应用数学丛书

线性系统与多变量控制

叶庆凯 编著

国防工业出版社

应用数学丛书

线性系统与多变量控制

叶庆凯 编著

国防工业出版社

内 容 简 介

全书共八章。分为两部分。第一部分共四章。除第一章介绍一些必要的数学知识外，重点介绍了用多项式矩阵研究多变量线性系统的理论与方法，是全书的理论基础。第二部分介绍多变量线性系统的设计方法。第五章是极点配置方法，第六章是频率域方法，第七章是复变函数方法，第八章是解耦方法。

本书可供从事化工、电力、机械等生产过程自动化和航空、航天、力学等领域自动控制的技术人员阅读，也可作为自动控制专业的研究生和大学高年级学生的教材。

应用数学丛书

线性系统与多变量控制

叶庆凯　编著

责任编辑　王祖珮

国防工业出版社出版、发行

（北京市车公庄西路老虎庙七号）

新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印刷

*

850×1168 1/32 印张 $9\,^5/_8$ 249千字

1989年4月第一版　1989年4月第一次印刷　印数：0,001—2,680册

ISBN 7-118-00295-X/O·18　　定价：5.90元

出版说明

近二十年来电子工程、控制工程、系统工程及其它领域都获得巨大发展。众所周知，这些科学技术研究的发展是与现代逐渐形成的应用数学学科紧密相联，相辅相成。尤其近年发展起来的边缘学科，更是与数学紧密结合。但一般数学专著比较偏重于论证严谨，全面系统，篇幅较大，理论较深。广大科技工作者学习此类著作，往往需时较多，与工作结合不紧，收效不大。本丛书将为目前在电子工程、控制工程、系统工程等领域工作的同志在数学基础的提高上，提供适合其工作特点的数学参考书。

本丛书是一种介于现代应用数学专著与工程专业理论书籍之间的桥梁参考著作。更着重于科技工作中应用较多的数学概念、分析和解题的基本技巧。也包括一部分适合于实际工作者为学习更高深的现代应用数学专著所需之基础知识。

本丛书选材包括三个方面：基础数学；应用数学有关领域的基础介绍；应用于科技中的典型基础专业理论。出版采用分册形式。各册内容独立，自成系统，但仍有少量交叉，分期分批出版。

丛书可供大专院校有关专业研究生、教师、从事科研生产的工程师参考。

前　言

控制系统理论从二十世纪三十年代就开始形成，但它的发展实际上是从二次大战后期才开始的。当时主要是战争的需要，开始研究了一系列的武器自动控制系统。例如：飞机的自动驾驶系统，雷达跟踪系统，等等。战后自动控制系统极其广泛地应用到了军事、民用的各个领域，对推动生产的发展起到了重要的作用，收到了明显的经济效益。

从控制系统理论的角度来看，这一阶段的特点是处理单输入单输出反馈系统，其要求是将输出保持在某一确定值上或跟随某一目标变化。由于引入了反馈的思想，使控制系统的精度大大提高，但也带来了一系列的问题，例如稳定性、动态品质等。这一时期，用来分析与综合控制系统最有成效的是频率域方法。

但是，这样的一套方法在处理多输入多输出系统时遇到了困难。到 1955 年后，由于空间技术的发展，大量多输入多输出问题提了出来。这引起了系统理论的根本改革。也就是说此时系统理论发展到了它的第二阶段。这一阶段的主要代表是多变量控制与最优控制。在线性多变量控制方面，首先出现的是状态空间方法，它特别适宜于许多航天问题，它们的数学模型是比较精确的。后来又出现了频率域方法（又称为代数方法）与几何方法。本书主要介绍频率域方法，这一方法到七十年代中期已经发展得比较完整。它区别于其它方法的特点是结合了系统理论发展的第一阶段与第二阶段的内容，在多变量系统的研究中延用了不少在单输入单输出系统中证明是十分有效的提法、概念、手段等等。特别，将传递函数的描述方法以及尼奎斯特（Nyquist）稳定判据等设计方法推广到多变量系统中来了。这一方面的代表人物是罗森布劳克（Rosenbrock）和麦克法兰（MacFarlane）等。

时至今日，到了八十年代，可以说系统理论已经发展到了它的第三阶段。随着人们把整个工厂，整个城市，甚至整个国家视为一个控制系统，发展了“大系统理论”。这样的问题已经提出，个别的问题用一些特殊的方法也得到了解决，但系统的理论与方法还很不成熟，还有待于创造。本书不涉及这方面的内容。

全书共八章。第一章介绍一些必要的数学知识。第二章介绍状态空间理论，引入了可控性与可观测性的概念。第三、四章介绍了用多项式矩阵研究多变量线性系统的理论和方法，是全书的理论基础。从第五章开始介绍多变量线性系统的设计方法。第五章是极点配置方法，第六章是频率域方法，第七章是复变函数方法，第八章是解耦方法。

本书编写过程中，黄琳、王恩平等同志给予了热情的帮助与支持。本书初稿曾两次作为北京大学力学系“线性系统理论”课的教材。许多同学对本书的内容及编写方式提出了宝贵的意见。在此表示衷心感谢。

由于作者水平所限，书中一定会有缺点、错误，诚恳地希望读者批评指正。

目　录

第一篇　线性系统理论

第二篇 多变量线性系统设计

第一篇　线性系统理论

第一章　预 备 知 识

为方便起见，这一章复习一下线性代数与线性动力学系统的基本原理。除个别重要的定理外，一般的就不给证明了。对其证明感兴趣的读者可查阅有关的专门书籍[1~3]。

§1.1　线 性 空 间

设 F 是一个域，V 是任一种类对象的集。下列两个运算法则称为线性运算：

（1）V 中元素的加法。若 α，$\beta\in V$，有唯一确定的元素 γ 与它们对应，称为 α 与 β 之和，记作 $\gamma=\alpha+\beta$。

（2）F 中的数量与 V 中元素的乘法。若 $a\in F$，$\alpha\in V$，有唯一确定的元素 δ 与它们对应，称为 a 与 α 的数乘，记作 $\delta=a\alpha$。

设 F 是一个域，V 是任一种类对象的集。若 V 对线性运算是封闭的，且按上述定义的线性运算法则满足分配律和结合律，则称 V 为域 F 上的线性空间。V 的元素称为它的矢量。

例1.1　取 F 为实数域，V 是所有顺序排列的 n 个实数 $x_1,\cdots,x_n$ 的全体构成的集。记它的元素为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

现定义加法与数乘运算为

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}, \quad \alpha\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

其中 $\alpha\in F$，$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}\in V$。则V为域F上的一个线性空间。

若在这一线性空间中再定义内积

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=x_1y_1+\cdots+x_ny_n,\quad \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}\in V \tag{1.3}$$

则此线性空间成为 n 维欧氏空间，记为 E_n。

例1.2 取F为实数域，V是所有次数低于或等于 n 的实系数多项式的全体构成的集。按通常多项式加法以及多项式与数的乘法运算法则，V为域F上的一个线性空间。

如果对于线性空间V中的矢量 $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\ \boldsymbol{v}_m$，在域$F$中不存在不全为零的数 $\beta_1,\cdots,\ \beta_m$ 使

$$\beta_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+\beta_m\boldsymbol{v}_m=\boldsymbol{0}$$

成立，则称矢量 $\boldsymbol{v}_1,\ \cdots,\boldsymbol{v}_m$ 是线性独立（线性无关）的；否则，它们是线性相关的。

如果域F上的线性空间V中存在 n 个矢量 $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\ \boldsymbol{v}_n$ 是线性独立的，而V中的任意 $n+1$ 个矢量均是线性相关的，则称V是 n 维的，而 $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\ \boldsymbol{v}_n$ 构成它的一组基。V中的任一矢量 $\boldsymbol{x}$ 均可表示成

$$\boldsymbol{x}=\alpha_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{v}_n$$

其中 $\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n$ 是域F中的数量。

设V和W是同一域F上的两个线性空间，映射L：$V\to W$若满足条件：

（1）$L(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=L(\boldsymbol{\alpha}_1)+L(\boldsymbol{\alpha}_2)$，$\forall\,\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2\in V$

（2）$L(a\boldsymbol{\alpha})=aL(\boldsymbol{\alpha})$，$\forall\,a\in F$，$\boldsymbol{\alpha}\in V$

则称L为线性变换。

若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_r\in V$ 是线性独立的，L：$V\to W$是一个线性变换，则 $L(\boldsymbol{\alpha}_1),\ \cdots,\ L(\boldsymbol{\alpha}_r)$ 也是线性独立的。

设 $\boldsymbol{v}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{v}_r$ 为域F上线性空间V中的一组矢量，这组矢

量的一切线性组合

$$a_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+a_r\boldsymbol{v}_r,\quad a_1,\ \cdots,\ a_r\in F$$

构成V的一个线性子空间W。称W为由矢量$\boldsymbol{v}_1$，…，$\boldsymbol{v}_r$生成的子空间。

如果$\boldsymbol{v}_1$，…，$\boldsymbol{v}_r$生成V的子空间W，而A是线性变换，且$A\boldsymbol{v}_1$，…，$A\boldsymbol{v}_r$也属于同一子空间W，则称W为A的不变子空间。

§1.2 矩阵和行列式

在域F上的一个$n\times m$矩阵是

$$A=(a_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

其中每一个$a_{ij}\in F$。我们称a_{ij}为矩阵的第i行第j列元素，简称为第i，j个元素。若$n=m$，称A为域F上的n阶方阵。

A的转置矩阵是一个$m\times n$矩阵，它的第i，j个元素是a_{ji}。本书中以上标T来表示矩阵的转置，因而A的转置矩阵记为A^T。

若$m<n$，A的对角线是$(a_{11},\ a_{22},\ \cdots,a_{mm})$；若$n<m$，$A$的对角线是$(a_{11},\ a_{22},\ \cdots,a_{nn})$；当$m=n$时，$A$的对角线叫做它的主对角线。一个$n$阶方阵，如果除主对角线元素外其余所有元素均为零，则称为是对角形矩阵，记为$\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$。称$\mathrm{diag}(1,\ 1,\cdots,1)$为$n$阶单位矩阵，记为$I_n$。

两个$n\times m$矩阵A和B的和仍是一个$n\times m$矩阵，它的第i，j个元素是$a_{ij}+b_{ij}$，即

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij}) \tag{1.5}$$

一个$n\times m$矩阵A和数量$a\in F$的乘积仍为一个$n\times m$矩阵，它的第i，j个元素是aa_{ij}，即

$$aA=Aa=(aa_{ij}) \tag{1.6}$$

一个$m\times n$矩阵A和一个$n\times r$矩阵B的乘积是一个$m\times r$

矩阵，它的第 i ，j 个元素是 $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$，即

$$AB=(a_{ik})(b_{kj})=\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right) \tag{1.7}$$

显然，矩阵的乘法一般说来是不可交换的。但容易验证，单位矩阵和任何方阵的乘积是可交换的，即

$$IA=AI=A \tag{1.8}$$

另外，还可验证

$$(AB)^T=B^TA^T \tag{1.9}$$

称 $n\times 1$ 矩阵为 n 维列矢量。由§1.1例1.1可知，n 维列矢量的全体构成域F上的线性空间。本书中将列矢量简称为矢量。类似地，称 $1\times n$ 矩阵为 n 维行矢量。这样，一个 $n\times m$ 矩阵A的每一列是个 n 维矢量，而它的每一行是个m维行矢量。

若A是个 n 阶方阵，那末有两个标量（即域F中的元素）与它相联系。它们是A的迹和它的行列式。

n 阶方阵A的迹是它的主对角线上的各元素之和，记为 $\mathrm{tr}A$，即

$$\mathrm{tr}A=\sum_{i=1}^{n} a_{ii} \tag{1.10}$$

且

$$\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}A+\mathrm{tr}B$$

n 阶方阵A的行列式记为 $\det A$ 或$|A|$。我们采用行列式的递归定义：若 $n=1$，

$$|A|=a_{11}$$

若 $n>1$，

$$|A|=(-1)^{i+1}(a_{i1}M_{i1}+a_{i2}M_{i2}+\cdots+a_{in}M_{in}),\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{1.11}$$

其中 M_{ij} 是 a_{ij} 的余子式，亦即从矩阵A中划掉第 i 行和第 j 列后所构成的矩阵的行列式。带符号的余子式 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为

元素 a_{ij} 的代数余子式，记为 A_{ij}，即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij} \tag{1.12}$$

这样，式（1.11）可简写为

$$|A|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij},\quad i=1,2,\cdots,n \tag{1.13}$$

对于两个 n 阶方阵 A 和 B，有

$$|A^T|=|A|$$

$$|AB|=|A||B|$$

$$|aA|=|aI_nA|=|aI_n||A|=a^n|A|$$

其中 $a\in F$。

在一个 n 阶方阵中将两行元素互换，行列式的值改变符号；在一个 n 阶方阵中将某一行中每个元素乘上同一个标量再加到另一行的对应元素上去，行列式的值保持不变。

容易验证，所有 n 阶方阵在上述矩阵加法与乘法规则下组成一个环。当然，在 $n>1$ 时，这是一个非交换环。

下面介绍矩阵的子式这一重要概念。设 A 是一个 $n\times m$ 矩阵，从 A 中任取 r 行（$r\leqslant m$，$r\leqslant n$），设为第 $i_1,\cdots,i_r$ 行，以及 r 列，设为 $j_1,\cdots,j_r$ 列，由这 r 行和 r 列交点处的元素所构成的矩阵的行列式称为矩阵 A 的 r 阶子式，记为

$$A_{j_1,j_2,\cdots,j_r}^{i_1,i_2,\cdots,i_r}$$

它是一个数。显然，n 阶方阵 A 的元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 等于

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}A_{1,2,\cdots,j-1,j+1,\cdots,n}^{1,2,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n} \tag{1.14}$$

若 $i_k=j_k$，（$k=1,\cdots,r\leqslant n$），则称 $A_{j_1,\cdots,j_r}^{i_1,\cdots,i_r}$ 为矩阵 A 的 r 阶主子式。显然，当 A 是 n 阶方阵时，它的行列式即它的 n 阶主子式。

如果 A 是域 F 上的 n 阶方阵，当 $|A|=0$ 时，则称 A 是奇异方

阵，否则称它是非奇异方阵，这里0是域F中的零元素。如果A是非奇异的，则它的逆A^{-1}存在，且具有性质

$$A^{-1}A=AA^{-1}=I \tag{1.15}$$

A^{-1}的第i，j个元素将是$A_{ji}/|A|$。如果一个矩阵的第i，j个元素是A_{ji}，则称此矩阵为A的伴随矩阵，记为$\mathrm{adj}A$。所以

$$A^{-1}=(\mathrm{adj}A)/|A| \tag{1.16}$$

若n阶方阵A，B都是非奇异的，则AB也是非奇异的，且有

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1} \tag{1.17}$$

考虑域F上的一个$n\times m$矩阵A。若它有一个r阶子式是F中的非零元素，而全部$r+1$阶子式都是F中的零元素，则称此矩阵的秩为r，记为$\mathrm{rank}(A)=r$。这时，A的m个n维列矢量中有且仅有r个是线性独立的；同样，A的n个m维行矢量中也有且仅有r个是线性独立的。一个$n\times m$矩阵，若它的秩为n，则称为是行满秩的；若它的秩为m，则称为是列满秩的。一个n阶方阵满秩当且仅当它的行列式不为零。若矩阵A的秩为r_a，矩阵B的秩为r_b，则它们的乘积C的秩

$$r_c\leqslant\min(r_a,\ r_b) \tag{1.18}$$

上面假定了矩阵A的元素a_{ij}是属于某个域F的，当a_{ij}属于某个环R时，上面讲的矩阵及其行列式的性质除了$|A|\neq 0$不能保证A^{-1}存在外其它均仍成立。这种情况下，A的行列式是R中的一个元素。当用式（1.16）来确定A的逆射必须计算A的行列式的逆。但并不是R中的每个非零元素都是可以求逆的。因此，为了求A的逆，现在必须要求$|A|$在R中可逆，亦即$|A|$必须是R中的一个可逆元。例如，实系数多项式构成一个环R，它以非零实数为它的可逆元。因而一个多项式矩阵只有当它的行列式是一个非零实数时才是可逆的。可逆的多项式矩阵又称为单模矩阵，它在本书以后的讨论中起着重要的作用。容易看出，一个单模矩阵的逆也是一个多项式矩阵，且也是可逆的。

下面介绍几个关于行列式运算的定理。

定理1.1[3]（行列式的拉普拉斯（Laplace）展开式）

若A是环R上的一个n阶方阵，则

$$|A|=\sum_{j}(-1)^{i_1+\cdots+i_r+j_1+\cdots+j_r}\cdot A_{j_1,\cdots,j_r}^{i_1,\cdots,i_r}\ A_{j'_1,\cdots,j'_{n-r}}^{i'_1,\cdots,i'_{n-r}} \quad (1.19)$$

其中$1\leqslant r\leqslant n-1$是任选的；$i_1<i_2<\cdots<i_r$和$i'_1<i'_2<\cdots<i'_{n-r}$组成完全的标号集$\{1, 2, \cdots, n\}$；$j_1<j_2<\cdots<j_r$和$j'_1<j'_2<\cdots<j'_{n-r}$也组成完全的标号集；式（1.19）中的和号遍及全部$j_1, j_2, \cdots, j_r$的可能选择，而$i_1, i_2, \cdots, i_r$是任选的。

一个矩阵如果用子矩阵的形式来表示则称为分块矩阵。例如

$$P=\begin{pmatrix} T & U \\ -V & W \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

其中P是$(n+m)\times(n+l)$矩阵，T是$n\times n$矩阵，U是$n\times l$矩阵，V是$m\times n$矩阵，W是$m\times l$矩阵。子矩阵T，U，$-V$，W称为块。在适当的维数限制下，对分块矩阵说来，矩阵的加法与乘法规则仍然成立。

定理1.2 用表示式（1.20）。当$l=m$时有

$$\begin{vmatrix} T & O \\ -V & W \end{vmatrix}=|T||W| \quad (1.21)$$

证明 令$t=n+m$阶方阵

$$P=\begin{pmatrix} T & O \\ -V & W \end{pmatrix}$$

选$r=n$，$(i_1, \cdots, i_n)$为$(1, \cdots, n)$对$|P|$进行拉普拉斯展开。此时只有当$(j_1, \cdots, j_n)$为$(1, \cdots, n)$时$P_{j_1,\cdots,j_n}^{i_1,\cdots,i_n}$才不等于零而等于$|T|$。且这时$(i'_1, \cdots, i'_m)$为$(n+1, \cdots, t)$，$(j'_1, \cdots, j'_m)$为$(n+1, \cdots, t)$。可见相应的$P_{j'_1,\cdots,j'_m}^{i'_1,\cdots,i'_m}$等于$|W|$。因此由式（1.19）可得

$$|P|=(-1)^{2(1+\cdots+n)}P_{1,\cdots,n}^{1,\cdots,n}\ P_{n+1,\cdots,t}^{n+1,\cdots,t}=|T||W|$$

完全类似地可以证明

$$\begin{vmatrix} T & U \\ O & W \end{vmatrix}=|T||W| \tag{1.22}$$

定理1.3 若T，U，V，W是域F上的矩阵，并可按式（1.20）组合成矩阵P，且$l=m$，$|T|$是F中的非零元素，则

$$|P|=|T||VT^{-1}U+W| \tag{1.23}$$

证明 因为

$$P=\begin{pmatrix} T & O \\ O & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & O \\ -V & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & T^{-1}U \\ O & VT^{-1}U+W \end{pmatrix}$$

由式（1.21）及式（1.22）有

$$|P|=|T||VT^{-1}U+W|$$

定理1.4 设A，B分别为环R上的$l\times n$及$n\times m$矩阵，则它们的乘积$C=AB$的t阶子式（$t<l$，m，n）是

$$C^{i_1,\cdots,i_t}_{j_1,\cdots,j_t}=\sum_k A^{i_1,\cdots,i_t}_{k_1,\cdots,k_t}\ B^{k_1,\cdots,k_t}_{j_1,\cdots,j_t} \tag{1.24}$$

其中

$$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_t\leqslant l;\quad 1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_t\leqslant m$$

是任意的，且和号取遍所有的标号k_1，$\cdots$，k_t，只要它们满足

$$1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_t\leqslant n$$

证明 设L是A的第i_1，$\cdots$，i_t行组成的$t\times n$矩阵，M是B的第j_1，$\cdots$，j_t列组成的$n\times t$矩阵，则显然有

$$C^{i_1,\cdots,i_t}_{j_1,\cdots,j_t}=|LM|$$

由式（1.23）有

$$|LM|=\begin{vmatrix} I_n & M \\ -L & O \end{vmatrix}$$

现在令$n+t$方阵

$$P=\begin{pmatrix} I_n & M \\ -L & O \end{pmatrix}$$

并取 $r=t$，$(i_1,\ \cdots,i_t)$ 为 $(n+1,\ \cdots,\ n+t)$ 对 $|P|$ 进行拉普拉斯展开得

$$|P|=\sum_k(-1)^{n+1+\cdots+n+t+k_1+\cdots+k_t}P_{k_1,\cdots,k_t}^{n+1,\cdots,n+t}P_{k_1',\ \cdots,\ k_n'}^{1,\ \cdots,\ n}$$

其中 $1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_t\leqslant n+t$ 和 $k_1'<k_2'<\cdots<k_n'$ 组成完全的标号集 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n+t\}$，且和号遍及 $k_1,\ \cdots,\ k_t$ 全部可能的选择。

由于当 $k_1,\ \cdots,k_t$ 中有一个大于 n 时，就有

$$P_{k_1,\cdots,k_t}^{n+1,\cdots,n+t}=0$$

所以在上式中可以限制 $1\leqslant k_1<\cdots<k_t\leqslant n$。因而

$$|P|=\sum_k(-1)^{n+1+\cdots+n+t+k_1+\cdots+k_t}(-1)^tL_{k_1,\cdots,k_t}^{1,\cdots,t}(I_n\ \ M)_{k_1',\ \cdots,\ k_n'}^{1,\ \cdots,\ n}$$

其中 $1\leqslant k_1<\cdots<k_t\leqslant n$ 和 $k_1'<\cdots<k_n'$ 组成完全的标号集 $\{1,\ 2,\cdots,\ n+t\}$，且和号取遍所有可能的 $k_1,\ \cdots,k_t$。容易看出，在这种情况下，$k_1',\ \cdots,\ k_n'$ 中一定包含有标号 $n+1,\ \cdots,\ n+t$。即

$$k_{n-t+1}'=n+1,\ \cdots,\ k_n'=n+t$$

和

$$1\leqslant k_1'<k_2'<\cdots<k_{n-t}'\leqslant n$$

且 $k_1,\ \cdots,k_t$ 及 $k_1',\ \cdots,k_{n-t}'$ 组成完全的标号集 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$。可见

$$(I_n\ \ M)_{k_1',\ \cdots,\ k_n'}^{1,\ \cdots,\ n}=\left|e_{k_1'}\ \cdots\ e_{k_{n-t}'}\ M\right| \tag{1.25}$$

其中 $e_{k'_p}$ 是 I_n 的第 k_p' 列组成的列矢量。现在，以第 $k_1,\ \cdots,\ k_t$ 行对上式右端的行列式进行拉普拉斯展开，有

$$(I_n\ \ M)_{k_1',\ \cdots,\ k_n'}^{1,\ \cdots,\ n}=(-1)^{k_1+\cdots+k_t+n-t+1+\cdots+n}M_{1,\cdots,t}^{k_1,\cdots,k_t}$$