04
0

高等学校教学用书

物理学教程

（下　册）

朱荣华　吕金钟　周文彧　编著

重庆大学出版社

物理学教程

（下册）

朱荣华 主 编

责任编辑 曾令维

*

重庆大学出版社出版发行

新 华 书 店 经 销

重庆建筑大学印刷厂印刷

*

开本:787×1092 1/16 印张:19.75 字数: 493 千

1993年12月第 1 版 1993年12月第 1 次印刷

印数:1-4000

ISBN 7-5624-0821-1/O·103 定价: 9.50 元

（川）新登字 020 号

教 学 说 明

该册包括第四卷、五两卷。

在振动与波一卷(第四卷)中,把波动光学包括在内,以避免不必要的重复,便于对各种各样的波作统一的描述。这卷中加强了以波与粒子之间本质区别为主线的波动普遍特征的讨论,以及驻波为能量定态的讨论。为第五卷中介绍现代物理的基本观点——物质的波粒二象性作好铺垫。把一维弦的演示实验的观察与力学分析,与波动的普遍特征的讨论联系起来,并为这种讨论提供一个直观的模型,加强了教材的适应性。为了反映现代观点,在阐明惠更斯-菲涅耳原理的基础上,进一步把傅里叶变换引入光学,力求按照傅里叶光学的观点,阐明波动光学的基本问题,使光学呈现现代面貌。尤为重要的是,由此引入的空间频率和频谱的概念,已成为目前迅速发展的光学信息处理、象质评价、成象理论等的基础,而且被引进了越来越多的科学技术部门。因此,在"光的衍射"一章以后,介绍了傅里叶光学中的几个基本概念,为学生进一步提高对光学知识的理解和深入学习光学的新知识奠定必要的基础。此卷内容可安排 24-26 学时。

在第五卷中,阐述了量子物理学基础。我们处理这部分教材的基本想法是:量子现象的神秘性与复杂性是在探索时期造成的。既由于经典物理传统观念的偏见,又由于当时支持量子力学新观念的实验图象不完整。其实,这种情况是任何一个科学新思想发展史上的共同特征,对学生来说,无需在教学中造成这样的困难。因此本教材致力于指导学生去思索一系列经过精心选择的物理事实,这些事实既简单明确,又能阐明重要的思想和原理。说明它与具有连续性特征的经典理论的偏离,以及对具有不连续特征的量子理论的支持。在叙述中既避开了历史的程序,又避开了数学上的困难论题,保持理论应有的逻辑性与系统性,用普通物理的方式阐明量子理论的基本事实、基本原理与基本规律。我们认为,学生学习这部分内容并不会比学习其它部分困难。

为防止从物理问题转向技术性数学问题,本书在一些论题上使用了半经典、半量子的方法,以获得与量子力学方程严格解相同的结论,而着力阐明这个理论中闪烁的新思想。因此学生无需了解特殊函数与解偏微分方程的分离变量法等数学问题。本书叙述量子理论过程中,力图在与"量子公设"协调一致的基础上,通过对"测量"的一般分析,对量子力学的数学方案作出物理诠释,向学生介绍微观世界必须遵循的内在逻辑,以及关于自然界的新图象。

量子理论已成为现代科学发明的组成部分,它的重要规律已经成为产生现代新技术的源泉。本书选择了激光、能带与超导现象作为量子规律应用的重要课题。可归属于电子技术的激光技术、晶体管技术、超导技术那样划时代的发明,使科学技术现代化了,在时间允许的情况下,可选择若干内容讲授。

科学应面向未来,从 1925 年创建量子力学起,距今天已经有大半个世纪了,不应给学生一种错误印象,即物理学是一门已经完成了的学科,而应该把物理学作为探索和阐明现实世界的一种过程介绍给学生,为此本书编写了"粒子物理的基本概念简介"一章,作为学生的阅读教材,让学生有机会了解有关物理学最新发展的一些信息,相信在这一章中已为实验证实了的重要内容,将随着它在技术领域内的广泛应用,逐步成为物理学必要的组成部分,此章节可以作为讲座内容向学生介绍。本书的重点仍然是量子物理学基础。

此卷内容需安排 20 学时。

目　录

第四卷　振动与波

本卷专门研究波动学，这是一个范围广泛的课题。自然界中观察到的波动现象有无限多样性，诸如水波、声波、电磁波（包括光波、无线电波等）、地震波、德布罗意波以及其它各种波。

本卷的主要目的是阐明波动学的一般概念以及这些概念之间的相互联系，正是这些共同的概念，可以对各种各样的波作统一的描述。支配这些波的变化规律，可以由相同的数学方程式来表达。例如，声波的传播在很多方面就与光波的传播相类似。如果我们深入地研究声学，就会发现要做的工作，与我们深入研究光学时相同，对一个领域中某种现象的研究可以扩大我们对另一领域的知识，这就是为什么在学完力学以后，还要专门研究仅仅是力学中很小一部分的机械振动与机械波的原因。

波动可以看成能量和动量从空间一点到另一点传播的方式。在机械波中，例如水波，弦的振动，声波或固体中的弹性波，是通过空间介质的扰动来传播的。这里没有物质的传播，只有扰动的传播。传播是通过介质的弹性实现的。

在电磁波中，能量和动量是被能在真空中传播的电磁波运载的，在能量和动量传播的同时，有场物质的传播。本卷中主要讨论机械波与电磁波，关于描述微观粒子运动的德布罗意波，将在第五卷量子物理学基础中研究。当考察整个中间介质或场物质传播能量与动量的方式时，我们观察到的是波。当考察中间介质与场物质在空间固定点的扰动时，观察到的是振动。波是介质或场中各点以一定的位相关系振动的集体表现。

本卷先讲述振动的基本概念，再讲述波的基本概念，最后讲述波动光学。

第一章　机 械 振 动

系统状态不断重复的运动，称为周期运动。每一次重复所需的时间，叫周期。我们首先要研究的周期运动，是物体在一定位置附近来回往复的运动，叫机械振动（或振荡）。

振动是一种普遍的运动形式，自然界中充满着各种各样的振动，例如火车过桥时引起桥梁的振动；各种机械的运转而引起厂房的振动；地震则是地壳结构内部运动而引起的振动；海潮是由于月球引力和地球自转引起的振动；固体中的分子、离子、原子在晶体格点上的微振动等等。实际的振动概念，可以延伸到更广泛的领域，例如，地表面温度既有一天 24 小时的周期变化，亦有一年四季的周期变化；汽缸中温度的周期变化；交流电路中的电流、电压的周期变化；电磁振荡中电场和磁场的周期变化。因此，把任一物理量随时间在某一值附近所作的周期变化统称为振动。

§1-1　简 谐 振 动

简谐振动是振动中最简单、最有用的一种。一切复杂的振动都可以看作若干简谐振动的叠加，所以简谐振动是研究其它振动的基础。

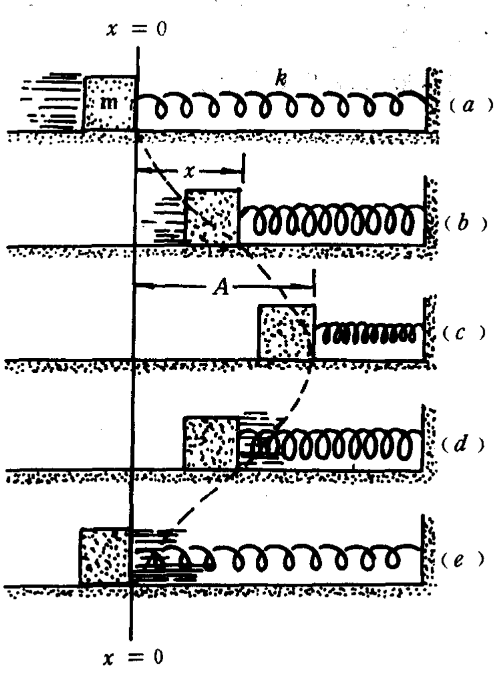

图 1-1　弹簧振子的运动

常见的例子是弹簧振子的运动。见图 1-1。置于光滑水平面上的质量为 m 的物体，与遵循胡克定律的一端固定的轻质弹簧连接，构成一个典型的弹簧振子。把坐标原点（$x=0$）选在平衡位置，即振动物体所受合力为零的位置。物体偏离平衡位置 x 处，受力为 $F=-kx$，其大小正比于位移的量值，其方向与物体位移方向相反，指向平衡位置，称为恢复力。见图 1-1(b)。

振子的振动行为，是由两种具有相反倾向的性质决定的。一个是振动物体具有惯性，有维持已有运动速度的倾向。如图 1-1(a)中，正因为惯性，物体会冲过平衡位置继续运动，而不会在平衡位置停下；另一个是物体受恢复力 $F=-kx$ 作用，它给冲过原点的物体一个负加速度，使物体减速。离原点愈远，减速愈快，直到物体的速度减为零，此时物体位移最大，见图 1-1(c)。此后，此力导致物体运动反向（见图 1-1(d)、(e)），返回平衡位置。

整个振动过程中，惯性使物体冲过平衡位置继续运动，恢复力使物体返回平衡位置获得

速度，两种倾向导致振子的振动。此时物体偏离平衡位置的位移为时间的余弦函数：

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0) \tag{1-1}$$

其中 A、ω、φ_0 均为常数，反映了弹簧振子运动的基本特征。

凡物理量随时间的周期变化可用(1-1)式所示的余弦函数描写的振动，都称为简谐振动。

1-1-1 描写简谐振动的三个特征量

(1)振幅 A

由(1-1)式，$|x|=A|\cos(\omega t+\varphi)|\leqslant A$

简谐振动过程中，离开平衡位置的最大位移量值叫振幅。

(2)振动圆(或角)频率 ω、频率 ν 与周期 T

振动是周期运动，振动物体两个相同状态的最短时间间隔叫周期，用符号 T 表示。振动物体的状态通常用(x,v)描写，即：

$$\begin{cases} x(t) = x(t+T) & A\cos(\omega t + \varphi_0) = A\cos[\omega(t+T) + \varphi_0] \\ v(t) = v(t+T) & -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0) = -A\omega\sin[\omega(t+T) + \varphi_0] \end{cases}$$

正弦函数与余弦函数共同的周期为 2π，所以有：

$$\omega T = 2\pi, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

振动频率用符号 ν 表示，定义为物体在单位时间所作的完全振动(即返回原来状态)的次数。根据此定义有

$$\nu = \frac{1}{T}$$

由此可知 $\omega=2\pi\nu$，即 ω 等于频率 ν 的 2π 倍，通常称为圆频率(或角频率)。

在 SI 单位制中 T 的单位为 s(秒)，ν 的单位是 Hz(赫兹，s^{-1})，ω 的单位为 rad · s^{-1}(弧度/秒)。

(3)位相(或周相)$\varphi(t)$

一般情况下，物理的运动状态用(x,v)描写。对于简谐振动，则用(1-1)式描写：

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t + \varphi_0) = A\cos\varphi(t) \\ v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0) = -A\omega\sin\varphi(t) \end{cases} \tag{1-2}$$

其中 $\varphi(t)=\omega t+\varphi_0$ 称为简谐振动的位相(或周相)。位相的单位为弧度，它是描述谐振子的振动状态的物理量。

由(1-2)式可知，在一个周期内，位相 φ 与简谐振动的状态(x,v)有一一对应的关系，简谐振动的位相 φ 确定后，相应的状态(x,v)随之确定。(1-2)式给出了两种状态描述方式之间的“互译”公式：$(x,v)\rightleftharpoons\varphi$。

$\varphi_0=\varphi(0)$，为开始计时的振动位相，称为初相，对应振动的初始状态(x_0,v_0)。初位相 φ_0 与时间的零点选取有关。例如图 1-1 中，若以(a)状态为计时零点，有：

$$\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi_0 = 0 \\ v_0 = -A\omega\sin\varphi_0 > 0 \end{cases} \tag{1-3}$$

仅仅根据初始位置 $x_0=0$，有 $\cos\varphi_0=0$，φ_0 可取$\frac{\pi}{2}$、$\frac{3}{2}\pi$，还不能确定振子的位相。进一步

了解振子的初速度 $v_0>0$，有 $\sin\varphi_0<0$，则初位相 φ_0 只能取 $\frac{3}{2}\pi$，振子的位相就唯一地确定了。若以图 1-1(*c*)状态为计时零点，则初位相 φ_0 为零；以图 1-1(*e*)状态为计时零点，则初位相 φ_0 为 $\frac{\pi}{2}$。

1-1-2 位相图示法

物体沿实数轴的简谐振动，可以用复平面上匀速圆周运动在实轴上的投影描写，见图 1-2。

复平面上，点 P 沿逆时针方向作匀速圆周运动。此圆周要成为能图示简谐振动的参考圆，必须使参考圆的半径等于振幅 A，P 点的方向角等于位相 φ，沿圆周运动的角速度等于圆频率 ω。此时，圆周运动方向角的变化规律才与简谐振动的位相变化规律一致，$\varphi(t)=\varphi_0+\omega t$。$P$ 点在实轴上的投影与简谐振动函数一致，$x=A\cos\varphi(t)=A\cos(\varphi_0+\omega t)$。$P$ 点在参考圆上某点的位移、速度和加速度在实轴上的投影，与谐振子在该投影点上的位移、速度和加速度相等。

当用矢量 $\boldsymbol{A}$ 描写复平面上 P 点的位置矢量时，简谐振动可以用复平面上的旋转矢量在实轴上的投影形象地图示出来，位相可以用旋转矢量的方向角形象地图示出来。

当用复变函数 $\boldsymbol{A}(t)$，描写复平面上 P 点的运动时，此复变量可写成指数式：

$$\boldsymbol{A}(t) = A(\cos\varphi + i\sin\varphi) = Ae^{i\varphi} = (Ae^{i\varphi_0})e^{i\omega t} = \boldsymbol{V}_P e^{i\omega t}$$

其中 $\boldsymbol{V}_P=Ae^{i\varphi_0}$，称为简谐振动的复振幅。

复平面上的参考圆，是用以实现振动状态两种描写方法互译，即$(x,v)\Longleftrightarrow(\varphi)$对应关系的最简易、最直观的方法。

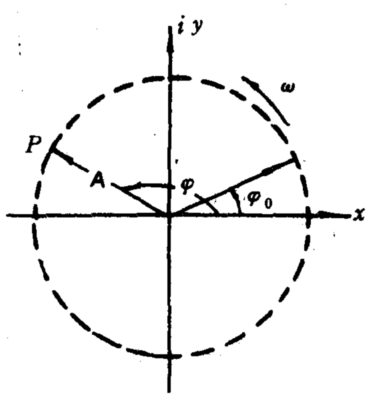

图 1-2 位相图示法

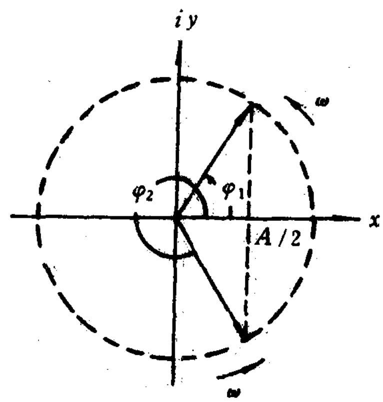

图 1-3 (x,v)在 $v>0$ 时对应的位相是 φ_2

例如，图 1-3，已知 $x=\frac{A}{2}$，使 x 值为实轴投影，对应参考圆上的位相为 φ_1、φ_2。若进一步确定 $v>0$，即下一时刻，x 应增大，则与状态(x,v)对应的只能是 φ_2。如果是 $v<0$，则对应的应是位相 φ_1。

1-1-3 振动曲线

振动函数 $x=A\cos(\omega t+\varphi_0)$，常用 $x-t$ 曲线图示，称为振动曲线。

图示程序如下，见图 1-4。

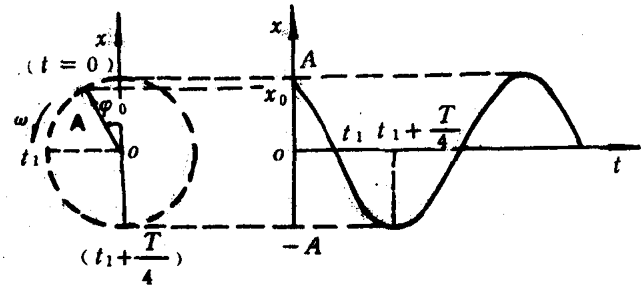

图 1-4　由振动函数画出振动曲线

(1)由振幅 A 限制振动曲线的幅度。

(2)由 φ_0 确定初始位置 x_0，即用与 x 轴夹角为 φ_0 的矢量在 x 轴上的投影确定 x_0，由下一时刻，投影 x 的减小(或增大)，确定由 x_0 起始的振动曲线应向下画(或向上画)。

(3)当 $x=0$ 时，$t=t_1$，$\varphi=\frac{\pi}{2}=\omega t_1+\varphi_0$，由此确定 $t_1=\dfrac{\frac{\pi}{2}-\varphi_0}{\omega}$的值。

(4)由 t_1 时刻开始画出周期为 T、振幅为 A 的余弦函数曲线。

从而完成了由振动函数的三个特征值(A、ω、φ_0)画出振动曲线的程序。其逆过程，由振动曲线求得三个特征值，写出振动函数，参考圆仍是实现两种振动描写(函数与曲线)之间“互译”的最简单的方法。

例 1-1　试写出图 1-5 所示振动曲线的运动函数。

解：

(1)由初始条件研究初位相

$$t=0,\quad \begin{cases} x_0=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{cm}) \\ v_0<0 \end{cases}$$

在参考圆上，确定初位相 $\cos\varphi_0=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\varphi_0=\dfrac{\pi}{4}$，见图 1-6。

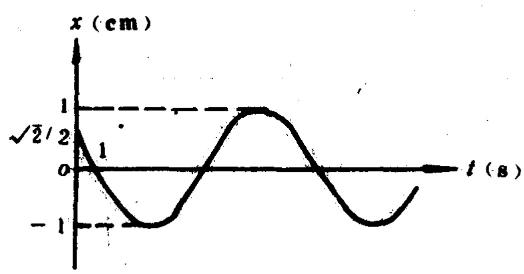

图 1-5　由振动曲线求振动函数

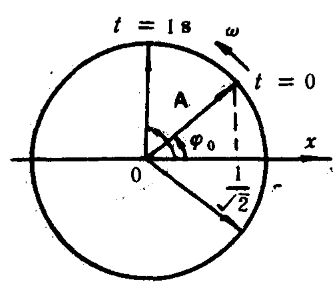

图 1-6　由(x_0,v_0)确定初位相 φ

(2)振幅 $A=1(\mathrm{cm})$。

(3)由位相变化规律 $\varphi=\omega t+\varphi_0$，确定圆频率。由图1-6可知，$t=1(\mathrm{s})$，$\varphi=\frac{\pi}{2}$。代入：

$$\omega=\frac{\varphi-\varphi_0}{t}=\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}}{1}=\frac{\pi}{4}(\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1})$$

得运动函数 $x=1\cos\left(\frac{\pi}{4}t+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}(t+1)$ (cm)

1-1-4 位相差

位相这个概念用来比较相同频率的两个简谐振动的步调，特别有用。图 1-7 中的两个旋转矢量 A_1 与 A_2 代表了两个初位相不同的简谐振动：

$$\begin{cases}x_1=A_1\cos(\omega t+\varphi_{01})\\ x_2=A_2\cos(\omega t+\varphi_{02})\end{cases}$$

由于频率相同，两旋转矢量夹角：

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\varphi_{02}-\varphi_{01}$$

保持不变，恒等于初位相差。因而，两简谐振动有明确的步调差。

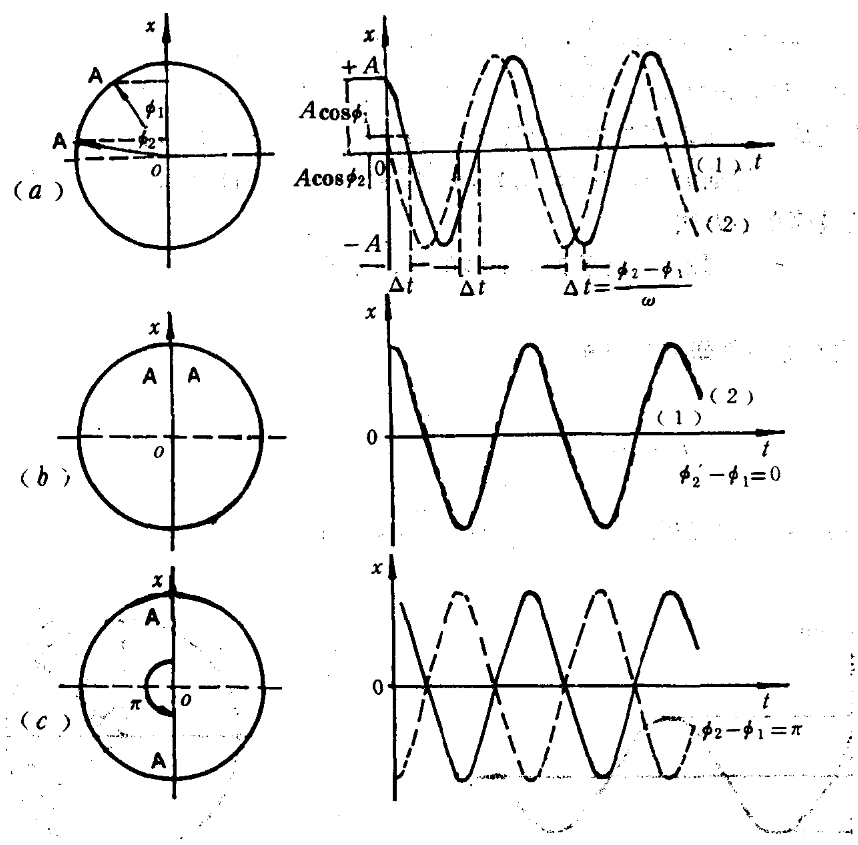

图 1-7　不同初位相的简谐振动

如图 1-7(*a*)所示，旋转矢量 A_2 始终比 A_1 超前一个角度 $\Delta\varphi$，其投影点代表的简谐振动 x_2，比 x_1 超前位相 $\Delta\varphi$，在步调上超前时间 $\Delta t=\frac{\Delta\varphi}{\omega}$。图中虚线代表振动(2)，实线代表振动(1)。当振动(2)推迟 Δt（振动曲线右移）就与振动(1)步调一致了，见图 1-7(*b*)，两曲线重合。若两个振动步调一致，即 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=0$，$\varphi_2=\varphi_1$，叫同相振动。图 1-7(*c*)显示两个振动的位相

差 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\pi$，$x_2$ 超前 x_1 半个周期，叫反相振动。

例 1-2 两质点 1、2 作同方向、同频率的简谐振动，其振幅分别为 $2A$ 和 A，当质点 1 处在 $x_1=A$，向右运动时，质点 2 处在 $x_2=0$，向左运动。试求：两个振动位相差 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1$。

解：因为它们的频率相同，它们振动位相差恒定。质点 1 的振动状态（$x_1=A, v_1>0$）和质点 2 的振动状态（$x_2=0, v_2<0$）分别对应参考圆上旋转矢量的方向角 $\frac{5}{3}\pi$ 和 $\frac{\pi}{2}$，如图 1-8 所示。所以有：

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\frac{\pi}{2}-\frac{5}{3}\pi=-\frac{7}{6}\pi$$

即 x_2 比 x_1 落后 $\frac{7}{6}\pi$，或者说，x_1 比 x_2 超前 $\frac{7}{6}\pi$。

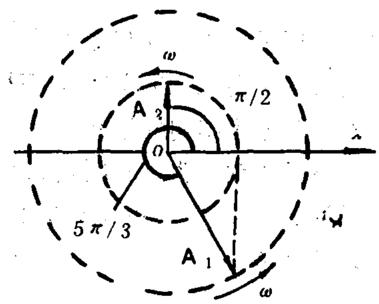

图 1-8 同频率同方向的振动的位相差

1-1-5 自由振动

在空间，质点用位置矢量描写，系统用位形描写。例如，一个弹簧振子的位形，用振动物体的位置 x 就可描写；一个单摆的位形，用悬挂角 θ 即可描写，见图 1-9。

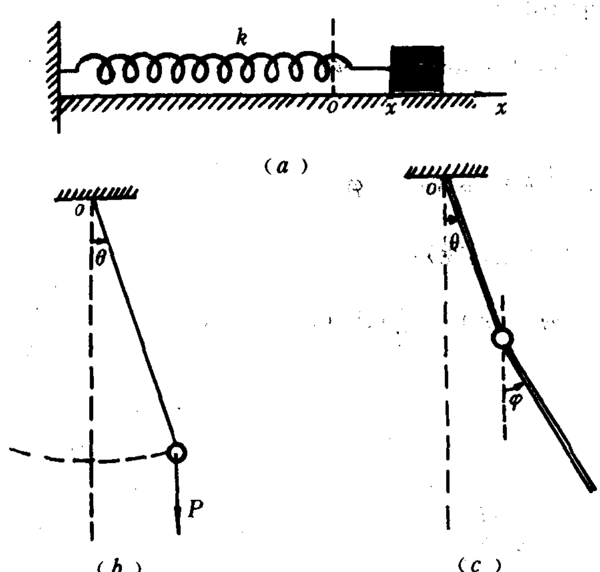

图 1-9

(a)弹簧振子位形用 x 描写；

(b)单摆位形用悬挂角 θ 描写；

(c)用绞链连接的两棒的位形，用角 θ、φ 描写

通常把决定系统位形的参量，叫系统的广义坐标，用符号 q_i 表示。决定系统位形的广义坐标的个数，叫系统的自由度。系统的机械运动用运动函数 $q_i(t)$ 描写。弹簧振子与单摆就是一个自由度的系统。

如果系统受到一个初始激发后，不再受到外界的任何扰动，而且阻尼可以忽略，系统发生的这种理想振动叫做自由振动，又称固有振动。下面我们从动力学角度来分析自由振动的特征。

由简谐振动函数 $x(t)=A\cos(\omega t+\varphi_0)$ 可导出加速度 $a=\ddot{x}=-\omega^2A\cos(\omega t+\varphi_0)=-\omega^2x$，从而得到微分方程

$$\ddot{x}+\omega^2x=0 \qquad (1\text{-}4)$$

由牛顿定律得

$$F=-m\omega^2x \qquad (1\text{-}5)$$

由此可见，凡物体受恢复力(1-5)式作用的振动，或者说运动函数满足(1-4)微分方程的振动，必是简谐振动。

对于弹簧振子〔图 1-1(a)〕，恢复力就是弹力：

$$F=-m\omega^2x=-kx$$

简谐振动的圆频率和频率分别为

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad 和 \quad \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1-6}$$

这表明振子的频率仅与振子的结构有关，而与振子的初始条件无关，振子在不同振幅下的振动具有等时性。所以，这种频率称为振子的固有频率。人们可以通过测定振子的固有频率来获得有关振子结构的信息。

当振子频率为已知时，振幅 A 和初位相 φ_0 由初始条件(x_0, v_0)决定，而初始条件是外界给予的。例如，用手将弹簧振子的物体拉到某处 x_0，然后给它一个初速度 v_0，那么 $t=0$ 时的初始条件是

$$\begin{cases} x_0 = A\cos\varphi_0 \\ v_0 = -A\omega\sin\varphi_0 \end{cases}$$

由此可以导出

$$\begin{cases} A = \sqrt{x_0^2 + \left(\dfrac{v_0}{\omega}\right)^2} \\ \mathrm{tg}\varphi_0 = -\dfrac{v_0}{\omega x_0} \end{cases} \tag{1-7}$$

在弹簧振子的简谐振动中，振子系统的动能为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

振子系统的势能为

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

将 $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$ 代入，得系统在 t 时刻的机械能（也叫振动能）：

$$\begin{aligned} E &= E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi_0) \\ &= \frac{1}{2}kA^2 \end{aligned} \tag{1-8}$$

由此式又可得

$$A = \sqrt{\frac{2E}{k}} \tag{1-9}$$

即简谐振动的振幅决定于振动的机械能。可以证明，简谐振动的机械能是守恒的。(1-9)式和(1-7)式中的振幅关系是一致的。因为系统能量守恒，那么有

$$E = E_0 = \frac{1}{2}kx_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{k}{2}\left(x_0^2 + \frac{m}{k}v_0^2\right) = \frac{1}{2}m\omega^2\left[x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2\right]$$

图 1-10(a)描绘了弹簧振子能量—时间曲线，图 1-10(b)描绘了振子的势能曲线。振子振动过程中，其动能和势能处于不断变化中，二者之和总等于外界干扰给予的初始能量 E。图 1-10(b)中，谷底是振子平衡位置，动能最大，B、C 处对应最大势能值 $E_p = E$，此处振子速度为零。

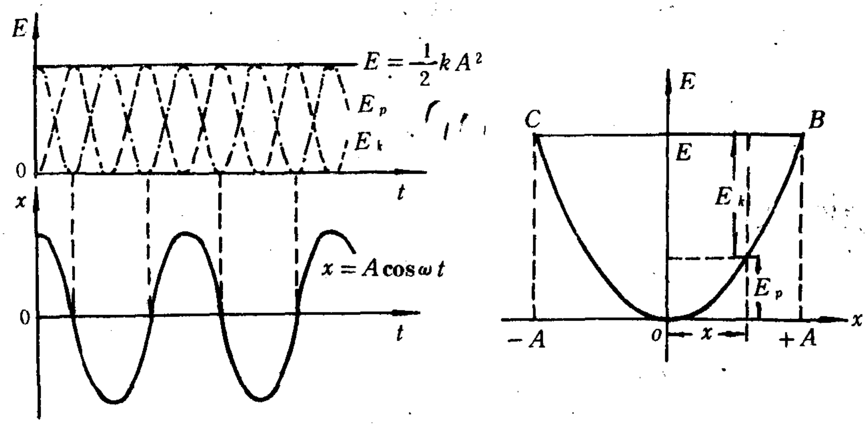

图 1-10　(*a*)弹簧振子能量—时间曲线　(*b*)弹簧振子势能曲线

例 1-3　一个质量 $m=2$kg 的物体，悬挂在倔强系数 $k=196\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$的弹簧上，物体静止于平衡位置时，被锤猛击一下，获得方向向下的冲量 $I=1.98\text{N}\cdot\text{s}$。试问随后的运动如何？

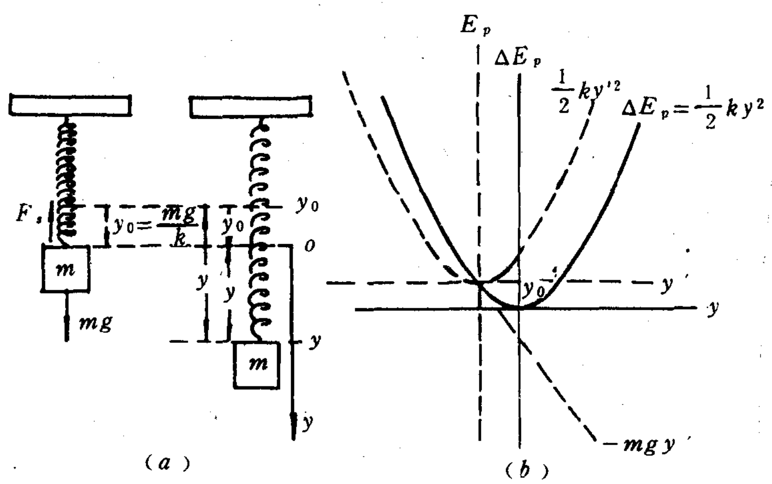

图 1-11　(*a*)竖直弹簧振子；(*b*)竖直弹簧振子势函数

解：

(1)画图。对于弹簧振子必须同时标出三个位置(图 1-11(*a*))：

(*a*)弹簧原长的位置(y_0)，为计算弹性力所用；

(*b*)平衡位置，为选作坐标原点 O 所用；

(*c*)使物体 m 处于任一位置 y，为建立力学方程所用。

(2)找出初始条件。

选获得冲量的时刻为 $t=0$，由动量定理 $I=mv_0-0$，初速度 $v_0=\frac{I}{m}$，方向向下，由此得初始条件：

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ v_0 = \dfrac{I}{m} = \dfrac{1.98}{2} = 0.99\text{m/s(方向向下)} \end{cases}$$

(3)研究是否是简谐运动。

物体受弹性力 $F_{弹}=-k(y-y_0)$和重力 mg。

按平衡位置定义:$y=0,F_{合}=ky_0+mg=0$,则 $y_0=-\dfrac{mg}{k}$,即弹簧原长位置偏离平衡位置 $y_0=-\dfrac{mg}{k}$,物体在任一位置 y 所受合力:$F_{合}=-k(y-y_0)+mg=-ky$。因此,断定振子作简谐振动,其运动函数为 $x=A\cos(\omega t+\varphi_0)$,其中圆频率 $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}=\sqrt{\dfrac{196}{2}}=9.9\text{rad/s}$,周期 $T=\dfrac{2\pi}{9.9}=0.63\text{s}$,频率 $\nu=\dfrac{1}{T}=1.58\text{Hz}$。

注意:一个弹簧振子的振动函数,与是否有常力作用无关,常力仅改变振子的平衡位置。

(4)由初始条件确定初相 φ_0 与振幅 A。

把(y_0,v_0)"翻译"为(φ_0)

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ v_0 > 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \varphi_0 = \frac{3}{2}\pi$$

而振幅 $A=\sqrt{x^2+\left(\dfrac{v_0}{\omega}\right)^2}=\dfrac{I}{m\omega}=\dfrac{1.98}{2\times 9.9}=0.1(\text{m})$。因此,振动函数为:

$$x = 0.1\cos\left(9.9t + \frac{3}{2}\pi\right)(\text{m})$$

[**讨论**]:

弹簧振子的势能包括两部分(图 1-11(*b*)):

(*a*)弹簧的弹性势能

当物体偏离平衡位置,其坐标为 y 时,弹性势能增量为:

$$\Delta E_p(y) = \frac{1}{2}k(y-y_0)^2 - \frac{1}{2}ky_0^2 = \frac{1}{2}ky^2 - ky_0y = \frac{1}{2}ky^2 + mgy$$

(*b*)重力势能

当物体偏离平衡位置 y 时,重力势能增量

$$\Delta E_p = -mgy$$

因此,物体偏离平衡位置 y 时,弹簧振子总的势能增量为:

$$\Delta E_p = \frac{1}{2}ky^2$$

如果规定平衡位置既是重力势能的零点,又是弹性势能的零点,则振子势能 $E_p(y)=\dfrac{1}{2}ky^2$,与没有重力场存在时的势能形式相同。图 1-11(*b*)中,y'是对弹簧振子原长位置的偏离,则 $y'=y-y_0$。振子势能中由于重力势能$-mgy'$的存在,势能曲线破坏了对原长位置的左右对称性。但对平衡位置 O,势能曲线$\dfrac{1}{2}ky^2$ 又恢复了这种对称性。因此,重力的存在并没有改变振子振动形式。

例 1-4　写出单摆小角度摆动的运动函数。若摆长 $l=9.8\text{m}$,在平衡位置给予一个扰动,

使单摆获得向右的角速度$\frac{\pi}{180}$rad/s。

解：

(1)单摆，用广义坐标悬挂角θ确定单摆位置。并规定平衡位置$\theta=0$，逆时针偏转为θ角的正向。见图 1-12。

(2)单摆作绕悬挂点A的转动，质点m对A点的转动惯量$I=ml^2$，所受力矩$M=-mgl\sin\theta$。根据刚体定轴转动定律有：

$$-mgl\sin\theta = ml^2\ddot{\theta}$$

即

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

显然，单摆并不作简谐振动。

(3)小角度摆动下的运动函数。

对$\sin\theta$作级数展开，有：

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3\,!} + \frac{\theta^5}{5\,!} - \frac{1}{7\,!}\theta^7 + \cdots$$

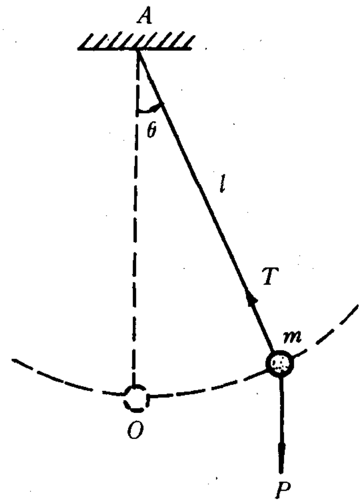

图 1-12 单摆的振动

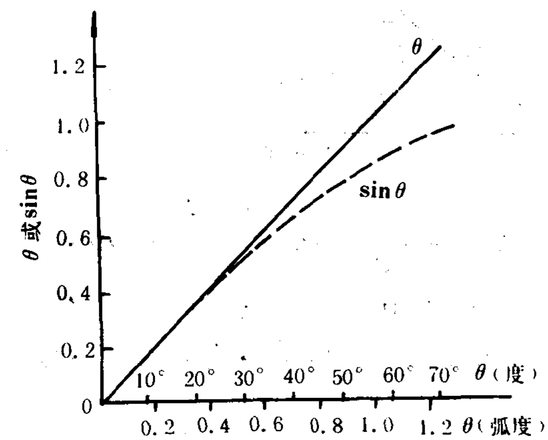

图 1-13 θ和$\sin\theta$的比较，对充分小的角度，两曲线近似相同

图 1-13 画出$\sin\theta-\theta$的曲线图，发现在θ足够小时，$\sin\theta$与θ近似相等。如$\theta=\frac{\pi}{6}=0.523$，$\sin\frac{\pi}{6}=0.5$，两者之差，也仅为 4.6%。一般情况下，$\theta<5°$时，用$\theta$代替$\sin\theta$是足够精确的，此时有：

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta = -\omega^2\theta$$

单摆作简谐振动，振动函数为：

$$\theta(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

其中角频率$\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$或周期$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$，振幅$A$与初相$\varphi_0$由初始条件$(\theta_0,\dot{\theta}_0)$，给出。

把$l=9.8m$代入，得角频率$\omega=1s^{-1}$，$T=6.28s$。由初始条件$(\theta=0,\dot{\theta}>0)$，在参考圆上可确定初相$\varphi_0=\frac{3}{2}\pi$，振幅$A=\sqrt{\theta_0^2+\left(\frac{\dot{\theta}}{\omega}\right)^2}=\frac{\dot{\theta}_0}{\omega}=1°$。

要注意的是悬挂角与位相角是不同的。悬挂角是实际观察到的真实几何角；位相角是实际观察不到的，它是用以研究单摆振动状态的抽象角。

单摆振动函数为：

$$\theta(t) = 1\cos\left(1\times t + \frac{3}{2}\pi\right)(\text{deg}) = \cos\left(t + \frac{3}{2}\pi\right)(\text{deg})$$

下面讨论几个问题：

(a)由 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$,得 $g=\frac{4\pi^2 l}{T^2}$

通过观测自由落体直接测定重力加速度 g 是困难的,因为下落一定距离的时间太短难以测定。而测定单摆的周期 T 很容易。如用一秒表测量 100 次振动的时间,其数据为 628±1 秒,得出周期 $T=6.28\pm0.01$s 测量振动次数愈多,测量周期的精确度愈高。因此,用单摆测定重力加速度,是很精确的。

(b)单摆的势能曲线。

选单摆最低点为重力势能零点,则势能函数:

$$E_p(\theta)=mgL(1-\cos\theta)=2mgL\sin^2\frac{\theta}{2}$$

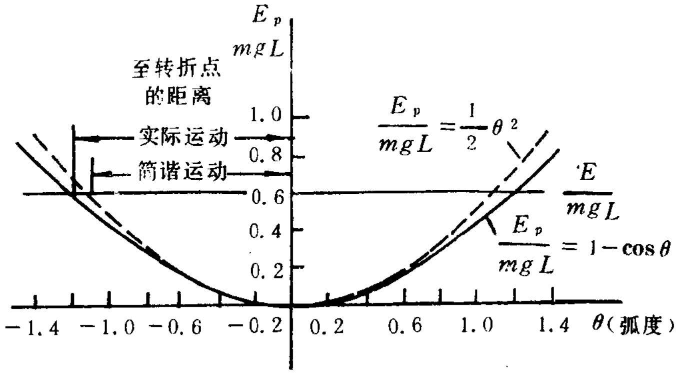

图 1-14　势能函数 $E_p=mgL(1-\cos\theta)$与简谐运动的近似函数 $E_p=mgL\theta^2$ 的比较

小角度近似时,势能函数 $E_p(\theta)=\frac{1}{2}mgL\theta^2$,与弹性势能有相同的形式。图 1-14 中,把实际势能曲线与近似势能曲线作了比较。初始扰动给出总能量 E 以后,实际振幅比近似计算振幅要大,实际周期 T 比近似计算周期 T_0 也长:

$$T=T_0\left(1+\frac{1}{2}\sin^2\frac{\theta_0}{2}+\frac{1}{2^2}\cdot\frac{3}{4^2}\sin^4\frac{\theta_0}{2}+\cdots\right)$$

与钟摆摆幅 θ_0 有关。若 $\theta_0\ll10°$,周期近似为 $T\approx T_0\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\theta_0\right)$当 $\theta_0=5°$时,

$$-\frac{\Delta T}{T}=\frac{T-T_0}{T_0}\approx\frac{1}{4}\sin^2 5°=\frac{1}{4}(0.0872)^2\approx2\times10^{-3}$$

每天相当有 $24\times60\times2\times10^{-3}=2.88\approx3\text{min}$ 的累积误差。由于摆幅的周期产生变化,会积累起不可忽视的计时误差。为此,需要把摆钟设计成恒振幅结构。

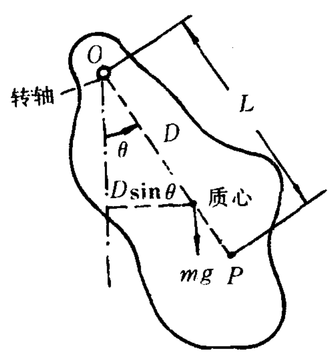

图 1-15　复摆

(c)把单摆装置换成刚体,即为复摆,如图 1-15 所示。刚体可绕通过 O 点的垂直于纸面的转轴自由转动。同样,逆时针偏转 θ 为正。刚体所受重力对转轴的力矩为:

$$M=-mgD\sin\theta$$

D 为质心到支点的距离。用 I 代表刚体对转轴的转动惯量,由转动定律可得: