



研究生教材

振动力学

倪振华 编著

西安交通大学出版社

《研究生教材》总序

研究生教育是我国高等教育的最高层次，是为国家培养高层次的人才。他们必须在本门学科中掌握坚实的基础理论和系统的专门知识，以及从事科学研究工作或担负专门技术工作的能力。这些要求具体体现在研究生的学位课程和学位论文中。

认真建设好研究生学位课程是研究生培养中的重要环节。为此，我们组织出版这套《研究生教材》，以满足当前研究生教学，主要是公共课和一批新型的学位课程的教学需要。教材作者都是多年从事研究生教学工作，有着丰富教学和科学研究经验的教师。

这套教材首先着眼于研究生未来工作和高技术发展的需要，充分反映国内外的最新学术动态，使研究生学习之后，能迅速接近当代科技发展的前沿，以适应“四化”建设的要求；其次，也注意到研究生公共课程和学位课程应有它最稳定、最基本的内容，是研究生掌握坚实的基础理论和系统的专门知识所必要的。因此，在研究生教材中仍应强调突出重点，突出基本原理和基本内容，以保持学位课程的相对稳定性和系统性，内容有足够的深度，而且对本门课程有较大的覆盖面。

这套《研究生教材》虽然从选题、大纲、组织编写到编辑出版，都经过了认真的调查论证和细致的定稿工作，但毕竟是第一次编辑这样高层次的教材系列，水平和经验都感不足，缺点与错误在所难免。希望通过反复的教学实践，广泛听取校内外专家学者和使用者的意见，使其不断改进和完善。

西安交通大学研究生院
西安交通大学出版社

1986年12月

FRE 10

序 言

振动力学这门课程，在我校开设近 30 年来，一直是一门备受重视和欢迎的课程，尤其是随着工业的现代化发展，人们越来越认识到振动往往是工程项目成败的关键问题。现今这门课程已被许多专业所选用。

在本书出版之际，我愿献上一束鲜花，以表示对广大读者的问候，同时也以此表示我对我的学生和同事，本书作者倪振华副教授的谢意和祝贺。他完成了本该由我编写的这本书，大体上反映了我对这门课程的内容安排和讲授经验，并且在某些方面又作了进一步的新的发挥。这一束鲜花是凝结着先哲智慧的两句拉丁格言，它们历来被我视为珍宝和使我在教学和科研中取得些许成功的座右铭。同时它们也说明了为什么振动力学这门课程会一直受到学生们热爱的内在原因。

Simplex sigillum veri——简单是真的印记

Pulchritudo splendor veritatis——美是真理的光辉

第一句拉丁格言，作为天才的先辈们对未来的将发现新事物的人们的告诫，以大字刻在世界上最负盛名的高等学府之一的哥廷根大学的物理学报告厅里。振动力学这门课程向人们展示了令人迷惑的杂乱的振动现象，是如何被出奇深刻地归结为最简单的单自由度振动。正是这种“柳暗花明又一村”的清彻印记，使青年们感悟到求知欲的真谛。

第二句拉丁格言启示人们，探索者最初是借助于科学美、借助于这一真理的光辉、借助于它的照耀来认识科学真理的。振动力学中通过变换向人们揭示出，对物体一记敲击而引起的振动，包含了全部等量正弦激励引起的物体振动，反映了物体关于振动

的全部固有属性。类似这种由绚丽的科学美引导人们达到对事物本质的洞察的鲜明事例，有哪一个青年会不受到震撼和鼓舞。正是这种真理的光辉，使青年人体验到自身创造欲的萌动。

美国的罗斯福总统曾在宾夕法尼亚大学建校 200 周年纪念会上发表演说时说道：“我们不能总是为我们的青年造就美好的未来，但我们能够为未来造就我们的青年一代。”他还指出，教育的作用是使国家的生命得以延续。

如果采用本书，能够在授予未来的工程师们以解决振动问题的原则、理论和方法的实际知识的同时，有助于激发起青年人继承和发挥先驱者们在科学征途中敢作敢为、勇于创造的优秀文明，那是我们最大的幸福了。

陈绍汀

1988年12月18日

前 言

几十年前人们在设计和制造振动问题突出的机械和结构时，还不得不采纳静态设计、动态校核弥补的办法。随着高速数字计算机的出现和振动理论及现代测试技术的迅速发展，现在已有可能在设计研制阶段就按照动态的本来面目，采取综合措施处理振动问题。振动在当今不仅是作为基础科学的力学的一个重要分支，而且正走上向工程科学发展的道路，它在航空、机械、船舶、车辆、建筑和水利等工业技术部门中占有愈来愈重要的地位。因此，掌握振动的基本理论和分析方法对于广大工程技术人员是必不可少的。

本书的主要内容曾以校内讲义的形式对西安交通大学机械系、动力系、能源系等有关专业的研究生和力学系高年级本科生讲授过多遍。这次重新编写时，选材上汲取了国内外有关机械振动和结构动力学方面较好著作的适当内容，将传统设置的“两自由度系统的振动”归入“多自由度系统的振动”，全部采用矩阵分析方法，对弹性体固有振动引入变分式的应用；既对经典内容作严谨详尽的阐述，又尽可能结合工程应用，并反映近代分析方法和数值计算技术的发展等等，希望这些能构成本书的特色。

全书共七章。绪论介绍了工程中振动问题的三种基本提法和振动的分类。第一章对各类确定性振动的波形分析和频谱分析方法作了简单介绍。第二章讨论单自由度无阻尼及有阻尼系统的自由振动，着重介绍了计算固有频率的几种常用方法。第三章讨论单自由度系统的强迫振动理论及其在一系列工程问题中的应用，该章是全书的基础理论部分。第四章着重讨论多自由度系统的固有振动和求解强迫振动的振型叠加法，是全书的核心理论部分，

第 4.12 节关于复模态方法的介绍是较深入的内容,反映了分析方法的近代发展。第五章介绍求解多自由度系统振动的经典的和近代的计算方法,所选的八个方法兼顾了简单系统和复杂系统、工程常用算法和近代数值方法。第六章前六节是第四章模态分析和模态展开的基本理论体系在弹性杆、梁振动问题中的贯彻和展开,第 6.7 节介绍固有频率的变分式,后续三节均按变分式的角度叙述。第七章介绍薄板横向振动的基本理论,带*号的 7.4 与 7.5 两节是固有频率的变分式在薄板振动问题中的贯彻和应用,为保持内容连贯而安排在 7.6 节前面,可作为参考资料,不必在课堂讲授。各章都附有适当数量的习题,藉以进一步拓宽基本理论的应用范围和工程背景。

本书可作为高等工科院校非力学专业的研究生和力学专业本科生 76 学时的振动理论课程教材,若仅选用第一章至第三章、第四章(不包括 4.12 节)、第五章(不包括 5.5 及 5.6 节)和第六章(不包括 6.4 节及 6.7 至 6.10 节),本书也可作为少学时(约 50 学时)的大学本科振动课教材。

中国力学学会理事、中国振动工程学会常务理事陈绍汀教授在我撰写本书过程中,在各方面给予了大力帮助,仔细地审阅了书稿,提出许多指导性意见和具体建议,并为本书作了富有哲理的序言,我谨致以深切的感谢。

徐晖、张希农老师在使用原讲义授课时提出一些改进意见,也一并表示谢意。

由于著者水平有限,书中错误和疏漏之处在所难免,恳望读者指教。

倪振华

1988 年秋

于西安交通大学

目 录

绪 论

第一章 简谐振动与频谱分析

- 1.1 简谐振动及其表示方法.....6
- 1.2 周期振动的谐波分析12
- 1.3 非周期振动与富里叶积分20
- 1.4 δ 函数及其应用.....26
- 习题.....30

第二章 单自由度系统的自由振动

- 2.1 弹簧质量系统的固有振动和自由振动35
- 2.2 能量法44
- 2.3 瑞利法48
- 2.4 等效质量与等效刚度52
- 2.5 有粘性阻尼的自由振动61
- 习题.....70

第三章 单自由度系统的强迫振动

- 3.1 简谐激励下的强迫振动(稳态阶段) } \checkmark 79
- 3.2 简谐激励下的强迫振动(过渡阶段) }92
- 3.3 偏心质量引起的强迫振动99
- 3.4 支承运动引起的强迫振动.....104
- 3.5 振动的隔离.....108
- 3.6 惯性式测振仪.....111
- 3.7 单盘转子的临界转速.....116
- 3.8 强迫振动中的能量关系.....121
- 3.9 阻尼.....124

3.10	周期激励的响应 ✓	132
3.11	任意激励的响应 ✓	136
3.12	响应谱	146
	习题	151
第四章 多自由度系统的振动		
4.1	运动微分方程	161
4.2	耦合与坐标变换	177
4.3	固有频率和主振型	182
4.4	主坐标和正则坐标	196
4.5	固有频率相等的情况	207
4.6	固有频率为零的情况	213
4.7	无阻尼系统对初始条件的响应	223
4.8	无阻尼系统对任意激励的响应	227
4.9	动力吸振器	234
4.10	多自由度系统的阻尼	239
4.11	有阻尼系统的响应	243
4.12	一般粘性阻尼系统的响应	254
	习题	267
第五章 多自由度系统振动的近似解法		
5.1	邓柯莱法	277
5.2	矩阵迭代法	280
5.3	瑞利法	288
5.4	里兹法	295
5.5	子空间迭代法	301
5.6	振型截断法	308
5.7	霍尔兹法	317
5.8	传递矩阵法	322
	习题	335

第六章 弹性体的一维振动

6.1 一维波动方程	338
6.2 杆的纵向固有振动	342
6.3 杆的纵向强迫振动	349
6.4 端点带有集中质量或弹簧的杆	359
6.5 梁的横向固有振动	367
6.6 梁的横向强迫振动	376
6.7 固有频率的变分式	389
6.8 复杂边界的梁的固有振动	395
6.9 轴向力、转动惯量及剪切变形的影响	401
6.10 梁横向振动的近似解法	410
习题	422

第七章 薄板的横向振动

7.1 薄板横向振动微分方程	430
7.2 薄板的边界条件	437
7.3 矩形薄板的固有振动	441
*7.4 薄板固有频率的变分式	450
*7.5 薄板主振型的正交性	460
7.6 薄板的强迫振动	465
7.7 圆形薄板的横向振动	471
7.8 薄板振动的近似解法	480
习题	489

习题参考答案	492
--------	-----

主要参考书目	521
--------	-----

绪 论

从广泛的意义上说，如果表征一种运动的物理量作时而增大时而减小的反复变化，就可以称这种运动为**振动**。又若变化着的物理量是一些机械量或力学量，例如物体的位移、速度、加速度、应力及应变等等，这种振动便称为**机械振动**。

振动力学是研究机械振动的运动学和动力学的一门课程。

机械振动对于大多数的工业机械、工程结构及仪器仪表是有害的，它常常是造成机械和结构恶性破坏和失效的直接原因。例如，1940年美国的 Tacoma Narrows 吊桥在中速风载下，因卡门漩涡引起桥身扭转振动和上下振动而坍塌。1972年日本海南电厂的一台66万千瓦汽轮发电机组，在试车中因发生异常振动而全机毁坏，长达51米的主轴断裂飞散，联轴节及汽轮机叶片竟穿透厂房飞落至百米以外。据统计，我国因运输车辆振动使包装不妥的产品受损、失效和破坏所造成的经济损失，一年达数亿元。超出规范标准的振动，缩短机器寿命，影响机械加工质量，降低机械及电子产品的使用性能，甚至产生公害，污染环境。现在，振动分析和振动设计已成为产品设计中的一个关键环节。学习振动力学的主要目的，就是掌握振动的基本理论和分析方法，用以确定和限制振动对工程结构和机械产品的性能、寿命及安全的有害影响。

振动也有可利用的一面，如工业上常采用的振动筛选、振动沉桩、振动输送以及按振动理论设计的测量传感器、地震仪等等即这方面的典型例子。学习振动力学的另一目的，就是运用振动理论去创造和设计新型振动设备、仪表及自动化装置。

工程中的振动问题有着多种多样的提法。通常，研究的对象

被称作**系统**，它可以是一个零部件、一台机器或者一个完整的工程结构等等。外界激振力等因素亦即**激励(输入)**，作用于系统使之产生**振动响应(输出)**，这三者之间的关系可以用下面常见的框图表示：



振动问题的提法大致可以按欲求上述框图里三个环节中的哪一个而归纳成三类。

第一类：已知激励和系统，求响应。

可以称这类问题为**系统动力响应分析**。这是工程中最基本和最常见的问题，其主要任务在于验算结构、产品等在工作时的动力响应(如变形、位移、应力等)是否满足预定的安全要求和其它要求。在产品的设计阶段，对具体设计方案进行动力响应验算，若不合要求再作修改，直到达到要求而最终确定设计方案，这一过程就是所谓**振动设计**。就上述框图的流向而言，动力响应问题属于由因求果的正问题，这也是振动力学最主要的内容。

第二类：已知激励和响应，求系统。

可以称这类问题为**系统识别**。这里所谓求系统，主要是指获得对于系统的物理参数(如**质量、刚度及阻尼系数**等)和系统关于振动的固有特性(如**固有频率、主振型**等)的认识。实际上处理这类问题时，待求的“系统”实物是现实存在着的，由于种种原因，难以用分析的方法完善地建立力学模型和掌握它的振动固有特性。这时就把实际存在的系统仍然作为未被认识的“黑箱”或未被完全认识的“灰箱”，通过对它进行振动试验，记录输入输出数据并作数据处理，反过来求出系统的有关参数和特性。系统识别以估计物理参数为任务的叫做**物理参数识别**，以估计系统振动固有特性为任务的叫做**模态参数识别**或**试验模态分析**。系统识别是振动的第一种逆问题，振动力学是它的基础理论和依据。

第三类：已知系统和响应，求激励。

可以称这类问题为**环境预测**。例如为了避免产品在公路运输中损坏，需要通过实地行车记录汽车振动或产品振动，以估计运输过程是怎样一种振动环境，运输过程对于产品是怎样一种激励，这样才能有根据地设计可靠而有效的减震包装。由于这类物理环境大都是因时因地而异的，各次试验结果在表观上各不相同，所以环境预测问题除了以振动力学为理论基础之外，一般还要利用随机过程和数理统计方面的知识。环境预测是振动的第二种逆问题。

比较复杂的工程振动问题可能同时包含着正、逆两种性质的问题。由于近几十年内高速数字计算机的出现和计算机软件、现代振动测试方法的迅速发展，才使得复杂振动问题的理论分析及实验研究成为可能。

与力学的其它分支学科相同，振动力学也需借助力学模型进行研究。模型中的振动系统可以分为两大类：**连续系统与离散系统**。实际工程结构的物理参数，例如板壳、梁、轴等的质量及弹性，一般是连续分布的，保持这种特点抽象出的模型中的系统称为连续系统或**分布参数系统**。绝大多数场合中，为了能够分析或者便于分析，需要通过适当的准则将分布参数“凝缩”成有限个离散参数，这样便得到离散系统。

由于所具有的自由度数目的区别，连续系统又称为**无限自由度系统**，离散系统则称为**多自由度系统**，它的最简单情况是**单自由度系统**。所谓一个系统的**自由度**数，是指完全描述该系统一切部位在任何瞬时的位置所需要的独立坐标的数目。

分析连续系统及离散系统的振动的数学工具有所不同，前者借助于偏微分方程，后者借助于常微分方程。

离散系统中的一种典型是由有限个惯性元件、弹性元件及阻尼元件等组成的系统，这类系统又称为**集中参数系统**。其中，惯

性元件是对系统的惯性的抽象，表现为仅计及质量的质点或者仅计及转动惯量和质量的刚体；弹性元件是对系统的弹性的抽象，表现为不计质量的弹簧、扭转弹簧或者仅具有某种刚度（如抗弯刚度、抗扭刚度等）但不具有质量的梁段、轴段等；阻尼元件既不具有惯性，也不具有弹性，它是对系统中的阻尼因素或有意识施加的阻尼器件的抽象，通常表示为阻尼缓冲器。阻尼元件是一种耗能元件，主要以热能形式消耗着振动过程中的机械能，这与惯性元件能贮存动能、弹性元件能贮存弹性势能在性质上完全不同。

振动及系统也可以按运动微分方程的形式分为：

线性振动——描述其运动的方程为线性微分方程，相应的系统称为**线性系统**。线性振动的一个重要特性是线性叠加原理成立。

非线性振动——描述其运动的方程为非线性微分方程，相应的系统称为**非线性系统**。对于非线性振动，线性叠加原理不再成立。

按激励的有无和性质，振动还可以分为：

固有振动——无激励时系统所有可能的运动的集合。固有振动不是现实的振动，它仅反映系统关于振动的固有属性。

自由振动——激励消失后系统所作的振动。这是现实的振动。

强迫振动——系统在外界激励下所作的振动。

随机振动——系统在非确定性的随机激励下所作的振动。行驶在公路上的汽车的振动就是随机振动的典型例子。另外，物理参数具有随机性质的系统发生的振动也属于随机振动。

自激振动——系统受到由其自身运动诱发出来的激励作用而产生和维持的振动。一般说来，这时系统包含有补充能量的能源。演奏提琴所发出的乐声，就是琴弦作自激振动所致。车床切削加

工时在某种切削用量下所发生的激烈的高频振动，架空电缆在风作用下所发生的与风向垂直的上下振动以及飞机机翼的颤振等，都属于自激振动。

参数振动——激励因素以系统本身的参数随时间变化的形式出现的振动。秋千在初始小摆角下被越荡越高就是参数振动的一例。在这里秋千受到的激励以摆长随时间变化的形式出现，而摆长的变化由人体的下蹲及站直造成。一根装有重盘的矩形轴旋转时，由轴的截面惯性矩随时间变化而引起的振动，也是参数振动的例子。

本书主要介绍单自由度、多自由度线性系统和弹性体的固有振动、自由振动及强迫振动，着重讨论它们的基本理论、分析方法及其在工程中的应用。

第一章 简谐振动与频谱分析

能够以函数关系表示的振动，按其运动的表现形式可以分为**周期振动**和**非周期振动**。本章首先介绍形式最简单也最基本的一种周期振动——**简谐振动**的特点、表示方法以及不同频率的简谐振动的合成。一般的周期振动可以借助富里叶级数表示成一系列简谐振动(或称**谐波**)的叠加，该过程称作**谐波分析**。非周期振动则需要通过富里叶积分作谐波分析。周期振动与非周期振动中不同频率的谐波的幅值及相位，可以用图形来表示，这些图形称为**频谱图**。**单位脉冲函数**是描述脉冲力的有力工具，它的性质及其应用在本章也作了简单介绍。

1.1 简谐振动及其表示方法

简谐振动是周期振动中最简单的一种，它可以用正弦函数表示为

$$x = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (1.1)$$

其中 A 为**振幅**， ω 为**圆频率**， φ 为**初相位**。圆频率 ω 又称**角频率**，它与**频率 f** 、**周期 T** 的关系为

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (1.2)$$

ω 、 f 及 T 的单位分别是弧度/秒(rad/s)、赫芝(Hz)及秒(s)。为了方便，以后也将 ω 称为**频率**。

就简谐振动而言，得知振幅、频率及初相位三者，就确定了一个简谐振动。如同把力的大小、方向和作用点称作力的三要素，通常把振幅、频率和初相位称为简谐振动的三要素。式(1.1)的简谐振动的图象见图 1-1。

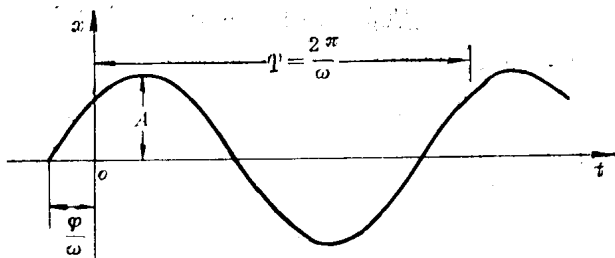


图 1-1

如果视 x 为位移, 式(1.1)对时间 t 求导便得到速度及加速度

$$\dot{x} = A\omega \cos(\omega t + \varphi) = A\omega \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (1.3)$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) = A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi + \pi) \quad (1.4)$$

由上可见, 简谐振动中速度的相位超前位移 $\frac{\pi}{2}$, 而加速度的相位又超前速度 $\frac{\pi}{2}$ 。比较式(1.4)与(1.1), 得知加速度与位移有如下关系

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \quad (1.5)$$

即加速度大小与位移成正比, 但方向总与位移相反, 始终指向平衡位置。式(1.5)即下列微分方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (1.6)$$

这个微分方程的解是圆频率为 ω 的正弦函数或余弦函数。

简谐振动可以用平面上的**旋转矢量**表示。图 1-2(a) 中 OM 是一个长度为 A 、以 φ 角开始以等角速度 ω 逆时针绕原点 O 旋转的矢量, 任一瞬时 OM 在纵轴上的投影 ON 即式(1.1)中的简谐振动 $x = A \sin(\omega t + \varphi)$, 通常将这个旋转矢量画成图 1-2(b)。

利用旋转矢量能直观形象地表示出上述位移、速度及加速度之间的关系(见图1-2(c))。

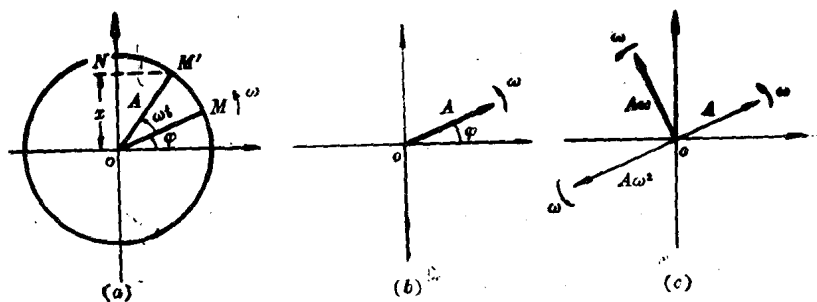


图 1-2

简谐振动也可以用复数表示。记 $i = \sqrt{-1}$ ，复数

$$z = Ae^{i(\omega t + \varphi)} = A \cos(\omega t + \varphi) + iA \sin(\omega t + \varphi) \quad (1.7)$$

表示了复平面上模为 A 、从 φ 角开始以等角速度 ω 逆时针绕原点旋转的一个矢量，它在虚轴上的投影，即虚部表示了式(1.1)的简谐振动。因此，位移 x 与它的复数表示 z 的关系可写为

$$x = \text{Im}(z) \quad (1.8)$$

式中 $\text{Im}(z)$ 为 z 的虚部。由于

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad -1 = e^{i\pi} \quad (1.9)$$

复数表示的速度及加速度为

$$\dot{z} = i\omega Ae^{i(\omega t + \varphi)} = \omega Ae^{i(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})} \quad (1.10)$$

$$\ddot{z} = -\omega^2 Ae^{i(\omega t + \varphi)} = \omega^2 Ae^{i(\omega t + \varphi + \pi)} \quad (1.11)$$

比较上面两式与(1.3)、(1.4)，得到

$$\dot{x} = \text{Im}(\dot{z}), \quad \ddot{x} = \text{Im}(\ddot{z}) \quad (1.12)$$

简谐振动的复数表示方法较便于分析，在以后解运动微分方程时