中运用运算律和运算法则将算式中的数凑成整十、整百、整千的数，或者将小数、分数凑成整数．拆项指的是将一个数拆分成两个或者多个数的和或者差．凑整和分拆的目的都是为了简化计算过程．

例 1 计算 $1+3+5+7+\cdots+99$

解 原式 $=(1+99)+(3+97)+(5+95)+\cdots+(49+51)$

$$=\underbrace{100+100+100+\cdots+100}_{25个}$$

$$=100\times25=2500$$

例 2 计算① $\dfrac{979797}{989898}-\dfrac{9797}{9898}$； ② $\underbrace{99\cdots9}_{1994个}\times\underbrace{99\cdots9}_{1994个}+1\underbrace{99\cdots9}_{1994个}$

解 ① $\dfrac{979797}{989898}-\dfrac{9797}{9898}$

$$=\frac{97\times10000+97\times100+97}{98\times10000+98\times100+98}-\frac{97\times100+97}{98\times100+98}$$

$$=\frac{97\times(10000+100+1)}{98\times(10000+100+1)}-\frac{97\times(100+1)}{98\times(100+1)}$$

$$=\frac{97}{98}-\frac{97}{98}$$

$$=0$$

②原式 $=(1\underbrace{000\cdots0}_{1994个}-1)\times\underbrace{99\cdots9}_{1994个}+1\underbrace{99\cdots9}_{1994个}$

$$=\underbrace{99\cdots9}_{1994个}\underbrace{00\cdots0}_{1994个}-\underbrace{99\cdots9}_{1994个}+\underbrace{99\cdots9}_{1994个}+1\underbrace{00\cdots0}_{1994个}$$

$$=\underbrace{99\cdots9}_{1994个}\underbrace{00\cdots0}_{1994个}+1\underbrace{00\cdots0}_{1994个}=1\underbrace{00\cdots0}_{2\times1994个}$$

在例 1 中，将算式中的数分成 25 对，每对数凑成 100；在例(2)中，将 $\underbrace{99\cdots9}_{1994个}$ 分拆成 $1\underbrace{00\cdots0}_{1994个}$ 与 1 的差，将 $1\underbrace{99\cdots9}_{1994个}$ 分拆成 $\underbrace{99\cdots9}_{1994个}$ 与 $1\underbrace{00\cdots0}_{1994个}$ 的和，其计算过程比直接计算要简便的多.

应用凑整与分拆方法进行有理数的计算时，要注意观察算式中各数的特点及其联系，进行有效地凑整和分拆. 但有时候，这种特点并不明显，需要对算式中的数仔细观察，发现其规律.

例 3 计算 $1991\div25-1992\times12.5+1993\times0.5$

分析 该式从表面看不出凑整的可能，注意到 $25\times4=100$，$1.25\times8=10$，$0.5\times2=1$，对原式中的数进行凑整、简化计算.

解　原式$=1991\times4\div(25\times4)-(1992\div8)\times1.25\times8+(1993\div2)\times0.5\times2$

$=(1991\times4)\div100-(1992\div8)\times10+(1993\div2)\times1$

$=79.64-2490+996.5$

$=76.14-2490+1000$

$=1076.14-2490$

$=-1413.86$

例 4　计算 $57\frac{1}{13}\div7-31\frac{15}{26}\times2$

解　原式$=\left(56+\frac{14}{13}\right)\div7-\left(31+\frac{15}{26}\right)\times2$

$=56\div7+\frac{14}{13}\div7-31\times2-\frac{15}{26}\times2$

$=(8-62)+\frac{2}{13}-\frac{15}{13}=-54-1=-55$

例 5　计算　$1996+1995\times1996+1995\times1996^2+\cdots+1995\times1996^{1994}+1995\times1996^{1995}$

分析　将算式中的 1995 分拆成 1996 与 1 的差.

解　原式$=1996+(1996-1)\times1996+(1996-1)\times1996^2$

$+(1996-1)\times1996^3+\cdots+(1996-1)\times1996^{1994}$

$+(1996-1)\times1996^{1995}$

$=1996+(1996^2-1996)+(1996^3-1996^2)$

$+(1996^4-1996^3)+\cdots+(1996^{1995}-1996^{1994})$

$+(1996^{1996}-1996^{1995})$

$=1996^{1996}$

例 6　两个 1999 位整数相乘：$\underbrace{11\cdots1}_{1999个1}\times\underbrace{11\cdots11}_{1999个1}$，问乘积的各位数字之和是多少？

解　$\underbrace{11\cdots11}_{1999个1}\times\underbrace{11\cdots11}_{1999个1}$

$$=9\times\underbrace{11\cdots11}_{1999个1}\times\underbrace{11\cdots11}_{1999个1}\div9$$

$$=(1\ \underbrace{000\cdots00}_{1999个0}-1)\times\underbrace{11\cdots11}_{1999个1}\div9$$

$$=(\underbrace{11\cdots11}_{1999个1}\ \underbrace{00\cdots00}_{1999个0}-\ \underbrace{11\cdots11}_{1999个1})\div9$$

$$=\underbrace{11\cdots1}_{1998个1}10\ \underbrace{88\cdots8}_{1998个8}9\div9$$

$$\because\quad \underbrace{111111111}_{9个1}\div9=12345679$$

$$\underbrace{888888888}_{9个8}\div9=98765432$$

$$\therefore\quad \underbrace{11\cdots1}_{1998个1}0\ \underbrace{88\cdots8}_{1998个8}9\div9$$

$$=\underbrace{\underbrace{123456790}_{一段}\underbrace{123456790}\cdots\underbrace{123456790}}_{共222段}$$

$$\underbrace{\underbrace{987654320}_{一段}\underbrace{987654320}\cdots\underbrace{987654320}}_{共221段}\underbrace{987654321}_{一段}$$

因为　$1+2+3+4+5+6+7+9+0=37$

$9+8+7+6+5+4+3+2=44$

所以乘积的各位数字之和是:$37\times222+44\times221+45=17983$

(二)运用上式进行数的计算

前面已讲到过,数的计算实际上是一个运用数的运算律、运算法则进行推理的过程.除了应用数的运算律和运算法则以外,还有一些有用的公式对数的计算和式的计算有很大的帮助,这些公式就是后面将要学习的乘法公式.这一节里主要了解乘法公式在数的计算方面的应用.常用的公式有以下几个:

$$a\times b+a\times c=a\times(b+c) \quad ①$$

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b) \quad ②$$

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2 \quad ③$$

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2 \quad ④$$

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2) \quad ⑤$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2) \quad ⑥$$

公式①实际上就是乘法对加法的分配律，它告诉我们在乘法和加法的混合运算中，可以把共同的因数提取出来. 后面几个公式的证明比较简单，只需要根据运算律把公式右边的式子全部计算出来，其结果和公式左边的式子相同，就可以得到证明

例如：证明 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$$\begin{aligned}右边&=a\cdot a^2-a\cdot(ab)+a\cdot b^2+b\cdot a^2-b\cdot(ab)+b^3\\&=a^3-a^2b+ab^2+ba^2-ab^2+b^3\\&=a^3+b^3=左边\end{aligned}$$

在具体运用乘法公式进行有理数的计算中，也常常还要用到数的凑整和分拆的方法，通过观察算式的特点，或者把几个数的公约数提出来，或者通过乘法公式对算式变形后进行约分或者抵消，简化计算过程. 特别要注意公式的逆用和连续运用.

例 7 (1)计算 $88888\times22222+33333\times7408$；

(2)$\dfrac{1995^3-2\times1995^2-1993}{1995^3+1995^2-1996}$

分析 表面上看，第一小题中并没有公因数，但将式子中的数变形后，可以找到公因数 11111，利用乘法公式①简化运算. 第二小题中，分子、分母的前两项有公因数 1995^2 可提，提出公因数后可以简化计算.

解 (1)原式$=11111\times8\times22222+11111\times3\times7408$

$$\begin{aligned}&=11111\times(8\times22222+3\times7408)\\&=11111\times(177776+22224)\\&=11111\times200000\\&=2222200000\end{aligned}$$

(2)原式$=\dfrac{1995^2\times(1995-2)-1993}{1995^2\times(1995+1)-1996}$

$$=\frac{1995^2\times1993-1993}{1995^2\times1996-1996}$$

$$=\frac{1993\times(1995^2-1)}{1996\times(1995^2-1)}$$

$$=\frac{1993}{1996}$$

例 8 计算(1) 889×891;

(2) 55^3+45^3;

(3) $1.2345^2+0.7655^2+2.469\times0.7655$

分析 注意

(1)中 889 和 891 的关系:$889=890-1$, $891=890+1$.

(2)中的两数正好合乎 a^3+b^3 的形式.

解 (1) $889\times891=(890-1)\times(890+1)=(890)^2-1$

$=(900-10)^2-1$

$=900^2-2\times900\times10+10^2-1$

$=810000-18000+100-1$

$=792099$

(2) $55^3+45^3=(55+45)(55^2-55\times45+45^2)$

$=100\times[(50+5)^2-(50+5)(50-5)+(50-5)^2]$

$=100\times[50^2+2\times5\times50+5^2-50^2+5^2+50^2-2\times50\times5+5^2]$

$=100\times(3\times5^2+50^2)$

$=100\times(75+2500)=257500$

(3) $1.2345^2+0.7655^2+2.469\times0.7655$

$=1.2345^2+2\times1.2345\times0.7655+0.7655^2$

$=(1.2345+0.7655)^2$

$=2^2=4$

例 9 计算(1) $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{11^2}\right)\left(1-\frac{1}{12^2}\right)$;

(2) $(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)(3^{32}+1)$

分析 因为 $1^2=1$,第 1 小题中的每一个因数都可以利用乘法公

式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$进行化简，第 2 小题中虽然没有$(a+b)\times(a-b)$的形式，可以发现其中的 $3,3^2,3^4,3^8,3^{16},3^{32}$，每一个都是前面一个的平方，同时乘以并且除以某一数后反复应用公式$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

解 (1) $$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{11^2}\right)\left(1-\frac{1}{12^2}\right)$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)$$
$$\times\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{12}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{12}\right)$$
$$=\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{12}\right)\right]$$
$$\times\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{12}\right)\right]$$
$$=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{11}{12}\right]$$
$$\times\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{12}{11}\cdot\frac{13}{12}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{13}{12}$$
$$=\frac{13}{24}$$

(2) $$(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)(3^{32}+1)$$
$$=\frac{(3-1)(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)(3^{32}+1)}{(3-1)}$$
$$=\frac{(3^2-1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)(3^{32}+1)}{2}$$
$$=\frac{(3^4-1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)(3^{32}+1)}{2}$$
$$=\frac{(3^{64}-1)}{2}$$

说明 例 9 中的问题和解题技巧都可以推广到一般.

例 10 $\underbrace{99\cdots9}_{1993个}\times\underbrace{999\cdots9}_{1993个}+1\ \underbrace{99\cdots9}_{1993个}$

分析 $\underbrace{99\cdots9}_{1993个}=10^{1993}-1$，$1\underbrace{99\cdots9}_{1993个}=2\times10^{1993}-1$

解 原式 $=(10^{1993}-1)^2+1\underbrace{99\cdots9}_{1993个}$

$=(10^{1993})^2-2\times10^{1993}+1+2\times10^{1993}-1$

$=10^{3986}$

例 11 $\dfrac{9876543210}{(9876543211)^2-9876543210\times9876543212}$

分析 式中出现的几个数 9876543210，9876543211，9876543212 都与 9876543211 关系密切.

解 $9876543210=9876543211-1$

$9876543212=9876543211+1$

$\therefore$ 原式 $=\dfrac{9876543210}{9876543211^2-(9876543211-1)(9876543211+1)}$

$=\dfrac{9876543210}{9876543211^2-9876543211^2+1}=9876543210$

例 12 计算 $\dfrac{1}{1998^3-1997(1998^2+1999)}$

分析 算式中的几个数 1998，1997，1999 都与 1998 关系密切.

$1997(1998^2+1999)=(1998-1)(1998^2+1998+1)$

可应用公式 $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

解 原式 $=\dfrac{1}{1998^3-(1998-1)(1998^2+1998+1)}$

$=\dfrac{1}{1998^3-(1998^3-1)}$

$=1$

(三)特殊的分数求和

分数求和的一般运算方法是将算式中各个分数化为同分母的分数后，然后再分子相加减. 但是对于特殊分数的求和可通过拆项、抵消等简便计算，请看下面的例子：

例 13 计算 $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}$

分析 由于题目中分数的个数较多，并且分母各不相同，所以常规计算方法的计算量较大.注意到题目中的分母均为两个连续自然数的乘积，如：$\frac{1}{2}=\frac{1}{1\times2}$，$\frac{1}{6}=\frac{1}{2\times3}$，$\frac{1}{12}=\frac{1}{3\times4}$等等，现设法将式子中的分数拆成两个分数的差以达到化简的目的.

解 原式$=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{8\times9}+\frac{1}{9\times10}$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots$$

$$+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)$$

$$=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$$

说明 例 13 中将一个分数分解成两个分数的差是利用式子：$\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{(n+1)}$，这个式子比较容易理解，因为

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{(n+1)}=\frac{(n+1)-n}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}$$

利用这个式子不难发现：

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\frac{1}{(n-1)}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{(n+1)}$$

$$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

例 13 中应用的求特殊分数和的简便方法主要是利用拆项使计算简化.对于特殊分数的拆项，经常用到的有以下一些式子：

(1) $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

(2) $\frac{m+n}{m\cdot n}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ 或 $\frac{1}{m\cdot n}=\frac{1}{m+n}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)$

(3) $\frac{m}{n(n+m)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+m}$ 或 $\frac{1}{n(n+m)}=\frac{1}{m}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+m}\right)$

(4) $\dfrac{2}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

(5) $\dfrac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

这些式子的证明比较简单,可以从等式的右边入手,经过通分、化简得到式子的左边.

例如:证明 $\dfrac{2}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

证明 右边 $=\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

$$=\frac{(n+2)-n}{n(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{2}{n(n+1)(n+2)}=\text{左边}$$

例 14 计算:

$$\frac{3}{2\times 2}+\frac{3}{2\times 2\times 3}+\frac{3}{2\times 3\times 4}+\cdots+\frac{3}{2\times(n-2)(n-1)}+\frac{3}{2\times(n-1)n}+\frac{3}{2\times n\times(n+1)}$$

分析 这个问题可以化归成例 12 中的问题,只需提出公因数即可.

解 原式 $=\dfrac{3}{2}\times\left[\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\dfrac{1}{3\times 4}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)n}+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]$

$$=\frac{3}{2}\times\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\frac{1}{(n-1)}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{(n+1)}\right]$$

$$=\frac{3}{2}\left[1-\frac{1}{(n+1)}\right]$$

$$=\frac{3n}{2(n+1)}$$

例 15 计算:

$$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

分析 可利用等式$\frac{1}{n(n+m)}=\frac{1}{m}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+m}\right)$将分数拆项：

$$\frac{1}{1\times3}=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}\right),\frac{1}{3\times5}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$$

一般的有

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\times\left[\frac{1}{(2n-1)}-\frac{1}{(2n+1)}\right]$$

解 原式$=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)$

$+\cdots+\frac{1}{2}\times\left[\frac{1}{(2n-1)}-\frac{1}{(2n+1)}\right]$

$=\frac{1}{2}\times\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right.$

$\left.+\cdots+\frac{1}{(2n-1)}-\frac{1}{(2n+1)}\right]$

$=\frac{1}{2}\times\left[1-\frac{1}{(2n+1)}\right]$

$=\frac{n}{2n+1}$

例 16 计算：

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+\cdots+\frac{1}{1996\times1997\times1998}$$

分析 应用等式$\frac{2}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

将算式化简.

解

原式$=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{1\times2\times3}+\frac{2}{2\times3\times4}+\frac{2}{3\times4\times5}+\cdots+\frac{2}{1996\times1997\times1998}\right]$

$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}\right)+\left(\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4}\right)+\left(\frac{1}{3\times4}-\frac{1}{4\times5}\right)\right.$

$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{1996\times1997}-\frac{1}{1997\times1998}\right)\right]$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{1997\times1998}\right)=\frac{997501}{3990006}$$

（四）特殊数列的求和

我们将按顺序排列的一列数叫做数列，例如

$$2,4,8,16,\cdots,2^n,\cdots;$$

$$1,3,5,7,\cdots,(2n-1),\cdots.$$

都是数列．这里要讨论两类特殊数列的求和问题，即等差数列和等比数列的求和问题．首先了解一下什么是等差数列？什么是等比数列？

观察下面的几个数列：

$$1,3,5,7,9,11\cdots$$

$$3,8,13,18,23,28,\cdots$$

$$0.4,0.38,0.36,0.34,\cdots$$

$$\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{5}{8},\frac{7}{8},\frac{9}{8},\cdots$$

这几个数列有一个共同的特点，即从第二项开始，每一项减去它前面一项所得到的差是相等的，这样的数列叫**等差数列**，称那个共同的差叫**公差**．

等差数列求和问题中最典型的一个例子就是大数学家高斯在幼年时巧解 $1+2+3+4+\cdots+100$ 的故事．高斯采用的方法如下：

令 $s=1+2+3+\cdots+99+100$ ①

$s=100+99+\cdots+3+2+1$ ②

对比①式和②式排在同一位置上的各项可以发现 $1+100=2+99=3+98=\cdots=99+2=100+1=101$，若将①式和②式的对应项相加，得：

$$2s=\underbrace{101+101+101+\cdots+101}_{100个}=100\times101$$

$$s=\frac{100\times101}{2}=5050$$

事实上，高斯巧妙解题的方法并不是偶然的，它可以推广到一般情况．