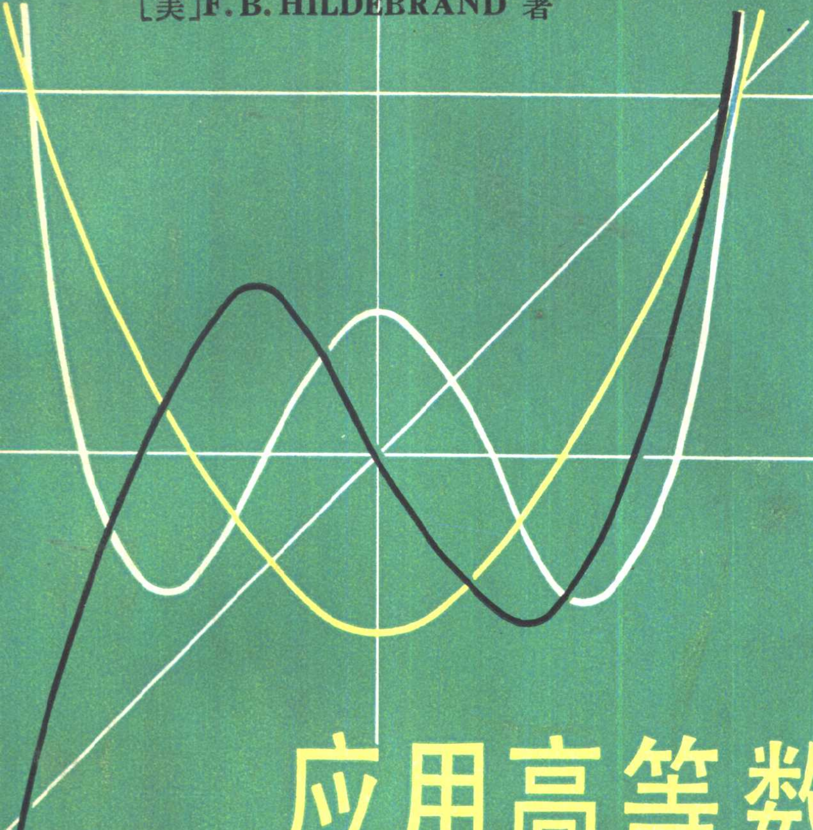
[美]F. B. HILDEBRAND 著



应用高等数学

中 册

陈绶章 张志强译
刘 文校

人民教育出版社

应用高等数学

中　册

[美] F. B. Hildebrand 著

陈绶章　张志强译　刘　文校

人民教育出版社

本书曾多次作为美国麻省理工学院教科书．全书共有十一章，中译本分上、中、下三册出版．本中册(6—9章)内容以偏微分方程为中心，包括向量分析，多元函数的微分与积分，偏微分方程，数学物理方程的解等．书中有大量例题和习题，书末给出习题答案．

本书可供高等学校理、工科有关专业及有关工程技术人员作参考用书．

应用高等数学

中　　册

[美]F. B. Hildebrand 著

陈绶章　张志强译　刘　文校

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 11.5　字数 270,000

1980年4月第1版 1980年12月第1次印刷

印数 00,001－16,300

书号 13012·0454　定价 1.05 元

目　录

第六章　向量分析

6.1　向量的基本性质

一个向量不同于一个数量，这是由于一个数量只具有大小，而一个向量既具有大小，还具有方向(零向量除外). 在几何上通常用一个箭头来表示一个向量，以箭头指示其方向，以长度按比例表示其大小. 于是，特别是，点 B 相对于点 A 的位置完全可用由 A 到 B 的向量 $\overrightarrow{AB}$ 来描述，因为向量 $\overrightarrow{AB}$ 同时给定了 A 到 B 的方向和距离，事实上，它说明了从 A 到 B 的位移. 由于从 A 至第三点 C 的运动可沿向量 $\overrightarrow{AC}$ 来完成，或换另一种形式，先沿向量 $\overrightarrow{AB}$ 至 B，然后由 B 沿 $\overrightarrow{BC}$ 至 C(图 6.1)，所以自然而然地将加法的概念扩展到向量上:

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$$

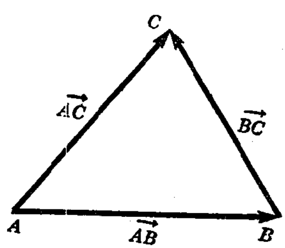


图　6.1

若两个向量具有同一方向和同样的大小，则我们说它们是相等的. 按此定义，若一个向量作平行于自身的任何运动，则此向量不变；这就是说，向量在空间中的实际位置可随意指定. 但是应该注意，在某些应用中，也可能必须限定向量的位置(例如在确定与一个力向量相关的力矩向量时).

按此约定†，任意两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 可用 $\boldsymbol{a}$ 的终端与 $\boldsymbol{b}$ 的始端相重合的箭头来表示. 则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之和

† 在印刷品中，往往用黑体字来表示向量(如在本书中). 因此 $\boldsymbol{a}$ 表示向量，而 a 表示数量，在手抄本中，用 $\vec{a}$ 或 $\underline{a}$ 要更方便些；符号 $\hat{\boldsymbol{u}}$(或 $\hat{u}$) 往往用来表示单位向量.

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$

可用一个由 $\boldsymbol{a}$ 的始端伸至 $\boldsymbol{b}$ 的终端的向量来定义. 从定义中不难得出,向量加法是可交换的,即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a} \tag{1}$$

同样,向量加法也满足结合律,即

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) \tag{2}$$

(2)中相等的两个表达式可写为三个向量之和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, 且此定义不难推广到任意个向量之和。

若将表示一个向量的箭头的始端和终端互换一下，则所得向量称为原向量的负向量. 例如 $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$. 对于从向量 $\boldsymbol{a}$ 减去向量 $\boldsymbol{b}$,我们可在向量 $\boldsymbol{a}$ 上加上向量 $\boldsymbol{b}$ 的负向量,即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}) \tag{3}$$

若一个向量 $\boldsymbol{a}$ 乘以数量 m,其结果仍为一个向量 $m\boldsymbol{a}$, 其长度是 $\boldsymbol{a}$ 的长度和 m 的算术积，而它的方向，在 m 为正值时为 $\boldsymbol{a}$ 的方向,在 m 为负值时为 $-\boldsymbol{a}$ 的方向。

具有单位长度的向量称为单位向量. 显然，任何向量可写为其长度与单位向量的乘积.

长度为零的向量(任意方向)称为零向量,且用 0 来表示,两个相等的向量之差为零向量.

现考虑右手直角坐标系，其中坐标 x, y 和 z 是沿三个相互垂直的轴起量，而其 x 轴是按右手法则绕 z 轴旋转到 y 轴，并定义单位向量 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 分别具有 x, y 和 z 轴的正向(图 6.2). 于是不难证明任何在坐标轴上的投影分别为 v_x, v_y 和 v_z 的向量 $\boldsymbol{v}$ 可写为向量和

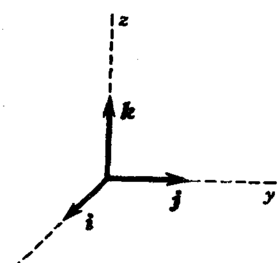


图 6.2

$$\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k} \tag{4}$$

v_x, v_y 和 v_z 称为 $\boldsymbol{v}$ 在 x, y 和 z 方向的数量分量(图 6.3). 若 $\boldsymbol{v}$ 的始端与坐标系原点重合, x, y 和 z 轴正向与 $\boldsymbol{v}$ 的夹角分别记为 α、β 和 γ, 则可得

$$\begin{aligned} v_x &= v\cos\alpha \\ v_y &= v\cos\beta \\ v_z &= v\cos\gamma \end{aligned} \tag{5}$$

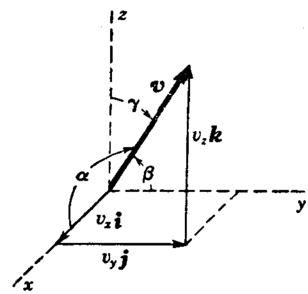


图 6.3

其中 v 为向量 $\boldsymbol{v}$ 的长度或大小. 经常也用符号 $|\boldsymbol{v}|$ 来代替 v. $\cos\alpha$, $\cos\beta$ 和 $\cos\gamma$ 称为 $\boldsymbol{v}$ 的方向余弦, 且经常分别用 l, m 和 n 来表示. 任意正比于 (l, m, n) 的三个数 (A, B, C) 称为"方向比". 由联系 v 与 $\boldsymbol{v}$ 的数量分量的几何关系

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \tag{6}$$

可知, 其方向余弦满足方程

$$l^2 + m^2 + n^2 \equiv \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \tag{7}$$

我们还可看出, 若将(4)写为

$$\boldsymbol{v} = v(\boldsymbol{i}\cos\alpha + \boldsymbol{j}\cos\beta + \boldsymbol{k}\cos\gamma) \tag{8}$$

式中 v 的系数为一单位向量, 则向量

$$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{i}\cos\alpha + \boldsymbol{j}\cos\beta + \boldsymbol{k}\cos\gamma \tag{9}$$

是 $\boldsymbol{v}$ 向量的单位向量. 综合方程(5)和(6), 有

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \tag{10}$$

6.2 两个向量的数量积

两个向量的乘积通常有两类定义. 其第一类乘积称为数量积、点积或内积, 并写为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 或 $(\boldsymbol{ab})$. 这类乘积定义为一数量, 它等于

两个向量长度与其正向夹角的余弦之乘积 (图 6.4)，因而可由下式

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=ab\cos\theta \tag{11}$$

给出. 由于 $b\cos\theta$ 是 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影，而 $a\cos\theta$ 却是 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影，由此可知，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 在数值上等于 $\boldsymbol{b}$ 的长度乘以 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影，或等于 $\boldsymbol{a}$ 的长度乘以 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影. 若 θ 为钝角，则所述投影取负值. 特别是，若两个向量相互垂直，则其点积为零. 由其几何说明不难看出，点积服从交换律，即

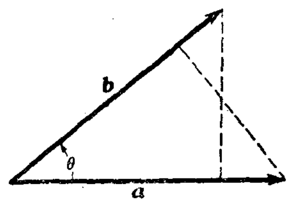


图 6.4

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} \tag{12}$$

且服从分配律

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} \tag{13}$$

对单位向量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$，可立即得出

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1\\&\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0\end{aligned} \tag{14}$$

因而，若

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k} \tag{15}$$

则应用方程(13)，有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z \tag{16}$$

$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间夹角的余弦可由方程(11)和(16)给为

$$\cos\theta=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}} \tag{17}$$

或若用(l_1, m_1, n_1)和(l_2, m_2, n_2)来表示 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的方向余弦，则

$$\cos\theta=l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2 \tag{18}$$

有时用简式 $\boldsymbol{a}^2$ 表示 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$. 则同样有

$$\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2=a^2 \tag{19}$$

点积特别有助于将一给定向量 $\boldsymbol{v}$ 表示为三个相互垂直的单位

向量$\boldsymbol{u}_1$、$\boldsymbol{u}_2$和$\boldsymbol{u}_3$的线性组合．因为若令

$$\boldsymbol{v}=c_1\boldsymbol{u}_1+c_2\boldsymbol{u}_2+c_3\boldsymbol{u}_3 \tag{20}$$

并在上式两端逐次取$\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$和$\boldsymbol{u}_3$的点积，可得

$$c_1=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}_1,\quad c_2=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}_2,\quad c_3=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}_3$$

于是方程(20)化为

$$\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}_2)\boldsymbol{u}_2+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}_3)\boldsymbol{u}_3 \tag{21}$$

由此可见，上述表达式仅在$\boldsymbol{v}$的分量与$\boldsymbol{u}_1$、$\boldsymbol{u}_2$和$\boldsymbol{u}_3$都垂直时可能会失效，然而这一情况在三维空间中显然是不可能的，因为$\boldsymbol{u}_1$、$\boldsymbol{u}_2$和$\boldsymbol{u}_3$是假设相互垂直的．

6.3 两个向量的向量积

两个向量$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$的第二类常用的积称为向量积，叉积，或外积，并写为$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$或$[\boldsymbol{ab}]$．它定义为一个具有如下性质的向量：(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$的长度是$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的长度及其夹角$\theta$正弦值之积，(2)向量$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$垂直于$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$形成的平面，且其方向是按右手法则由$\boldsymbol{a}$绕$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$转至$\boldsymbol{b}$（但其转角不大于180°）来确定的．

按此定义，有（参看图6.5）

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=ab|\sin\theta| \tag{22}$$

因此，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$的长度等于以$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$作为其相邻两边的三角形面积的两倍．可见，由于按定义，

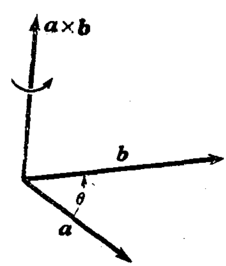


图 6.5

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) \tag{23}$$

所以叉积是不可交换的．但是它服从分配律，因而

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c} \tag{24}$$

上述关系式可从几何上考虑来建立．可以看出，两个平行向量的叉积为零．

对单位向量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, 按定义有

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0$$
$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{j} \tag{25}$$

这些关系式很易用下列循环排列来记忆,

$$\cdots\boldsymbol{ijkijk}\cdots$$

若我们注意到,在上述排列中向右读取时,一个向量与其相邻向量的叉积即为其下一个向量,而当向左读取时,则为下一个向量的负值.

为了用(15)所给的分量来计算两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的叉积,可应用方程(24)和(25)得出

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k} \tag{26}$$

此结果可方便地写为行列式

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix} \tag{27}$$

叉积的用途可用以下两个物理应用来说明. 首先, 考虑以大小为 ω 的角速度绕一固定轴旋转的刚体上一点 P. 令 O 为转轴上的一点, 并用长度为 ω 的向量 $\boldsymbol{\omega}$ 来表示角速度, 而按右手法则决定其沿转轴的方向(图 6.6). 于是,若令 O 至 P 的位置向量为 $\boldsymbol{r}$,则点 P 的速度向量可由下式

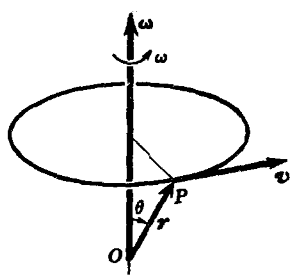


图 6.6

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \tag{28}$$

给出, 由于此向量的大小为 $\omega r|\sin\theta|$, 其中 $r|\sin\theta|$ 是点 P 至转轴的距离;而此向量的方向如图所示.

作为第二个应用, 考虑作用在点 P 上的力 $\boldsymbol{F}$ 所产生的在点 O

处的力矩向量$\boldsymbol{M}$(图 6.7). 若令O至P的位置向量为$\boldsymbol{r}$, 则$\boldsymbol{F}$对点O的力矩可定义为向量

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} \tag{29}$$

可见,向量$\boldsymbol{M}$垂直于$\overline{OP}$和向量$\boldsymbol{F}$所构成的平面,且其大小为

$$|\boldsymbol{M}|=M=Fr|\sin\theta|$$

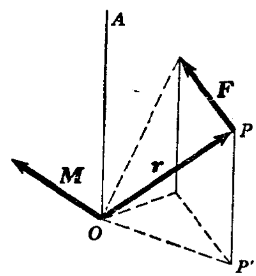


图 6.7

式中θ为$\boldsymbol{r}$和$\boldsymbol{F}$间的夹角, 因而$r|\sin\theta|$为点O至$\boldsymbol{F}$的作用线的垂直距离. 因此, 我们可以说, M是该力对$\boldsymbol{M}$轴的数量矩. 在几何上, M可看作是由$\boldsymbol{r}$和$\boldsymbol{F}$所确定的三角形面积的两倍. 而且, 该力对经过点O的任意轴OA的数量矩M_{OA}可看作为该三角形在经过点O且与OA垂直的平面上的投影面积的两倍. 但因所述两个平面间的夹角与对应轴间的夹角相同, 故该投影面积必等于$\boldsymbol{M}$在OA上的数量投影. 这就是说, $\boldsymbol{F}$对经过点O的任意轴的数量矩在数值上等于$\boldsymbol{M}$在该轴上投影的长度.

6.4 重积

含有三个向量的三种类型的乘积是重要的, 它们分别为$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$, $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$和$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$. 第一类

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

仅为数量$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$和向量$\boldsymbol{c}$之积.

第二类

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$$

称为三重数性积, 它是向量$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$和向量$\boldsymbol{c}$的点积, 因而是一数量. 此积的值是由$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$的长度和$\boldsymbol{c}$在$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$上投影之积来给出(图 6.8). 但由于$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$是一个垂直于$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$所在平面的向量, 其长度在数值上等于$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$为其相邻两边的平行四边形的面积, 且由于

$\boldsymbol{c}$ 在 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 上的投影就是由 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 为其相邻边的平行六面体之高，因此 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 在数值上等于该平行六面体的体积，另一方面，我们看到，$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 在数值上等于以 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 为棱的四面体体积的六倍．此积的符号取决于这三个向量的相对指向，当且仅当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 形成一右手系时为正号，在此情况下，$\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 位于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 所确定平面的同侧．由此事实不难得出

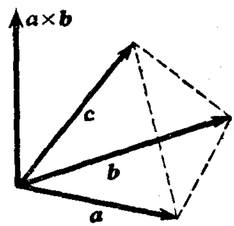


图 6.8

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} \tag{30}$$

而另外的积

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a} \tag{31}$$

具有相反的代数符号．可见，三重数性积在三个向量循环置换时，其值不变．因为从方程(30)和(12)还可得出

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$$

由此可知，在三重数性积中点积和叉积可互换．为此，常用符号 $(\boldsymbol{abc})$ 来表示方程(30)中所列相等的各个积．

若令

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{c}=c_x\boldsymbol{i}+c_y\boldsymbol{j}+c_z\boldsymbol{k}$$

则求得

$$(\boldsymbol{abc})=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$$
$$=a_x(b_yc_z-b_zc_y)+a_y(b_zc_x-b_xc_z)+a_z(b_xc_y-b_yc_x)$$

或写为行列式形式

$$(\boldsymbol{abc})=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \tag{32}$$

从方程(32)可以看出，若积 $(\boldsymbol{abc})$ 中的两个向量平行，则此积为零，因为在此情况下，在行列式(32)的两行中，其对应元素是成比例的.

第三类三重积

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$$

显然是一个向量。因为它垂直于 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，而 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 本身又垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 所构成的平面，同时它还垂直于 $\boldsymbol{c}$，因此，$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ 是一个在 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 所构成的平面内且垂直于 $\boldsymbol{c}$ 的向量. 由此，该积必定可表示为 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的线性组合，即

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}$$

为确定式中数量 m 和 n，可先将上式两端与 $\boldsymbol{c}$ 进行点积，推导出

$$m\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+n\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$$

然后令 $n=\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$，则有 $m=-\lambda\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，因而对某数量 λ 有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\lambda[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}] \tag{33}$$

将 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$ 等关系式代入，最后得

$$\lambda=1$$

因而有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a} \tag{34a}$$

(习题 22 中介绍了一种确定 λ 的较为简便的方法). 类似地，向量 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 可表示为 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 的线性组合，且由 (34a) 可推导出恒等式

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{c} \tag{34b}$$

如果我们注意到，在每个展开式中，一项是其左端的中间因子乘以其他两个因子的点积，而带负号的一项则是左端括号内另一

因子乘以其余因子的点积，则这两个公式（34a、b）就很容易记住.

应该注意，如 $\boldsymbol{ab}$, $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ 这样的组合在此并没有给予定义.

含有三个以上向量的向量积不难用上述的积予以计算，例如积

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})$$

可看作为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和$(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})$的三重数量积，因而，若暂时令 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}$ 则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{u}&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{u}\\&=\boldsymbol{a}\cdot[\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})]\\&=\boldsymbol{a}\cdot[(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{d}]\end{aligned}$$

因而

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) \tag{35}$$

特别是当取

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a},\quad \boldsymbol{d}=\boldsymbol{b}$$

时，方程(35)化为

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 \tag{36}$$

此关系式称为拉格朗日恒等式. 方程(36)的正确性还可由下述事实得出，即它可改写为

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=a^2b^2-a^2b^2\cos^2\theta=(ab\sin\theta)^2$$

此结果可由 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的定义推出.

6.5 向量的微分

设向量 $\boldsymbol{v}$ 的定义含有参变量 t，若极限

$$\frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t} \tag{37}$$

存在，则称此极限为向量 $\boldsymbol{v}(t)$ 对 t 的导数.

由此定义可知，一数量 $s(t)$ 和一向量 $\boldsymbol{v}(t)$ 之积的导数可由熟知的乘积求导法则给出，即

$$\frac{d}{dt}s\boldsymbol{v}=s\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}+\frac{ds}{dt}\boldsymbol{v} \tag{38}$$

所以，如果一向量用其沿固定坐标轴的分量表示为

$$\boldsymbol{v}=f(t)\boldsymbol{i}+g(t)\boldsymbol{j}+h(t)\boldsymbol{k}$$

由于其中 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 为常向量，故有

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{df}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{dg}{dt}\boldsymbol{j}+\frac{dh}{dt}\boldsymbol{k} \tag{39}$$

同样按定义可知，含有两个或两个以上向量之积，其导数可按相应的数量情况来计算，但其因子的顺序保持不变. 因此我们可得出如下公式，例如

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\cdot\boldsymbol{b}$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\times\boldsymbol{b}$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}\cdot\frac{d\boldsymbol{b}}{dt}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\frac{d\boldsymbol{c}}{dt}$$

在上述第一个公式中，其各项的因子顺序是无关紧要的，但对第二个公式和第三个公式，这就不成立.

一个长度一定，但方向改变的向量，其导数垂直于该向量. 这可由下述情况看出，对长度为一定的向量 $\boldsymbol{a}$，则有

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})=\frac{d}{dt}a^2=0$$

和

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})=2\boldsymbol{a}\cdot\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}$$

这些结果仅在 $\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}$ 为零或 $\frac{d\boldsymbol{a}}{dt}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}$ 时才是相容的.