数学思维漫谈

张文忠编著

知识出版社

数学思维漫谈

张文忠 著

知识出版社

数 学 思 维 漫 谈
张 文 忠 著
知 识 出 版 社 出 版
(北京安定门外外馆东街甲1号)
新华书店北京发行所发行
中国大百科全书出版社印刷厂印刷
开本787×1092 1/32 印张6 字数124千字
1986年3月第1版 1986年3月第1次印刷
印数：1-16000
书号：7214.43 定价：1.00元

内 容 提 要

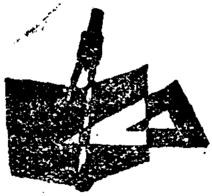
本书介绍在学习初等数学时，对一些符号、概念、图形等应有的认识和常用的思维推理方法。着重指出学习中常犯、易犯的错误，并以所列各类错例为依据，从思维方面探索出错的原因，以加深对概念的理解，增强对公式的记忆。

本书是为具有初等数学知识的读者编写的知识性、通俗性读物。

目　录

一、数学的生命在于思维

——愿你作一个勤于思维的人



你在学习数学的时候，一定记得不少的定理和公式。这些公式和定理是几千年来人们研究数学时的各种精思妙想的结晶，它能有助于你正确而敏捷地思维。但是，在千姿万态的自然界中绝没有对一切都适用的公式，并且公式和定理永远也不能代替你自己的思维。只有那些勤于思维的人才能真正领略学习数学的无穷乐趣。

能什么时候都硬套公式吗？

这里还是从你童年时候就熟悉的问题说起吧。

例如，当你第一次听到“一棵树上有10只鸟，用枪打下1只以后，树上还有几只鸟”这个问题时，你是怎么回答的？你曾答过还有 9 只鸟吗？大多数小朋友都会动脑筋，知道这不能用通常的减法，因为枪一响（自然，这个题目出现的时候，还难得有现在的惊险小说中的无声手枪或科幻小说中的激光枪，要是那样问题可真有点复杂了）其余 9 只鸟都吓得飞走了。

类似地，“一只桶里有10条鱼，其中死掉了一条鱼，问桶里还有几条鱼？”这里也不能硬用减法，因为数鱼的条数时，死鱼还是得算1条鱼嘛。

再来看一个有趣的问题：有两瓶墨水，一瓶是红墨水，另一瓶是蓝墨水。如果用一根滴管先从蓝墨水瓶里吸一滴蓝墨水滴到红墨水瓶里，再从红墨水瓶里吸一滴同样体积的混合后的墨水滴到蓝墨水瓶里(图1-1)。现在问你，红墨水瓶里的蓝墨水与蓝墨水瓶里的红墨水相比，究竟哪一个多些？

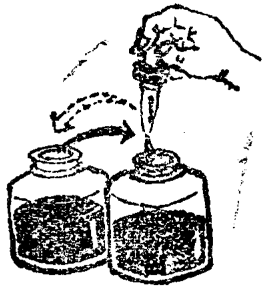


图1-1

你怎样考虑这个问题呢？计算浓度你是熟悉的。大概是这样想吧：原来的红墨水和蓝墨水是一样多的，设体积都是M。又设一滴墨水的体积为m，当一滴蓝墨水滴入红墨水瓶后，还必须搅匀，这时总体积为$M+m$，其中所含蓝墨水的浓度应为$\frac{m}{M+m}$，所含红墨水的浓度为$\frac{M}{M+m}$。

如果再从红墨水瓶中吸一滴红蓝混合均匀的墨水滴入蓝墨水瓶中，则红墨水瓶中的蓝墨水含量就减少为

$$m-m\cdot\frac{m}{M+m}=\frac{mM+m^2-m^2}{M+m}=\frac{mM}{M+m}。$$

而蓝墨水瓶中的红墨水，即第二次滴过来的一滴混合均匀墨水中的红墨水的含量为

$$m \cdot \frac{M}{M+m} = \frac{mM}{M+m}.$$

由此可见，最后在红墨水瓶中的蓝墨水与蓝墨水瓶中的红墨水一样多。

可是所给的问题并没有两个墨水瓶中原来的墨水体积一样大的条件，也没有说滴了第一滴墨水后要搅拌均匀的话，这时你如何用上面的方法进行计算呢？

如果你仔细思考一下，会明白这个问题的答案与原来墨水的体积以及是否搅拌均匀没有关系。我们只需要研究第二次所吸到的那滴墨水，因为它和第一滴的体积相等，都等于 m。假设这滴不一定是均匀混合的墨水中，蓝墨水所占的体积为n，那就是说体积为 $m-n$ 的红墨水被滴入了蓝墨水瓶中。而在红墨水瓶中最初滴入的蓝墨水体积为 m，那剩下的蓝墨水的体积也应当是$m-n$。即红墨水瓶中的蓝墨水与蓝墨水瓶中的红墨水一样多。

“鸡兔同笼”的妙解

常见一些同学在学了方程以后，对任何一个简单的实际问题都只有依赖于设未知数、列方程，而且一定要用笔才能按步骤求得答案。一当要求心算，往往就束手无策。你试看看下面这个古典的“鸡兔同笼”的问题：

一个笼中有鸡和兔50只，它们的脚共 140只，问笼中的鸡和兔各有多少只？

如果把鸡和兔的只数分别设成两个未知数，你一定能很快地列出一个二元一次方程组并求得问题的解答。现在你不

列方程而仅靠你的思维进行心算求解，行不行呢？

我们很容易想到50只动物不可能全是鸡或兔，因为这两种情况的脚将分别是100只和200只。如果鸡兔各半呢？25只鸡有脚50只，25只兔有脚100只，总共150只，比题中所设多了10只脚，可见鸡应比25只多，兔应比25只少。设鸡有28只，兔有22只，这时脚共144只，还多了4只脚，兔还应少一点。若鸡有30只，兔有20只，这时脚恰有140只。这就是我们要寻求的答案：笼中有鸡30只，兔20只。

你可能很瞧不起这种作题的办法。但这种试验和探索却是人们经常用到的一种思维方法：它通过尝试、失败、再尝试、……来探求问题的解答，每次新的尝试都力图纠正前一次的错误。你也可以说它是一种“逐次逼近”法吧，它不正是在通过尝试而逐渐逼近问题的解答吗？

当然，上面的方法是费事的。如果你能对问题有一种巧妙的思考，常常可以很容易就得到问题的解答。下面就是美国数学家卜里耶在他的《数学的发现》一书中对上述问题的一个巧妙的解法：

如果你能有幸见到一种异常的情况：笼中的所有的鸡都一只脚站立着，所有的兔都用两只脚站立着。这时触地的脚只有140只脚的一半，即70只。而70这个数目相当于鸡数了一次而兔数了两次的结果。本来只有50只动物，由于兔数了两次而变为70只，那70与鸡兔总数50的差70－50＝20就该是兔的只数。于是鸡的只数为50－20＝30。

这类巧妙的推想比机械地列式求解更能促进你的思维。你也试着想一个解法好吗？说不定你聪颖的思维能够比得上卜里耶对这个题目的妙想哩。

你听说过加里宁的一句名言吗？"数学是锻炼思维的'体操'"。青少年朋友们，勤于思考吧，数学能使你的思维更加正确而敏捷。当你埋头于公式和习题之中，各种资料涌向你身边的时候，别忘了你自己的思维。多做一些不通过自己认真思考的练习会有多少收获呢？不是经常见到机械地记住了一大堆公式而不会灵活运用的例子吗？

一个下料的实际问题

上面的话并不是说不需要记住公式、定理和典型的解题方法，理解并记住它们是完全必要的。但是，出现在你面前的大量的数学问题都不是把定理和公式信手拈来就一定能解的，这时仍然需要你积极思维才能探索到求解的途径。我们一起来讨论下面这个下料的例子吧。

有一块边长为 a 的正方形铁皮，想用它来焊接一个有盖的长方体的油箱。如何下料才能使它的容积最大？这里不计铁皮的厚度和接头的重叠部分，并且每个面的铁皮不能有拼缝。

你对这个问题首先会想到什么？可能是"表面积相同的长方体中，正方体的体积最大"。但这个结论对我们的问题并不适用，因为在每个侧面不准拼接的条件下所给的铁皮不可能剪成六块相同的小正方形而没有剩余。若焊接成的是一个正方体，它的棱长最多只能是$\frac{a}{3}$$\left[\right.$如图1-2 所示，体积为

$V_1=\left(\frac{a}{3}\right)^3=\frac{a^3}{27}$$\left.\right]$。它还丢掉了一大块铁皮（阴影部分）。

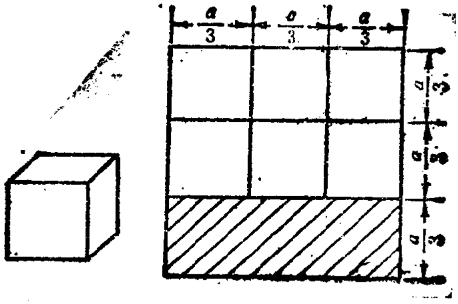


图1-2

显然，这不是我们所需要的下料方法。

没有现成的方法可套用，只好尝试着剪吧，比如我们按图 1-3所示作成一个底面是边长为$\frac{a}{4}$的正方形，高为$\frac{3}{4}a$ 的长方体。

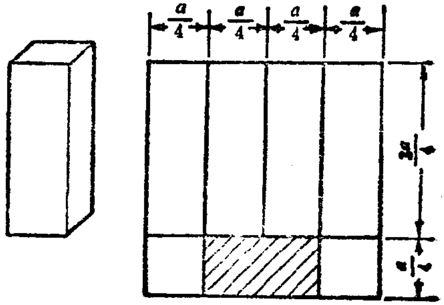


图1-3

它的体积是

$$V_2=\left(\frac{a}{4}\right)^2\cdot\frac{3}{4}a=\frac{3a^3}{64}.$$

因为 $V_2-V_1=\frac{3a^3}{64}-\frac{a^3}{27}=\frac{17a^3}{64\cdot 27}>0$ （$\because$ $a>0$），所以$V_2>V_1$。

再想想，我们还可如图1-4 这样，作成一个底面是边长为$\frac{a}{3}$的正方形，高为$\frac{a}{2}$的长方体。它的体积是

$$V_3=\left(\frac{a}{3}\right)^2\cdot\frac{a}{2}=\frac{a^3}{18},$$

$$\because\quad \frac{a^3}{18}=\frac{3a^3}{54}>\frac{3a^3}{64},\quad \therefore\quad V_3>V_2。$$

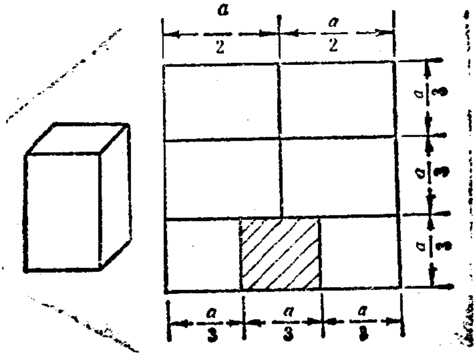


图1-4

能不能再改进一些哩？如果象图1-5这样，可以作成一个长、宽、高分别为$\frac{2}{5}a$、$\frac{3}{10}a$、$\frac{1}{2}a$ 的长方体，它的体积为

$$V_4=\frac{2}{5}a\cdot\frac{3}{10}a\cdot\frac{1}{2}a=\frac{3a^3}{50}。$$

$$\because\quad \frac{3a^3}{50}>\frac{3a^3}{54}=\frac{a^3}{18},\quad \therefore\quad V_4>V_3。$$

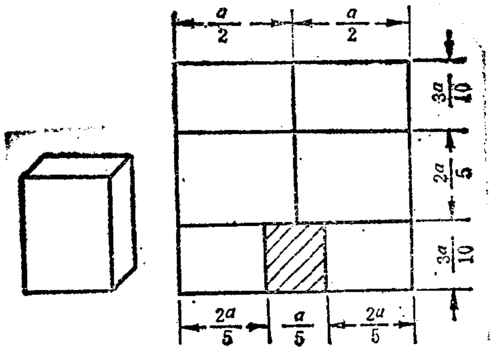


图1-5

可以看出：以图1-5这种方法下料，如果改变底面长方形的长和宽（保持高为$\frac{a}{2}$），长方体的体积就会跟着变化。底面的长和宽取多少时才会使长方体的体积最大呢？这就不需要老是这样试一试了，你所熟悉的二次函数求极值的方法到这时算有用武之地了。

如图1-6，设所作出的长方体底面长方形的宽为x，则底面的长为$a-2x$ 时能最大限度地利用材料，长方体的高显然为$\frac{a}{2}$。其体积为

$$V=x(a-2x)\frac{a}{2}$$

$$=-ax^2+\frac{a^2}{2}x,$$

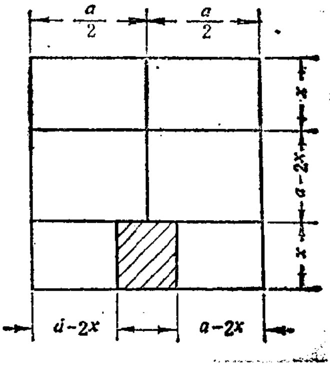


图1-6

这里V是x的二次函数，配方得

$$V=-a\left[x^2-\frac{a}{2}x+\left(\frac{a}{4}\right)^2-\left(\frac{a}{4}\right)^2\right]$$

$$= -a\left(x-\frac{a}{4}\right)^2+\frac{a^3}{16}$$

∵ $a>0$， ∴ 当 $x-\frac{a}{4}=0$，即 $x=\frac{a}{4}$ 时，V 取得极大值 $\frac{a^3}{16}$。

这时应如图1-7这样下料，恰好整块铁皮都用上了。我们用 V_5 表示它的体积，那

$$V_5=\frac{a}{4}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}=\frac{a^3}{16}。$$

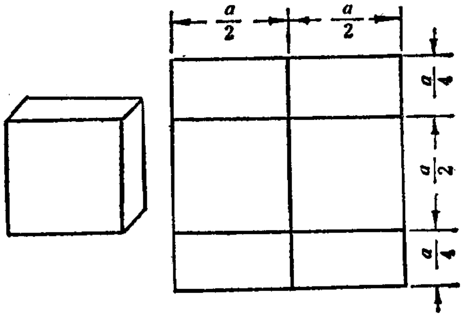


图1-7

这个结论是无需怀疑的，如果你还想与 V_4 比一下，也显然有

$$∵\quad \frac{a^3}{16}=\frac{3a^3}{48}>\frac{3a^3}{50},$$

$$∴\quad V_5>V_4$$

到此能说图 1-7 的下料方法所焊成的长方体容器的容积(因不计铁皮厚度，故可认为容积等于体积) V_5 就是最大值吗？可不能这样草率，这还只是按图1-5那种考

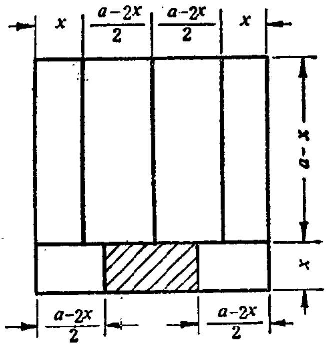


图1-8

想方法推出来的哩。如果按另外的安排方式，会不会更大呢？比如按图 1-8 这种方式，底面不作成正方形而作成长方形，你还可以如图 1-7 这样去推求它的极大值(这要稍麻烦一点。其极值恰好等于V_4，它比 V_1 要小）。只有通过证明你才能肯定图 1-6 这种下料法所得到的容积最大的结论是正确的。

如果你不吝惜自己的思维的话，你还可以把这个有趣的问题再想多一点：假如焊接成一个圆柱形的容器，容积是否会大一些？焊接成另外的一种几何体，结果又会怎样呢？

有道理还是无道理？

当你看别人对一个数学问题的解答过程时，也需要时时运用你的思维：这样求解有根据吗？还有更好的解法没有？……下面我们来看一个有名的“巧分马群”的问题吧。

从前有个牧民，死后给他的三个儿子留下遗嘱：“我把劳动一生所得的17匹马留给你们，分的时候老大要$\frac{1}{2}$，老二要$\frac{1}{3}$，老三要$\frac{1}{9}$。把马分完但不许把马宰了来分。”兄弟三人拿着这个遗嘱商量了很久，可是想来想去总未能按老人的意图分下去，他们只好去请教一位见多识广的老大爷。老大爷想了想后说：“我借一匹马给你们，共有18匹马，这样就好分了。”结果老大得$\frac{1}{2}$是 9 匹，老二得$\frac{1}{3}$是 6 匹，老三得$\frac{1}{9}$是 2 匹，最后剩下一匹还给这位老大爷。这个巧妙的分法使各人都觉得比应得的似乎多了一点，兄弟三人都感到满意。

你看了这个分法有什么想法呢？很可能你会觉得这种分法改变了原题的条件，根本没有道理（支持这种看法的人还不少哩），因为哪能随便增加一匹马呢？

真的是没有道理吗？我们来看$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$和$\frac{1}{9}$这三个数的和

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{17}{18},$$

它们的和不等于1，可见一次不可能把17匹马分完。第一次老大、老二、老三分得马的匹数分别为

$$\frac{17}{2}、\frac{17}{3}、\frac{17}{9}。$$

即总共分掉了$17\times\frac{17}{18}$匹马，还剩下$\frac{17}{18}$匹马。

按照相同的比例，第二次再分剩下的这$\frac{17}{18}$匹马时，三人依次应得

$$\frac{17}{18}\cdot\frac{1}{2}、\frac{17}{18}\cdot\frac{1}{3}、\frac{17}{18}\cdot\frac{1}{9}。$$

这次还剩下：

$$\frac{17}{18}-\left(\frac{17}{18}\cdot\frac{1}{2}+\frac{17}{18}\cdot\frac{1}{3}+\frac{17}{18}\cdot\frac{1}{9}\right)=\frac{17}{18^2}\text{匹马。}$$

类似地，第三次分这剩下的$\frac{17}{18^2}$匹马时，三人依次应得

$$\frac{17}{18^2}\cdot\frac{1}{2}、\frac{17}{18^2}\cdot\frac{1}{3}、\frac{17}{18^2}\cdot\frac{1}{9}。$$

你容易看出，每一次都不可能把马分完，分第n次时所