内 容 提 要

全书分概率与数理统计两部分，概率部分以讲清基本概念和思想方法为主，并配置了数量较多的例、习题；数理统计部分介绍[illegible]几个常用的统计推断方法：参数估计、假设检验和一元线[illegible].

[illegible]书可供中等专业学校招收高中毕业生的工科专业作为[illegible]材。

中等专业学校试用教材
招收高中毕业生的工科专业通用

高 等 数 学

(选学部分——概率与数理统计)

朱铱道 编

*

高等教育出版社出版
新华书店上海发行所发行
青浦任屯印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32 印张 6.75 字数 138,000
1983年3月第1版 1985年12月第6次印刷
印数 157,651-197,650

书号 13010·0868 定价 0.88 元

编者的话

本书根据1982年教育部审定的中专《数学教学大纲(试行草案)》(招收高中毕业生的工科专业通用)编写. 本书内容属于选学部分,供有关专业选用.

全书分两部分:概率与数理统计. 概率部分以讲清基本概念和它的思想方法为主. 同时,通过数量较多的例、习题说明它在各方面的应用. 数理统计介绍了部分常用的统计推断方法:参数估计、假设检验和一元线性回归.

使用本书时需注意:

(1) 本书的§1-10二元随机变量及其分布,是学习第二章数理统计的基础知识. 但因本节内容没列入《大纲》,讲授时,应另加2至4学时. 对于只学概率部分的专业,本节可以删去. 如果限于数学课总的学时数较少,不能讲授多元微积分,但又必须学习数理统计知识的某些专业,也可以不讲本节. 同时,应适当降低数理统计基本概念的要求,以讲授使用统计方法为主.

(2) 由于概率与数理统计是一个有特色的数学分支,它的思想方法别具一格. 所以对初学者来说,解习题往往会感到困难. 教学中,应在教师指导下根据专业需要和教学的实际情况,选择部分习题作为课外作业为宜. 书中小字部分和带*号的习题,只供某些专业需要和学有余力的读者选用.

本书由北京工业学院孙树本同志主审，参加审稿的还有苏学同、王维锦、富国栋、杨裕生．审稿的同志对本书提出了很多宝贵的意见，编者在此表示衷心感谢．

本书由朱铉道编写．限于编者水平，加上时间仓促，错误和不当之处在所难免．恳切希望读者批评指正．

编　者

1983.1

目　　录

第一章 概 率

§1-1 随机事件

一、随机现象

在生产实践、科学实验和日常生活中，人们观察到的现象有两种不同的类型．一类是事先可预言的，即在相同条件下，它的结果总是肯定的；或者是根据它过去的状态，在相同条件下，完全可以预言将来的发展．称这一类现象为**确定性现象**（或**必然现象**）．例如，在标准大气压力下，纯水加热到100°C必然沸腾；导体通电后会发热；在射击时（假设空气阻力可以忽略不计）弹道完全由射击的初始条件（如炮弹的初速、发射角和弹道参数等）决定．研究这一类现象的规律性，所应用的数学工具是初等数学、微积分与微分方程等．另一类现象是事先不可预言的，即在相同条件下重复进行试验，每次结果不尽相同；或者是知道它过去的状况，在相同条件下，未来的发展事先却不能完全肯定．称这一类现象为**随机现象**（或**偶然现象**）．

例 1 往桌子上掷一枚硬币，如果规定某一面为"正面"，则正面可能向上，也可能向下．究竟出现这两种结果的哪一种，在投掷前是不能肯定的．

例 2 从含有一定个数次品的一批产品中任意抽取4件，其次品的件数可能是0，可能是1，2，3或4．抽取前不

能肯定被抽到的次品件数.

例 3 某战士打靶, 在一次射击中, 可能是“不中”, “命中 1 环”, “命中 2 环”, ……, “命中 10 环”. 这 11 种结果究竟出现哪一种, 射击前也是不能肯定的.

例 4 某电话总机, 在单位时间内接到呼唤的次数, 可能是 0, 1, 2, …. 究竟接到多少次呼唤, 在事先是不能预言的.

例 5 同一个车工在同样的工艺条件下车削外圆直径为 30(单位: 毫米)的某零件, 车完后测量外圆直径总不完全相同, 而且每个零件的直径在加工完成以前也是不能准确预言的.

上述五个例子都是随机现象. 对于随机现象由于人们事先不能断定它将发生哪一种结果, 因此, 从表面上看好象是不可捉摸的, 纯粹是偶然性起支配作用, 而没有什么必然性的东西. 其实不然, 实践告诉我们, 在相同的条件下, 对随机现象进行大量重复试验(或观察), 通过分析就会发现, 各种结果出现的可能性是有确定的规律性的, 这就是所谓**统计规律性**.

拿上面五个例子来说, 我们发现:

1. 在相同的条件下, 大量投掷同一枚硬币, 出现“正面向上”或“正面向下”的次数各为总投掷次数的二分之一左右;

2. 对同一批产品进行大量重复抽查, 可以观察到它的次品率;

3. 在同样的条件下, 该战士进行大量射击, 可以看出他的命中率;

4. 在相同的条件下, 大量记录该总机所接到的呼唤次数, 可以发现它总是在某一数附近作摆动;

5. 在相同的工艺条件下，该车工大量地车削同一种零件，零件的外圆直径总是在某一数值附近作微小的摆动。

由此可见，随机现象有两个显著的特点：

(1) 试验(或观察)前，不能预言发生哪一种结果——偶然性；

(2) 在相同条件下进行大量重复试验(或观察)时，呈现出统计规律性——必然性。

概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的一门数学学科。它在自然科学、社会科学、工农业生产和国防中有着越来越广泛的应用。例如，运用概率统计方法可进行气象、水文及地震预报；产品的抽样验收；在研制新产品、新工艺时，为寻求最佳生产方案可用它进行试验设计和数据处理；在自动控制中用它可给出数学模型以便通过电子计算机来控制工业生产；在通讯工程中可以提高信号的抗干扰性和分辨率等。本书将介绍一些概率与数理统计的初步知识。

二、事件

为了叙述方便，通常把一个科学试验或对某一事物的某一特征的观察，统称为一个**试验**。如果试验具备：

(1) 在相同条件下可以重复地进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

(3) 每次试验的结果事前不可能预言，则称该试验为**随机试验**。今后，我们所讨论的试验都是随机试验。所以，随机试验也简称为**试验**。容易看出，上面举的五个例子都是试验。

试验总是附有一组条件. 例如,在例1中,它要求:"硬币是匀称的;投掷时,放在手心上用一定的动作向上抛一次;让硬币落在同一张桌面上等". 这些条件就是条件组. 我们把条件组每实现一次叫做**一次试验**.

试验总有一个需要观察的目的,根据这个目的,试验被观察到多种不同的可能结果. 例如,在例1中,我们的目的是要观察硬币"正面向上"、"正面向下"这两个结果中究竟出现哪一个. 至于硬币落在桌面上哪一个位置,朝什么方向滚动等不是我们观察的目的,不算作结果. 通常把试验的每一个可能结果称为**随机事件**,简称**事件**,用字母 A, B, C, … 表示.

我们再来分析例2. 在例2中,条件组是:被抽验的这批产品的次品件数可能多于4件;抽样方式要作出某些规定,以符合随机抽样的特点;对抽取的产品要作相同的技术鉴定,以区分是好品还是次品等. 每当这样的条件组实现一次,即每做一次试验(目的是观察被抽到的次品的件数),其结果都不一定相同. 可能是事件

A_0: "全是正品"①,

可能是事件

A_1: "恰有一件次品", A_2: "恰有二件次品",

A_3: "恰有三件次品", A_4: "全是次品",

也可能是事件

B: "次品不多于两件", C: "至少有一件次品"

等.

再如,在例5中,条件组是:同一个车工,在相同的设备、

① 也可以写成 A_0="全是正品".

材料和工艺条件下加工同一种零件；车完后用相同的测量手段测量外圆直径等. 这样的条件组每实现一次，就是一次试验. 事件

A: “外圆直径为 30.55”,

B: “外圆直径为 29.98”,

C: “外圆直径小于 30.05”,

D: “外圆直径在区间(30, 31)内”

等都是可能出现的结果.

在一定条件组下(即每次试验中)必然发生的事件称为**必然事件**，记作 Ω.

例如：“在标准大气压力下，纯水加热到 100℃ 必然沸腾”;

“在一次射击中，‘不中’或‘命中’”;

“零件外圆的直径(数值)在区间$(0, +\infty)$内”

等都是必然事件.

在一定条件组下(即每次试验中)必然不发生的事件称为**不可能事件**，记作 $\emptyset$.

例如：“在标准大气压力下，温度 50℃ 的水处于气体或固体状态”;

“在一次射击中，既命中 2 环又命中 5 环”;

“零件外圆的直径既小于 30 又大于 30.10”

等都是不可能事件.

必然事件和不可能事件实质上都是确定性现象的表现. 但是，把它们看作是随机事件的两种特例，对于分析问题是有利的.

三、事件间的相互关系

进行一个试验，有这样或那样的事件发生，它们各有不同的特性，但彼此之间又有一定的联系．下面我们引进事件之间的一些重要关系和运算，这将有利于今后对事件和它的概率的叙述和研究．

1．包含关系

在例 3 中，如果令

A："命中 10 环"， B："至少命中 6 环"

那末，事件 A 与 B 的关系是：A 发生 B 也一定发生．这就是说，事件 B 包含了事件 A．

一般地，若事件 A 发生一定导致事件 B 发生，则称事件 B 包含了事件 A，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$．

如果 $A\subset B$，同时 $A\supset B$，那末称事件 A 与事件 B **相等**（或等价），记作 $A=B$．

显然，对任何事件 A，有 $A\subset\Omega$．另外，我们规定任何事件 A 都包含不可能事件，即 $\emptyset\subset A$．

今后我们常用图示法来表示事件之间的关系．将必然事件 Ω 画成一个方块，各事件画成方块内的各种图形．每次试验可理解为向"靶子"——方块 Ω 随机地"投入"一点．如果此点落在图形 A 中，就表示事件 A 发生，落在图形 B 中就意味着事件 B 发生．图 1-1 就表示 $A\subset B$，因为落在 A 中的点一定也落在 B 中，从图形上看，就是图形 B 包含了图形 A．

2．并（和）的关系

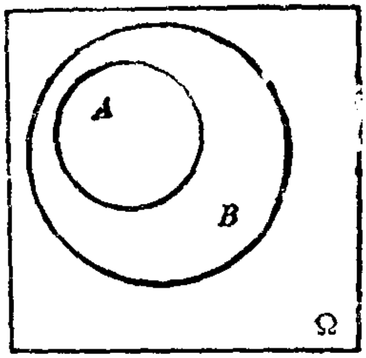

图 1-1

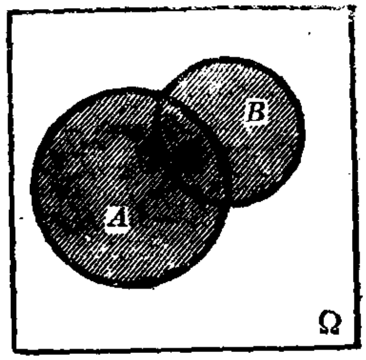

图 1-2

有两个民兵甲、乙向同一目标射击，如果令

A："甲击中目标"；

B："乙击中目标"；

C："击中目标"，

那末"事件 C 发生"等于"事件 A 与 B 中至少有一个发生"。

通常把"事件 A 与 B 中至少有一个发生"这一事件称为事件 A 与 B 的并(和)，记作 $A\cup B$①.

在图 1-2 中阴影部分表示事件 $A\cup B$，由图可知：

$$A\subset(A\cup B),\quad B\subset(A\cup B)$$

并且 $$A\cup A=A,\quad A\cup\Omega=\Omega,\quad A\cup\emptyset=A$$

类似地，"事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生"这一事件称为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并，记作 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$，即

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$$

① 有的书中也表示成 $A+B$，但这时"+"号的含义和通常意义是不同的。

3．交(积)的关系

"事件 A 与 B 同时发生"这一事件称为事件 A 与 B 的交(积)，记作 $A\cap B$，或 AB。

例如，在例 4 中，设

A："呼唤不多于 2 次"；

B："呼唤次数是奇数"；

C："恰好有一次呼唤"，

则
$$C=A\cap B$$

在图 1-3 中阴影部分表示事件 $A\cap B$。从图容易看出：

$$(A\cap B)\subset A,\quad (A\cap B)\subset B$$

并且
$$A\cap A=A,\quad A\cap\Omega=A,\quad A\cap\emptyset=\emptyset$$

类似地，"事件 A_1，A_2，…，A_n 同时发生"这一事件称为事件 A_1，A_2，…，A_n 的交，记作 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$，简记为 $\bigcap_{i=1}^{n}A_i$ 或 $A_1A_2\cdots A_n$。

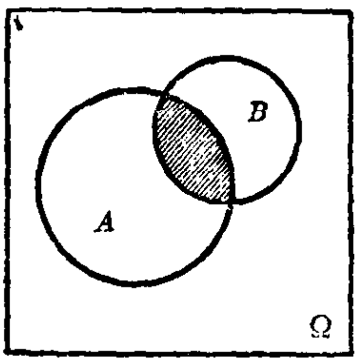

图 1-3

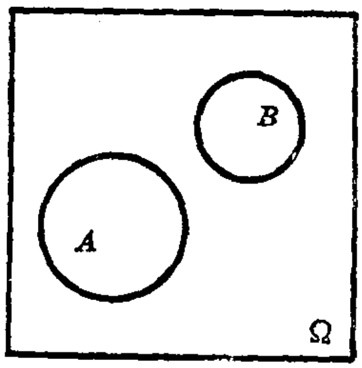

图 1-4

4．互不相容(互斥)关系

如果事件 A 与 B 在同一次试验中不能同时发生，即

$$A\cap B=\emptyset$$

则称事件 A 与 B 是互不相容(互斥)的(图 1-4)。

例如，在例 5 中，设

B：“外圆直径为 29.98”；

D：“外圆直径在区间(30, 31)内”，

则事件 B 与 D 是互不相容的。

如果事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，即

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

那末称这些事件构成一个互不相容的事件组。

例如，在例 3 中，设

A_i：“命中 i 环” $(i = 0, 1, 2, \cdots, 10)$，

则 $A_0, A_1, \cdots, A_{10}$ 这 11 个事件构成一个互不相容的事件组。

5．逆(对立)的关系

“事件 A 不发生”这一事件称为事件 A 的逆(对立)事件，记作 $\overline{A}$。

例如，在打靶中，我们设 A：“命中目标”，则 $\overline{A}$：“不中”。

又如，在例 2 中，若

A_0：“全是正品”，

则 $\overline{A}_0$：“全是正品不发生”=“至少有一件次品”。

又若 B：“次品不多于两件”，

则 $\overline{B}$：“次品多于两件”=“次品最少有三件”。

根据逆事件的含义，可以知道，事件 A 与 $\overline{A}$ 在一次试验中必然发生其中之一，但它们又不可能同时发生，即(见图 1-5)

$$A \cup \overline{A} = \Omega, \quad \text{且 } A \cap \overline{A} = \emptyset$$

由图 1-5 还容易得到：$\overline{\overline{A}} = A$，即事件 $\overline{A}$ 的逆事件是 A。

这就是说，事件 A 与 $\overline{A}$ 为互逆(互相对立)的.

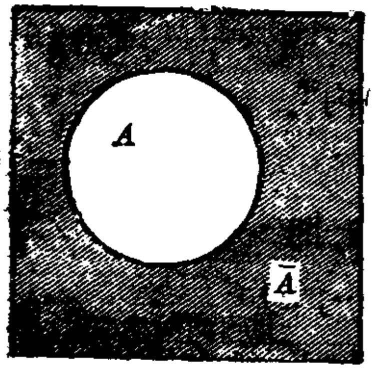

图 1-5

从上面的讨论可以看到，事件之间的包含、相等、并、交、逆关系与集合之间的包含、相等、并、交、余关系是一致的. 因此，事件之间的各种关系也称为事件的各种运算. 在进行事件运算时，运算的顺序作如下规定：先作括弧里面的运算，然后进行逆的运算，再进行交的运算，最后才进行并的运算.

借助于图示，容易得到，事件间的运算满足下列规律：

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$;

(2) 结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;

(3) 分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

(4) 对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$, $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

分配律和对偶律还可以推广到有限多个情形，即

$$A\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\bigcup_{i=1}^{n}(A\cap A_i),\quad A\cup\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=\bigcap_{i=1}^{n}(A\cup A_i)$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i,\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A}_i$$

例 6 如图 1-6 所示的电路中，设

A：“开关 a 合上”； B：“开关 b 合上”；

C：“开关 c 合上”； D：“灯 d 亮”，

那末，“开关 a, c 同时合上”必定导致“灯 d 亮”，即

$$(A\cap C)\subset D$$

同理，　　$(B\cap C)\subset D$

并且　$D=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

这就是说，事件"灯 d 亮"等于事件"开关 a，c 同时合上"、"开关 b，c 同时合上"至少发生一个.

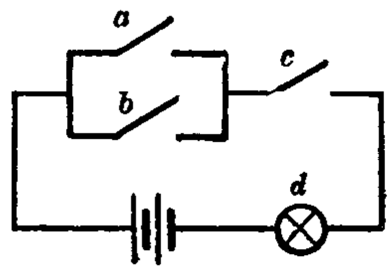

图　1-6

由事件的分配律，可以得到：

$$D=(A\cap C)\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap C$$

也就是说，"灯 d 亮"相当于"开关 a，b 至少有一个合上"且"开关 c 合上".

如果用事件的对偶律，那末又有：

$$\overline{D}=\overline{(A\cup B)\cap C}=(\overline{A\cup B})\cup\overline{C}=(\overline{A}\cap\overline{B})\cup\overline{C}$$

即"灯 d 不亮"意味着"开关 a、b 同时断开"、"开关 c 断开"至少发生一个.

由例 6 可见，事件的各种运算律完全符合实际情况.

例 7　对飞机进行两次射击（每次一弹），设

A_1："第一次射击击中飞机"；

A_2："第二次射击击中飞机"，

试用 A_1，A_2 及它们的逆事件表示下列各事件：

B："两弹都击中飞机"；

C："两弹都没击中飞机"；

D："有一弹击中飞机"；

E："至少有一弹击中飞机".

并指出 B、C、D、E 中哪些是互不相容的？哪些是互逆的？

解　由题设，得