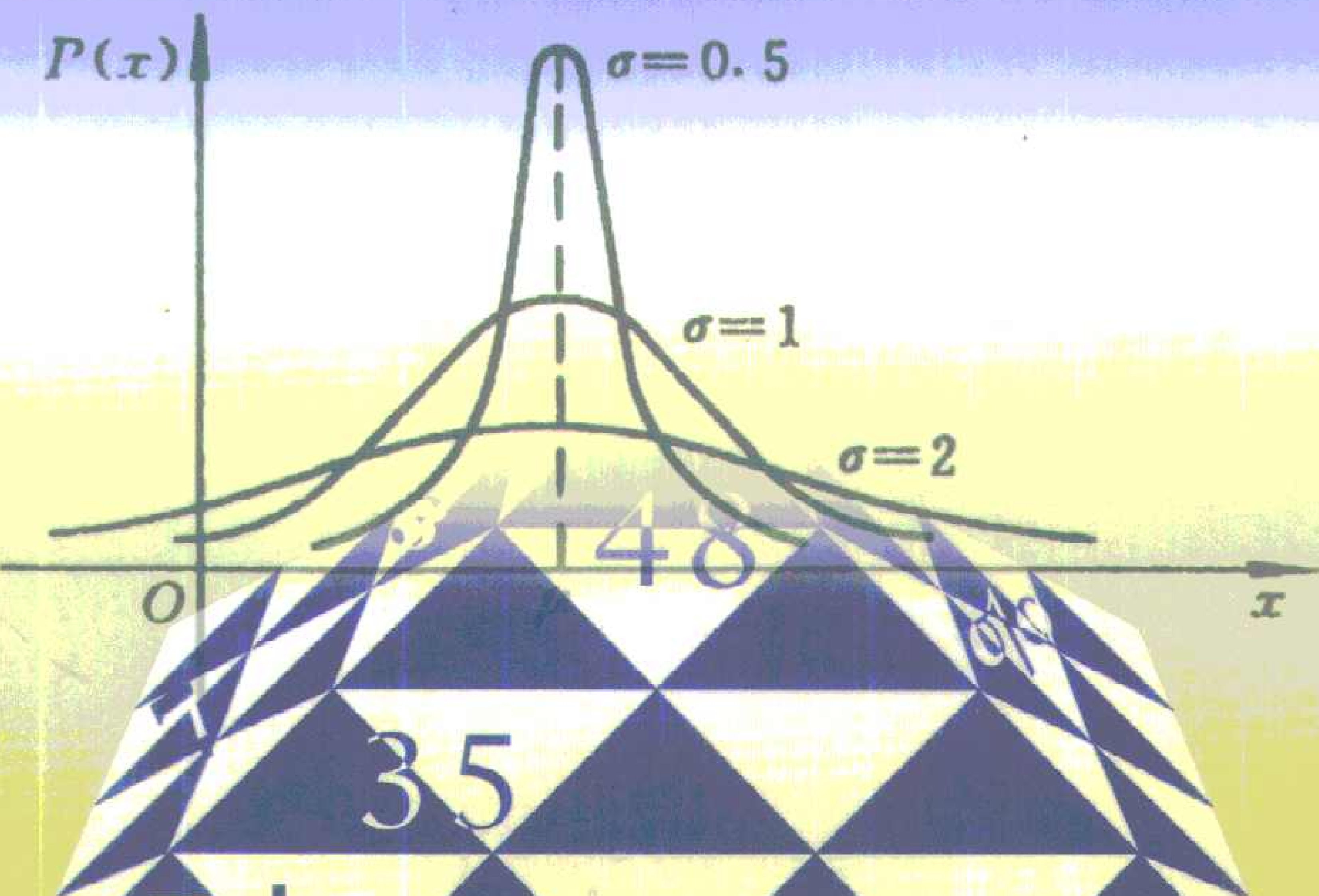
高等学校试用教材

概率论与数理统计

白富志 张贵恩 编



机械工业出版社

高 等 学 校 试 用 教 材

概率论与数理统计

白富志　张贵恩　编

机 械 工 业 出 版 社

本书是根据原国家教育委员会1992年18号文件精神编写的，体现了高等职业技术教育特色和不同专业部门需要的特色。内容主要有概率论、数理统计、随机过程三部分，每章附有习题及参考答案或提示。本书内容深入浅出、通俗易懂，便于自学。

本书可作为普通高校、高等职业技术院校、成人高校、电大经济类专业及理工各类专业教材，也可供工程技术人员参考使用。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/白富志，张贵恩编．—北京：机械工业出版社，1999.7

高等学校试用教材

ISBN 7-111-07444-0

Ⅰ.概…　Ⅱ.①白…　②张…　Ⅲ.①概率论-高等学校-教材　②数理统计-高等学校-教材　Ⅳ.O21

中国版本图书馆CIP数据核字（1999）第34255号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
责任编辑：王世刚　商红云　版式设计：张世琴　责任校对：李汝庚
封面设计：李雨桥　　　　　责任印制：何全君
中国农业出版社印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行
1999年10月第1版第1次印刷
787mm×1092mm 1/16·18.25印张·446千字
0 001—4 000册
定价：27.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
本社购书热线电话（010）68993821、68326677-2527

前　言

为适应我国高等职业技术教育的蓬勃发展，加强教材的配套与建设，根据原国家教育委员会1992年18号文件的精神，按照基础课和专业基础课以应用为目的，以必需、够用为度，既体现高等职业技术教育的特色，又体现不同产业部门需要的特色，编写了本教材。

在编写中，尽量考虑高等职业技术教育的特点，力求教材结构紧凑、语言简练，对于必要的基本理论、基本方法和基本技能，力求阐述简明、深入浅出、通俗易懂、便于自学。在编写中，对基本概念、重要公式和定理的实际意义，注意结合高等职业技术院校各类专业的特点，选用了较多的实际工作中的实例，并选配适量的练习题，书后附有答案或提示。

本书可作为普通高等院校、高等职业技术院校、职工大学、电视大学等经济类专业及理工科各专业的教材。本书由白富志教授编写一、三、五、七、九、十一，十三章；由张贵恩教授编写二、四、六、八、十、十二章。

由于水平有限，书中不妥之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编者

1998.6

绪　论

概率论是一门研究随机现象规律性的科学。在自然界和人类社会中存在着两类不同的现象，当我们多次观察自然现象和社会现象后，会发现许多事情在一定的条件下必然会发生，例如使电流通过导线（条件）则导线周围必然会产生磁场。又如把石蕊试液滴入盛有碱溶液的试管（条件）中，则管内液体呈蓝色也是必然的。这种在一定条件下必然发生的事情称为必然事件。反之，那种在一定条件下，必然不发生的事情称为不可能事件。例如使电流通过导线（条件）则导线周围不产生磁场这是不可能的。

从上面所举的例子可以看出，必然事件和不可能事件虽然形式相反，但两者的实质是相同的，必然事件的反面就是不可能事件，而不可能事件的反面就是必然事件。以上这种现象，称之为决定性现象，它广泛地存在于自然现象和社会现象中。许多数学分支如函数论、微分方程等都是研究决定性现象数量规律的科学。

在自然现象和社会现象中，也还存在着与决定性现象有着本质区别的另一类现象。那就是随机现象。那么什么是随机现象？它有何特点呢？所谓随机现象就是在重复观测或试验中有时出现，有时不出现的现象。下面举例说明：

例 1　在工业生产中，我们经常和数据打交道，例如钢材的长度、抗拉强度、电镀表面的缺陷数、布面的疵点数、自来水中的含菌数、微生物的浓度、产品中的次品数等等。这些数据往往是波动的、分散的，即使同一台机床加工同一型号零件，不论该机床如何精密，操作怎样熟练，但生产出来零件的某质量特征值也总是波动的，总不会是一个定值，而是一个随机变化的量。造成这种情况的原因很多，如原材料性质的微小差异，机床的微小波动，刀具的正常磨损，夹具的微小松动，工人操作技术的微小变化等等都是引起数据波动的随机因素。

例 2　同一物体在天平上称重多次，所得的结果略有差异，这些差异是称重过程中伴随许多随机因素所引起的。例如物体放在天平上的位置不同，天平的随机摆动，看标尺时的误差等等。

以上所举的例子都有一个共同的特点，即在基本条件不变的条件下，一系列试验和观察会得到不同的结果，换句话说，就个别试验和观察而言，它会时而出现这种结果，时而出现那种结果，呈现出一种随机性。随机现象所固有的这种不确定性、多因素性和复杂性用传统的数学方法如函数论、微分方程等加以概括和描述已经不行了。因此，随着生产力的发展、科学的进步，客观实际的要求创造出新方法来研究随机现象，这个新方法就是我们将要介绍的以概率论为基础的数理统计方法。

随机现象既有不确定性、多因素性和复杂性，表面看来是极其紊乱的，那么，它有没有规律性呢？科学试验和生产实践已证明，当我们观察大量同类现象后，可以发现它确实存在某种规律性，即大量随机现象所具有的稳定性。

例如前面例 1 中，一台机床加工同一型号的零件，只要是随机因素影响生产，其产品质量特性值的分布是某种固定不变的形状，即服从正态分布或称高斯分布。

在一批产品的质量检查中质量合格或不合格，某车间的电力消耗是否超过负荷，对同一目标进行多次射击命中或不命中的次数，这些都是服从二项分布的。

自来水的含菌量，电镀表面缺陷数，纱绽的纱被扯断的次数，通信中传输数字时发生误码的个数，布匹上、铸件上的疵点数等都是服从泊松分布的。

由以上诸例可以看出，随机现象表面看是没有规律可循的，但是当我们作了大量的观测或试验后，还是能够找到它们的规律性的。

概率论和数理统计都是研究随机现象规律的重要数学理论分支，它们的范围很广阔，内容十分丰富。根据科学的发展和生产实践的需要，概率论已渗透到自然科学和社会科学各个领域，尤其是以概率论为理论基础而实用性极其鲜明的数理统计这门学科，它自己所包含的内容不仅非常丰富，而且应用更加广泛。例如在经济领域中的预测和决策，在商业中市场研究与需求预测，工业管理中的抽样方法，全面质量管理，技术评价和咨询等等。

概率论与数理统计虽然都是研究随机现象的，但是它们各有侧重。

概率论是根据大量同类随机现象的统计规律（即规律已知），对随机现象出现的某一结果的可能性大小（概率），作出一种客观的科学定义，对各种可能性出现的大小作出数量上的描述，比较它们的大小，研究它们之间的关系。

而以概率论为基础的数理统计，是一门研究随机现象资料收集、整理、分析和推断的学科。大体说来，数理统计由统计资料的收集、整理，统计资料的分析、推断，统计资料的收集方法和分析方法的研究等三部分内容组成。

根据对问题的要求和观测数据所采取的不同处理方法，数理统计又派生了很多分支，如下面我们将要介绍的内容：参数估计、假设检验、方差分析和回归分析等。

由于随机现象广泛存在，各个不同领域中所提出的大量问题，促使概率论与数理统计蓬勃发展。最近几十年来，概率统计方法不仅被引入到各个工程技术科学中，如近代物理、无线电与自动控制、公用事业等，同时也广泛地应用到社会科学的许多领域，如制定抽样调查方案，确定经济数学模型，进行科学的估计和预测等等。在我国，近年来概率统计方法在商业和金融领域也有了重要的应用。

第一章　随机事件及其概率

第一节　随 机 事 件

一、随机试验与随机事件

通常称可以在相同条件下重复进行，而且各次试验的结果不一定相同的试验为随机试验，这里所说“试验”的含义是广义的，包括各种科学实验及对某一特性的观察、测量、记录等。

随机试验亦简称试验，一般用大写字母 E 表示。

对随机试验可能出现的每一个结果称为随机事件，简称事件，一般用大写字母 A、B、C 等表示。

下面举例说明：

E_1：掷一枚硬币，观察正反面出现的情况为一随机试验。

设 $A=$“出现正面”，$B=$“出现反面”均为 E_1 的随机事件。

E_2：掷一骰子，观察出现的点子的情况，为一随机试验。

设 $A=$“出现 1 点”，$B=$“出现 2 点”，$C=$“出现奇数点”，$D=$“点数大于 3”……均为 E_2 的随机事件。

E_3：试有 10 件同类型产品，其中有 7 件正品，3 件次品，从中任取 3 件，观察 3 件中含有次品数。

设 $A=$“恰有 3 个次品”，$B=$“恰有 2 个次品”，$C=$“恰有 1 个次品”，$D=$“恰有 0 个次品”均为 E_3 的随机事件。

E_4：在一批灯泡中，任取一只，测量它的使用寿命为一随机试验。

设 $A=$“寿命大于 800h”，$B=$“寿命小于 500h”等均为 E_4 的随机事件。

在试验 E 中必然发生的事件叫必然事件，一般用大写字母 Ω 表示。

例 E_2 中，设 $\Omega=$“点子数大于或等于 1 而小于或等于 6”，则事件 Ω 就是必然事件。

不可能事件是指：每次试验中一定不发生的事件，一般用大写字母 Φ 表示。

例 E_2 中，$\Phi=$“点数大于 6”，则 Φ 为不可能事件。

为研究问题统一起见，我们把必然事件与不可能事件也称为随机事件。

二、样本点与样本空间

为了更确切地运用数学语言表达随机事件，把对事件的分析转化为对集合的分析，我们引进样本点与样本空间的概念，以便于数学上的讨论。

样本点：称随机试验的每一个可能结果，为该试验的样本点，也称为基本事件。一般用小写字母 ω 表示。

样本空间：随机试验的全体样本点的集合称为该试验的样本空间，一般用大写字母 Ω 表示。显然，样本空间 Ω 是以样本点 ω 为元素的集合，是全集。

例：E_1 中，$\Omega_1=\{A, B\}$

E_2 中，$\Omega_2=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

E_3 中，$\Omega_3=\{A, B, C, D\}$

E_4 中，$\Omega_4=\{t \mid t \geqslant 0\}$，其中 t 表示灯泡的使用寿命。

说明：

(1) 构成样本空间的元素取决于试验的内容，而样本空间是相对于所述的试验而言的，如 E_2 中，若观察偶数点出现的情况，则样本空间 $\Omega=\{2, 4, 6\}$，若观察点数不超过 4 的情况，则样本空间 $\Omega=\{1, 2, 3, 4\}$。

(2) 平时我们所说的随机事件是指由基本事件复合而成的复合事件，因此，试验 E 的事件是样本空间 Ω 的子集，基本事件是样本空间 Ω 的元素，样本空间作为事件而言是一个必然事件，空集是不可能事件。

E_2 中：$\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，事件 $\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{4\}$，$\{5\}$，$\{6\}$ 为基本事件，若 $A=\{$双数点$\}$ 即 $A=\{2, 4, 6\}$，则事件 A 为基本事件 $\{2\}$，$\{4\}$，$\{6\}$ 所构成的复合事件，是样本空间 $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 的一个子集。

三、事件间的关系与运算

我们研究随机事件时，不仅一个一个地来研究，而往往需要同时研究在同样条件下的几个事件以示它们之间的联系。例如：在检查圆柱形的产品时，如果要求它的长度和直径都符合规格才算合格，这时我们考虑“产品合格”与“产品不合格”时，就要考虑到“直径合格”，“长度合格”，“直径合格但长度不合格”，“长度合格但直径不合格”，“长度与直径均不合格”等等各种事件。显然这些事件之间是有关系的。详细分析事件之间的种种关系，会大大地有利于我们深刻地认识事件的本质，掌握它们发生的规律，因此我们要讨论事件之间的种种关系。

1. 事件的包含及相等

设有事件 A 及 B，如果 A 发生必然导致 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，或称 A 是 B 的子事件，记作 $B \supset A$ 或 $A \subset B$。如图 1-1 所示。

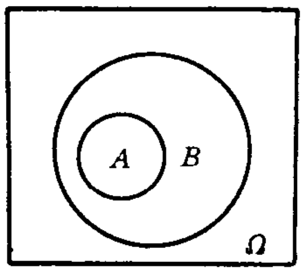


图 1-1

例 1 在检查圆柱形产品时，若 A 表示“直径不合格”的事件，B 表示“产品不合格的事件”，则显然有 $B \supset A$，就是说，“直径不合格”必然导致“产品不合格”。

如果事件 A 包含事件 B，同时事件 B 也包含事件 A，那么就称事件 A 与事件 B 相等，记作 $A \supset B$，$B \supset A$，则 $A=B$。

例 2 例如在其它条件具备时，卫星到达第一宇宙速度时就绕地球运转，反过来，如果卫星绕地球运转，那么它一定达到了第一宇宙速度。这两个事件：A（卫星达到第一宇宙速度）与 B（卫星绕地球运转）是等同的，即 $A=B$。

2. 事件的和与差

由事件 A 与 B 至少发生其一构成新的事件称为事件 A 与 B 的和，记作 $A \cup B$。若以 C 表示这一新事件，即有 $C=A \cup B$。如图 1-2 所示。

例 3 如例 1 所述圆柱体产品的例子中，若 C 表示“产品不合格”的事件，A 表示“直径不合格”的事件，B 表示“长度不合格”的事件，则有 $C=A \cup B$。即产品不合格便

是直径不合格与长度不合格两事件的和。也就是说，如果已知圆柱形产品不合格了，那么它的长度与直径至少必有一个不合格或者两者都不合格。

两事件和的概念可以推广到有限事件的情形。即“A_1、A_2，A_3，…，A_n 至少有一个发生”可记为 $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n$ 或 $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$。更一般地，“事件 A_1、A_2，A_3，…，A_n，…至少有一个发生”这一事件，记作

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots \text{或} A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

我们把“事件 A 发生而事件 B 不发生”这一事件称为事件 A 与事件 B 的差，记作 $A - B$ 如图 1-3 所示。

例 4 若 A 表示“呼唤次数不超过 7”的事件，B 表示“呼唤次数不超过 6”的事件，则“呼唤次数为 7”的事件可以表示为 A 与 B 的差。又例如，在一批包含有正品、次品的产品中，任取三个，“至少有一个次品”记为 A_1，“至少有两个次品”记为 A_2，“恰有一个次品”记为 A_3，则有 $A_3 = A_1 - A_2$。显然有 $A - B = A\bar{B}$，$\bar{A} = \Omega - A$。

3. 事件的积

由事件 A 与 B 同时发生而构成的事件称为事件 A 与 B 的积，记作 $A \cap B$ 或 AB（如图 1-4）。

例 5 如前面讨论的圆柱形产品，“产品合格”便是“直径合格”与“长度合格”的积。

事件积的概念也可以推广到有限个事件或可列的事件上去。把事件 A_1，A_2，…A_n 同时发生的事件记作

$$A = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n \text{ 或写作 } A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

把事件 A_1，A_2，…，A_n…同时发生的事件记作

$$A = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots \text{或写 } A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

4. 互不相容事件（或称互斥事件）

如果事件 A 与 B 不能同时发生，则称 A 与 B 为互不相容事件，记作 $A \cap B = \varnothing$ 或 $AB = \varnothing$ 如图 1-5 所示。

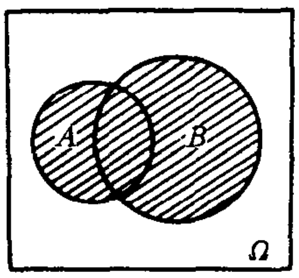


图 1-2

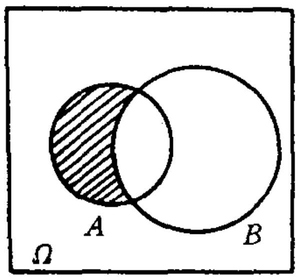


图 1-3

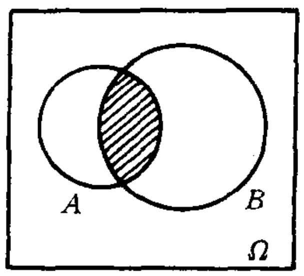


图 1-4

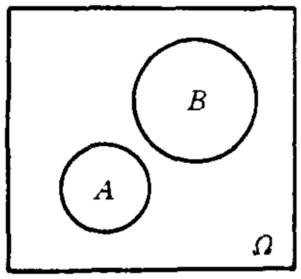


图 1-5

例 6 某电话交换台，在一分钟内，若 A 表示“接到奇数次呼唤”的事件，若 B 表示“接到偶数次呼唤”的事件，则事件 A 与事件 B 就是互不相容事件。又如 A 表示“合格品”的事件，B 表示“不合格品”的事件，则 A 与 B 为互不相容事件。

如果事件 A、B、C、…中任意两个都是互不相容的，则称它们彼此互不相容。

5. 对立事件（或称互逆事件）

如果两个事件 A 与 B 间同时满足如下关系

(1) $A\cup B=\Omega$（事件 A 与 B 必然发生其一）

(2) $A\cap B=\varnothing$（事件 A 与 B 不能同时发生）

则称 A 与 B 为对立事件。如图 1-6 所示。

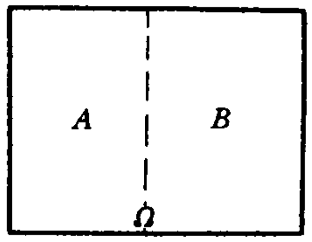


图 1-6

在以后习惯上把 A 的对立事件记作 $\bar{A}$，故有

(1) $A\cup\bar{A}=\Omega$

(2) $A\cap\bar{A}=\varnothing$

例 7 从一堆含有废品和合格品的产品中任取一个，则是“合格品”这一事件与是“废品”这一事件便是对立事件。因为取出的这个产品不是合格品就是废品，二者必居其一，而二者又不可兼得。

这里特别指出，对立事件一定是互不相容事件，反之互不相容事件不一定是对立事件。

熟悉集合论的读者或者早已发现，事件间的关系及其运算与集合论中集合间的关系与运算是完全相似的。把概率中的基本事件看作集合论中的元素，由若干个基本事件组成的事件，便可看作包含若干元素的集合。而把基本事件的全体构成的样本空间看作集合论中的全集或空间。为了便于对照，把它们的术语列表如下（见表 1-1）。

表 1-1 名词术语对照

记　号	集　合　论	概　率　论
Ω	全集	样本空间，必然事件
$\varnothing$	空集	不可能事件
ω	Ω 的元素	基本事件
A	Ω 的子集	事件
$A\subset B$	A 是 B 的子集	事件 B 包含事件 A
$A\cup B$	A 与 B 的并集	事件 A 与事件 B 的和
$A\cap B=AB$	A 与 B 的交集	事件 A 与 B 的积
$A-B$	A 与 B 的差集	事件 A 与 B 的差
$AB=\varnothing$	A 与 B 互不相交	事件 A 与 B 互不相容
$\bar{A}$	A 的补集	事件 A 的对立事件

对于事件来说，也有类似集合的运算规则：

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A$

$A\cap B=B\cap A$

(2) 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

(3) 分配律　$(A\cup B)\cap C=A\cap C\cup B\cap C$

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

(4) 对偶律　$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$ $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$

从以上可以看出，我们可以把对事件的分析转化为对集合的分析，利用集合间的运算关系来分析事件间的关系。

例 8 事件 A_k 表示第 k 次取到合格品（$k=1, 2, 3$），试用符号表示下列事件：三次都取到了合格品；三次中至少有一次取到合格品；三次中恰有两次取到合格品；三次中最多有一次取到合格品。

解 三次全取到合格品：$A_1\cap A_2\cap A_3$

三次中至少有一次取到合格品：$A_1\cup A_2\cup A_3$

三次中恰有两次取到合格品：

$A_1\cap A_2\cap\bar{A}_3+A_1\cap\bar{A}_2\cap A_3+\bar{A}_1\cap A_2\cap A_3$

三次中至多有一次取到合格品：

$\bar{A}_1\bar{A}_2\cup\bar{A}_1\bar{A}_3\cup\bar{A}_2\bar{A}_3$

例 9 如果 x 表示一个沿数轴随机运动的质点的位置，试说明下列各事件的关系。

$A=\{x|x\leqslant 20\}$　　$B=\{x|x>3\}$　　$C=\{x|x<9\}$

$D=\{x|x<-5\}$　　$E=\{x|x\geqslant 9\}$

解

由图 1-7 可见，$A\supset C\supset D$，$B\supset E$；D 与 B，D 与 E 互不相容；

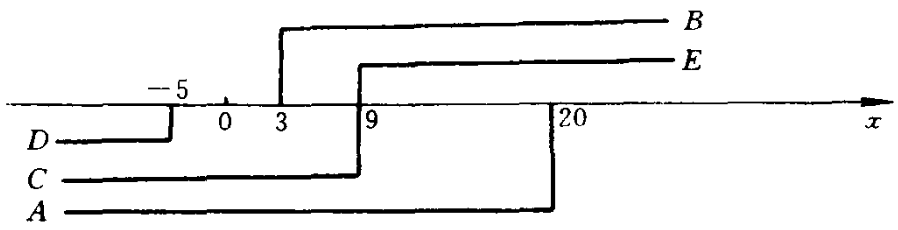


图 1-7

C 与 E 为对立事件；B 与 C，B 与 A，E 与 A 相容。

第二节　概率的概念

一、随机事件的频率

在相同条件下，做 n 次试验，设事件 A 发生 m 次，则称 $\frac{m}{n}$ 为事件 A 在该条件下所发生的频率，记作

$$f_n(A)=\frac{m}{n} \tag{1-1}$$

显然，$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$。

很多人做过掷硬币试验，如表 1-2 所示，此处，$A=$“出现正面”。

表 1-2　掷硬币试验

实　验　者	总试验次数 n	正数 A 出现次数 m	频率 f_n (A)
蒲丰	4040	2048	0.5069
K. 皮尔逊	12000	6019	0.5016
K. 皮尔逊	24000	12012	0.5005

容易看出，随着试验次数的增多，频率 $f_n(A)$ 有接近 0.5 的趋势。

一般地，一个随机事件 A，在 n 次重复试验中，出现的频率为 $f_n(A)$，当试验次数 n 逐渐增多时，将在一个常数附近摆动，且逐渐稳定于这个常数的性质，称为频率的稳定性，它就是隐藏在随机现象中的规律性，即通常所说的统计规律性，它也是我们定义概率的客观基础。随机事件的概率就是描述随机事件发生可能性大小的一个度量。

二、概率的定义

定义 1（概率的统计定义）　在一组不变的条件下，重复进行 n 次试验，其中事件 A 发生了 n_A 次，当试验次数 n 充分大时，如果事件 A 的频率 $\frac{n_A}{n}$ 稳定在某一个常数 P 附近，则称常数 P 为事件 A 在该条件组下的概率。记作

$$P(A)=P \tag{1-2}$$

显然　$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$，$P(\Omega)=1$，$P(\varnothing)=0$

说明：

(1) 该定义是以事件的频率为基础，在一定程度上反映了事件 A 发生可能性的大小，且对理解概率的意义有一定的帮助和直观感。

(2) 该定义为我们提供了近似计算概率的方法，即当 n 充分大时，可用频率代替概率。

(3) 该定义对求一般随机事件的概率无任何价值，现实问题中，不可能对每一事件都做大量试验以求得稳定值。

下面我们介绍在某些特殊情况下，不需借助试验，而是根据事件本身的某些特性，直接计算其概率的方法，这就是我们常用的古典概率的定义。

定义 2（概率的古典定义）　设随机试验 E 的样本空间为 Ω，Ω 中含基本事件的总数为 n，A 为随机试验 E 的一个事件，若满足如下两条：

(1) Ω 中的基本事件的总数 n 有限，称有限性。

(2) Ω 中每个基本事件发生的可能性相同，称为等可能性。

设事件 A 包含的基本事件数为 n_A，则事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{n_A}{n} \tag{1-3}$$

说明：

(1) 该定义所规定的概率称为先验概率或数学概率，其值基于事件本身的先天性质而定，与经验的观测与试验完全无关。

(2) 该定义同时也是概率的计算公式，因此只要满足条件，就可直接利用公式计算概率。

(3) 利用该公式计算概率时，一定要注意条件，等可能性往往是由具体问题的实际意义决定。值得注意的是：n 是试验 E 所确定的样本空间 Ω 中包含的基本事件的总数，而 n_A 是 E 中事件 A 决定的，是样本空间 Ω 的子集（子空间）Ω_A 中包含的 Ω 的基本事件的个数。

古典概率模型也称为等可能试验概型，因为它是概率论发展初期主要研究的对象，故称古典概型。

下面举几个简单例子，说明定义的用法

例 1　掷一均匀硬币，求出现正面的概率。

解　因为掷一硬币，只有两种可能的结果，即“正面朝上”或“反面朝上”，所以样本空间为

$$\Omega=\{\text{正面朝上，反面朝上}\}\text{，所以 } n=2$$

而硬币是均匀的，所以出现正面与反面是等可能的。设 $A=$“正面朝上”，则

$$\Omega_A=\{\text{正面朝上}\}\text{，所以 } n_A=1$$

于是 $P(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{1}{2}$

例 2　掷一均匀骰子，求：(1) 出现“6”点的概率。(2) 出现双数点的概率。

解　(1)：随机掷一次，可能出现的结果为：出现“1”点，出现“2”点……出现“6”点，共有 6 种可能，因此样本空间为

$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$，$n=6$ 因为骰子是均匀的，所以出现每个点的概率相等，设

$A=$ "出现 6 点"，则

$\Omega_A=\{6\}$，所以 $n_A=1$

于是 $P(A)=\frac{n_A}{A}=\frac{1}{6}$

解 (2)：因 $n=6$

设 $B=$ "出现双数点"，则

$\Omega_B=\{2, 4, 6\}$，因此 $n_B=3$

于是 $P(B)=\frac{n_B}{n}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

实际解题时，不必都把样本空间写出来，只求出 n 及 n_A 即可。

例 3 一副扑克牌共 54 张，任取一张，求它是黑桃的概率。

解 因 54 张均不相同，因此任取一张，每张出现的可能性是相同的，此处 $n=54$。

设 $A=$ "任取一张是黑桃"，$n_A=13$

故 $P(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{13}{54}$

若采用下面的分析方法就错了，即以颜色作为基本事件，一副扑克牌共有五种颜色，即

$\Omega=$ {黑桃，红桃，梅花，方块，王}

则 $n=5$

设 $A=$ "黑桃"，则 $\Omega_A=$ {黑桃}，因此 $n_A=1$，于是 $P(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{1}{5}$。

此种解法错误的原因是等可能性被破坏了。

若题目的条件改为：一副扑克牌无大小王共 52 张，从中任取一张，求是黑桃的概率，则用两种方法解均对。

即解 (1)：因 $n=52$，$n_A=13$

故 $P(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$

解 (2)：因 $n'=4$，$n_{A'}=1$

故 $P(A)=\frac{n_{A'}}{n}=\frac{1}{4}$（因四种颜色是等可能的，故可采用颜色作为基本事件）

通过以上几个最简单的例子说明用概率古典定义求概率时，一定要严格把握条件，不能盲目地套公式，对初学者而言，对简单的基本问题，一定要吃透，在此基础上，才能解决较复杂的问题。

上面我们给出了随机事件的概率统计定义及概率的古典定义，并用古典概率公式计算一些事件的概率。但人们清楚地看到，这两种定义都存在一定的弊病，从数学角度上看，作为概率的定义不够严密。即概率的统计定义，必须作大量试验，以求得频率的稳定值，即概率，而古典概率必须满足两个条件，即等可能性与有限性。这些弊端，要求人们给出一个一般地，更能确切描述随机现象的定义。

随着对随机现象的数学本质的研究和对古典概率定义的分析，我们了解到概率具有一些基本性质，称为公理，下面就以这些公理为背景给出概率严格的理论定义。

定义 3（公理化定义） 设试验 E 的样本空间 Ω，A 为 E 的一个随机事件，$P(A)$ 是定义在 Ω 上的一个实函数，如果 $P(A)$ 满足如下三条公理，则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率。

公理 1　$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

公理 2　$P(\Omega)=1$，$P(\varnothing)=0$

公理 3　对两两互不相容的事件满足有限可加性或可列可加性。即

设事件 A_k（$k=1, 2, \cdots$）两两互不相容，则有

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)=\sum_{k=1}^{n} P(A_k), \text{或} \tag{1-4}$$

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \tag{1-5}$$

显然，定义 3 包含了定义 1 与定义 2。

三、概率的性质

性质 1　设事件 A 与 B 互不相容，则有

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B) \tag{1-6}$$

即两两互斥事件的和的概率等于两个事件的概率之和。

证明：设总试验次数为 n，事件 A 与 B 发生的次数分别为 n_A、n_B，当试验次数 n 充分大时，频率 $\frac{n_A}{n}$，$\frac{n_B}{n}$，$\frac{n_A+n_B}{n}$ 将分别在常数 $P(A)$，$P(B)$，$P(A \cup B)$ 附近摆动，并将随着 n 的增加越来越接近它们，因为 $\frac{n_A}{n}+\frac{n_B}{n}=\frac{n_A+n}{n}$，所以有 $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$。

推论（1）　若事件 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 两两互斥，则有

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)=\sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

同样可推得　$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$

推论（2）　对立事件的概率和等于 1。

即 $P(A)+P(\bar{A})=1$ 或 $P(A)=1-P(\bar{A})$，后面的表示方法在概率计算中常常用到。

推论（3）　若 $B \subset A$，则有

$$P(A-B)=P(A)-P(B) \tag{1-7}$$

证明：如图 1-8：

因 $A=B \cup (A-B)$ 且 $B(A-B)=\varnothing$

故 $P(A)=P(B)+P(A-B)$

即 $P(A-B)=P(A)-P(B)$

也可得出 $P(A) \geqslant P(B)$　（1-8）

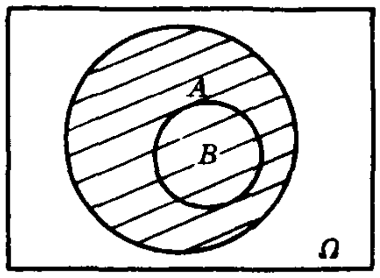


图 1-8

性质 2　设 A，B 为任意两个随机事件，则

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB) \tag{1-9}$$

证明：如图 1-9：

因 $A \cup B=(A-AB) \cup B$

且 $(A-AB)B=\varnothing$

且 $A \supset AB$

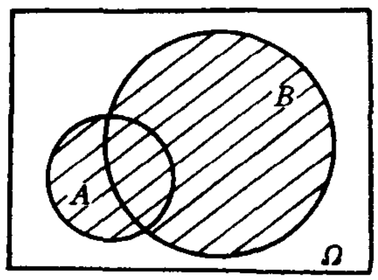


图 1-9

故$P(A \cup B) = P[(A - AB) \cup B] = P(A - AB) + P(B) = P(A) - P(AB) + P(B)$
即 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

性质 2 可推广到 n 个事件的情况。当 $n=3$ 时，有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3)$$

以上均称为概率的加法公式。

四、例题分析

对古典概型的概率计算，通常是根据问题的不同情况分几种类型进行分析。下面仅就常用的抽球模型和生日问题（也称分房问题）模型进行讨论。

1. 抽球模型

抽球问题可分为不放回抽取与放回抽取两种情况，下面就不放回抽取详细分析，对不放回抽取搞清了，则放回抽取问题就迎刃而解了。

例 4 设袋中有 6 个球，其中 4 个白球，2 个红球，从袋中任取 2 球，不放回。

求：(1) 取得两个白球的概率。
(2) 恰有一个白球的概率。
(3) 第一个是白球，第二个是红球的概率。
(4) 第一个是白球的概率。
(5) 至少一个白球的概率。

解 设A_1= “取得两个白球”，
A_2= “恰有一个白球”，
A_3= “第一个白球，第二个红球”，
A_4= “第一个是白球”，
A_5= “至少一个白球”。

本题中，白球与红球的数目不等，因此不能以颜色为基本事件。为满足等可能性的要求，我们对 6 个球进行编号，以便辨别，设编号为白$_1$ 白$_2$ 白$_3$ 白$_4$ 红$_5$ 红$_6$，即前 4 个号为白球，后两个号为红球，这样任取一球，则每号球抽到的可能性就相等了。为看得清楚，我们把样本空间列出来，因为以每取 2 个球作为一个基本事件，而这两个球可看成不放回地抽取两次，每次抽一个。因为每个元素的两个球号是不重复的，所有可能情况为：第一次抽到的若是 1 号球，则第二次抽到的只可能是 2 号，3 号，4 号，5 号，6 号球；第一次抽到的若是 2 号球，则第二次只可能抽到 1 号，3 号，4 号，5 号，6 号球；以此类推，可列如下数表：

$$\Omega = \begin{Bmatrix} 12,13,14,15,16 \\ 21,23,24,25,26 \\ 31,32,34,35,36 \\ 41,42,43,45,46 \\ 51,52,53,54,56 \\ 61,62,63,64,65 \end{Bmatrix} \qquad (*)$$

所以

$$n = 6 \times 5 = 30$$

(1) 设 Ω_{A_1}为 A_1 中含基本事件的个数，即两个白球构成的集合，是数表（*）的左上角部分，即前四个号。即

$$\Omega_{A_1}=\begin{Bmatrix}12,13,14\\21,23,24\\31,32,34\\41,42,43\end{Bmatrix} \tag{1-10}$$

则 $$n_{A1}=4\times3=12$$

从表上可直观地看出，Ω_{A_1}是 Ω 的子集。

所以 $$P(A_1)=\frac{n_{A_1}}{n}=\frac{12}{30}=\frac{2}{5} \tag{1-11}$$

实际计算 n、n_{A_1}时，用到了排列组合的知识，即 n 的值是从 6 个元素中任取一个，共有 $C_6^1=6$ 种可能；再从剩余下的 5 个元素中任取一个，共有 $C_5^1=5$ 种可能；由乘法原理，所以 $n=C_6^1\cdot C_5^1=30$，同理 $n_{A_1}=C_4^1\cdot C_3^1=12$。

所以 $P(A_1)=\dfrac{n_{A_1}}{n}=\dfrac{C_4^1C_3^1}{C_6^1C_5^1}=\dfrac{12}{30}$

以上，我们不厌其烦地介绍每步的想法与做法，目的是让大家真正理解古典概率公式每一项的含义。掌握最基本的分析方法，以便于学会由浅入深的解决概率计算问题。

(2) 同样地，从数表（*）直接看出 A_2 中含有基本事件总数。

$$\Omega_{A_2}=\begin{Bmatrix} & 15,16\\ & 25,26\\ & 35,36\\ & 45,46\\ 51,52,53,54 & \\ 61,62,63,64 & \end{Bmatrix} \tag{1-12}$$

则 $n_{A_2}=8+8=16$，或 $n_{A_2}=C_4^1C_2^1+C_2^1C_4^1=16$

“恰有”一词，在概率论中常常遇到，“恰有”指的是“恰好”，“刚好”，“正好”，“其中”的意思，无顺序之分。如本例中，恰有一个白球，指的就是两个球中，其中有一个是白的，因此在按抽球顺序排表（*）中，恰有一个白球包含第一个白第二个红和第一个红第二个白两种情况，再用概率加法定理即可计算。即：

P（恰有一白）$=P$（“第一个白第二个红”$\cup$“第一个红第二个白”）

因二事件互斥，故

P（恰有一白）$=P$（第一个白第二个红）$+P$（第一个红第二个白）

$$=\frac{C_4^1C_2^1}{C_6^1C_5^1}+\frac{C_2^1C_4^1}{C_6^1C_5^1}=\frac{16}{30}=\frac{8}{15} \tag{1-13}$$

故 $P(A_2)=\dfrac{8}{15}$

(3) 同样 $$\Omega_{A_3}=\begin{Bmatrix}15,\ 16\\25,\ 26\\35,\ 36\\45,\ 46\end{Bmatrix} \tag{1-14}$$

所以 $$n_{A_3}=C_4^1C_2^1=8$$

$$P(A_3)=\frac{C_4^1C_2^1}{C_6^1C_5^1}=\frac{8}{30}=\frac{4}{15} \tag{1-15}$$

（4）同样

$$\Omega_{A_4}=\left\{\begin{array}{c|c} 12,13,14 & 15,16 \\ 21,23,24 & 25,26 \\ 31,32,34 & 35,36 \\ 41,42,43 & 45,46 \end{array}\right\} \tag{1-16}$$

$$\begin{aligned} P(A_4)&=P(\text{第一个白})=P(\text{第一个白，第二个白}\cup\text{第一个白，第二个红}) \\ &=P(\text{第一个白，第二个白})+P(\text{第一个白第二个红}) \\ &=\frac{C_4^1C_3^1}{C_6^1C_5^1}+\frac{C_4^1C_2^1}{C_6^1C_5^1} \\ &=\frac{12}{30}+\frac{8}{30} \\ &=\frac{2}{3} \end{aligned} \tag{1-17}$$

（5）类同 $P(A_5)=P(\text{至少一白})$ (1-18)

“至少”一词也是概率论中常用的术语，“至少”的含义是指和事件，因此在解题时，要把至少进行分解，分解为“恰有”的和。本例中，至少一白包含“恰有一白”和“恰有两白”两种情况，因此，P（至少一白）$=P$（恰有一白$\cup$恰有二白)，根据互斥性有

$$\begin{aligned} P(\text{至少一白})&=P(\text{恰有一白}\cup\text{恰有两白}) \\ &=P(\text{恰有一白})+P(\text{恰有二白}) \\ &=\frac{C_4^1C_2^1+C_2^1C_4^1}{C_6^1C_5^1}+\frac{C_4^1C_3^1}{C_6^1C_5^1}=\frac{14}{15} \end{aligned}$$

也可从数表上直接看出

$$\Omega_{A_5}=\left\{\begin{array}{c|c} 12,13,14 & 15,16 \\ 21,23,24 & 25,26 \\ 31,32,34 & 35,36 \\ 41,42,43 & 45,46 \\ \hline 51,52,53, & 54 \\ 61,62,63, & 64 \end{array}\right\} \tag{1-19}$$

例 5 若例 4 中做放回抽球,，则 $n=C_6^1C_6^1=36$。即第一次从 6 个中任取一个，共有 $C_6^1=6$ 种取法；第二次仍从 6 个中任取一个，也有 $C_6^1=6$ 种取法；然后用乘法定理，总共有 $C_6^1C_6^1=36$ 种取法。（因为第一次抽取后，又放回去了，因此第二次仍从 6 个中任取一个，即第一次抽取不影响第二次抽取)，其它做完全类似的分析。此处

$$\Omega=\left\{\begin{matrix} 11,&12,&13,&14,&15,&16 \\ 21,&22,&23,&24,&25,&26 \\ 31,&32,&33,&34,&35,&36 \\ 41,&42,&43,&44,&45,&46 \\ 51,&52,&53,&54,&55,&56 \\ 61,&62,&63,&64,&65,&66 \end{matrix}\right\} \tag{1-20}$$