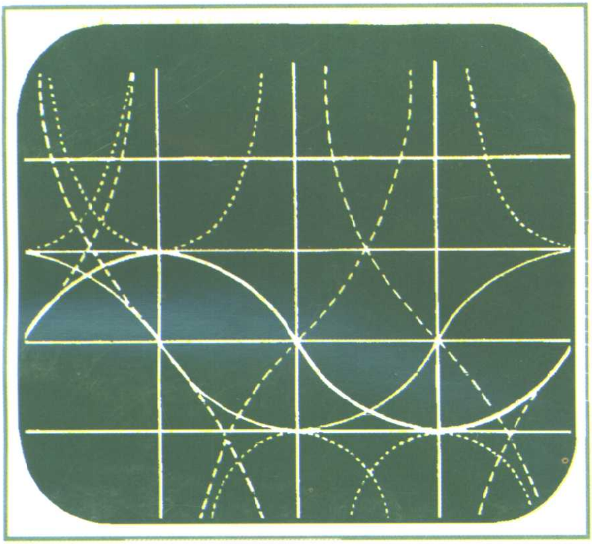
染色——从游戏到数学
上海教育出版社



柳柏濂　著

染色——从游戏到数学

上海教育出版社

染色——从游戏到数学

柳 柏 濂 著

上 海 教 育 出 版 社

图书在版编目（C I P）数据

染色：从游戏到数学 / 柳柏濂著．—上海：上海教育出版社，2000.4
ISBN 7-5320-6763-7

Ⅰ.染...　Ⅱ.柳...　Ⅲ.数学-青少年读物
Ⅳ.01-49

中国版本图书馆CIP数据核字（2000）第16727号

染色——从游戏到数学

柳 柏 濂 著

上海世纪出版集团
上 海 教 育 出 版 社 出版发行

（上海永福路 123 号　邮政编码：200031）

各地新华书店经销　上海商务联西印刷厂印刷

开本 787×1092　1/32　印张 3.75　字数 77,000

2000 年 6 月第 1 版　2000 年 6 月第 1 次印刷

印数 1—5,100 本

ISBN 7-5320-6763-7/G・6919　定价：4.50 元

内 容 提 要

本书从介绍染色的游戏入手，导出了数学中著名的拉姆赛理论，四色猜想及其相关问题．在游戏中引入数学，在探索中深入问题，在数学史中阐述理论的发展，在数学家的贡献中介绍解题的思路．使读者沿着数学家跋涉的足迹去学习数学的思维，体会创造的艰辛和分享成功的喜悦．

本书内容生动，材料充实，文字流畅，故事性强．既有世界著名问题的探索，又有数学家的奇闻轶事，是一本知识性、趣味性较强的高中学生课外读物，也是数学教师开展课外活动的较好的参考书．

写 在 前 面

记不得哪位诗人说过:“没有色彩便没有生命.”

我们的世界是一个色彩斑斓的世界.“日出江花红胜火,春来江水绿如蓝”,“百紫千红花正乱”,“万里黄河绕黑山”……

从我们懂得拿笔涂画的那一天开始,就学习着驾驭各种颜色.染色,是我们试图描绘周围世界的第一步.

不仅仅是美术才需要染色.既然我们的世界五光十色,反映和描述这一世界的一切科学,也需要染色.地图需要染色,化学指示剂需要显色,物理需要色谱,生物需要染色体,……

而数学呢?形形色色的染色问题需要数学给予定量的回答.数学家从平凡的游戏中找到不平凡的结论,从没有路的地方开拓出一条路.

拿着两支彩笔,在纸面上做一个游戏,这是一个多么有趣的竞争.可是,在数学家眼中,它却意味着一种对象的分类.数学家就要在这眼花缭乱的色彩中理出一条规律.从特殊中发现一般,从无序中看出有序.

从染色游戏到数学理论,经历着一个漫长的探索过程.在我们这本小书里,有数学名题解决的思路,有数学家长途跋涉的艰辛,有成功的欢乐,也有失败的教训.

不要以为,数学家也喜欢涂色抹彩.染色,往往是一些数学命题最简明的表达,最准确的刻画.

不要以为,数学家拿起彩笔在信手涂鸦,仅仅在讲述一些

连小学生也频频点头的趣事．也许，他正在阐述一道连他自己也无法解决的数学难题．

学习数学，不但要知道结论，更重要的要懂得方法．读者将会在本书有趣的问题中，加深领会著名数学家和数学教育家波利亚（G．Pólya）的名言："能用一次的想法只不过是一个窍门，能用一次以上的想法就成为一种方法了．"

染色，从游戏到数学．在这里，你将从一个窗口看到一个色彩缤纷的数学世界．

目　录

§1 不仅仅是游戏！

我们都玩过一种最简单的棋，叫做九子棋．在地面上划两组平行线，组成一个每边三个方格的方格网．两个游戏者分别将×和○填入方格中，最先使自己填入的×（或○）成一直线者便获得胜利．

因为局面太简单，这不能引起人们多大的兴趣．更令人遗憾的是，它可能出现平局的情形，如图 1－1 所示．

也许，下面的游戏会令人更刺激些．

在地面上定出 6 个点，当然，不要让任意三点在一直线上．为了保证这一点，我们只要把 6 点看成正六边形的 6 个顶点就行了．

○	×	○
○	×	×
×	○	×

图 1－1

两个游戏者每次可随意选用红或蓝色的粉笔，轮流选择其中的两点连线，谁第一个被迫画成一个同色的三角形（红色或蓝色的），他就是失败者．当然，我们所说的三角形，它的三个顶点必须是 6 个点中的三个．

于是，在游戏中，你必须既要小心翼翼地避免画成一个同色三角形，又要使对手陷入不得不画出同色三角形的“陷阱”中．

也许有人问：这个游戏是否会出现平局的情形？我们的回答是：它决不会出现不分胜负的局面．也就是说：必有一个游戏者会被迫画出一个同色三角形来．

为什么？

用试验方法说明吗？不行！这个工作太繁重了．你看，6

个点之间一共有15条线段(我们把这些线段叫做“边”). 每条边可以染两种颜色中的一种,于是染色的方法一共有 $2^{15}=32768$ 个. 要检查这么多种情况都将出现同色三角形,才能得出我们的结论. 这种方法既不实用,也令人生厌.

让我们看看一个逻辑推理的方法,它是如何把结论证明出来的.

我们需要证明的是:把 6 个点的连线染两色,至少会出现一个同色的三角形.

我们任取一点,称为 A,那么由 A 引出的 5 条边中,至少有 3 条是同色的. 不妨设有 3 条边 AB,AC,AD 是红色边,如图 1-2 所示.

现在,我们考察 B,C,D 三点之间的边. 若 BC,CD,DB 三边至少有一条红边,则与 A 就至少形成一个红边三角形. 若 BC,CD,DB 三边都不是红边,则三角形 BCD 为蓝色三角形.

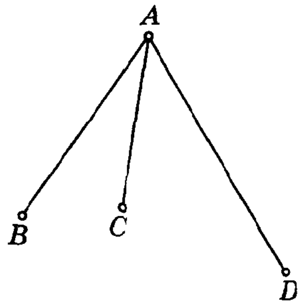


图 1-2

证明的思路是如此清晰,让人不得不惊叹数学逻辑推理的威力!

这样一个简单的数学游戏,还可以转化为一个生活中的真理:

“任何六个人的集会上,或者有三个人彼此相识,或者有三个人彼此不相识.”

1958 年,《美国数学月刊》(6/7 月号,问题 $E1321$)把上述结论的证明作为一道数学竞赛题,至今流传极广.

如果把 6 个人看作是 6 个点,两人彼此相识,就在相应两

点连红边,彼此不相识则连蓝边,于是"六人集会"问题就变成我们的染色游戏中必出现同色三角形的问题.

实际问题,数学模型,逻辑推理如此巧妙地结合在一起,怪不得美国数学家斯彭塞(J.Spencer)在回忆起中学时代第一次接触这个问题时的情景:"此论证之简单扼要,当时使我非常欣喜,至今依然如此."

§2　少一点都不行

上面谈到的染色游戏,我们一开始定出了6个点,那么自然会问:如果用5个点,并且用红,蓝两种颜色去染它们的边,是不是游戏也一样能不出现平局呢?

5个点不行!

为了说明我们的结论,只须举出一个例子:把5个点所产生的10条边染成红或蓝边后,不出现一个同色的三角形.

请看图2-1.若把粗实线看成是红线,细实线看成是蓝线,我们便找不出一个同色的三角形.

也就是说,如果用5点做我们的染色游戏,这时候,两个人有可能不分胜负.

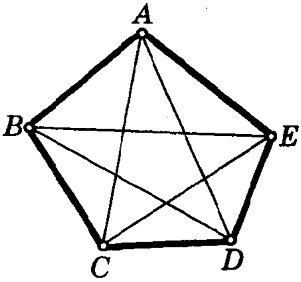


图　2-1

于是,用一个例子否定了用5个点做游戏的可能性.在数学上,这种方法称为举反例.

当然,我们还可以深入地问下去:当我们用5个点做染色游戏时,除了图2-1的情况外,还有没有其他情形会不出现同色三角形呢?

请你用红,蓝色的笔在一张纸上画画看.

尽管你可以画出其他不出现同色三角形的情形(图2-2),但是,这些图与图2-1在“本质”上是相同的,只不过在某些位置上扭曲了而已.我们所说的“本质”,就是指:图

2－1是由一个红五边形和蓝五边形(把它摊开来看)组成的，而图2－2也是由一个红五边形和蓝五边形组成的，我们称图2－1和图2－2是两个同构的图.

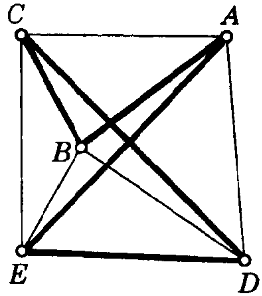


图 2－2

两个同构的图，我们把它看成是一样的.当然，这里所谈的图只考虑两点之间有，还是没有线相连，而不理会这些线的长度及曲直.这一点与平面几何中的图是不同的.

经过了一番试画以后，我们是不是能下结论:5点的染色游戏，不出现同色三角形的情形只有图2－1一种呢?

除非你把所有的情形都做过了——它一共有 $2^{10}=1024$ 种——否则，这个结论是不能令人信服的，顶多只能称为猜想.

现在，我们用逻辑推理的方法来证明这个猜想是正确的.

我们翻回到§1中6点染色游戏证明时用过的图1－2，就可以知道:只要有一点引出3条同色的边，就必出现红或蓝色的三角形.于是，要不出现同色三角形，每点引出的同色边至多是两条.

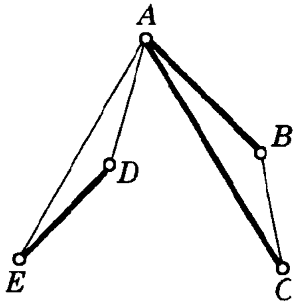


图 2－3

我们在5点中任取一点称为 A，则由上面分析可知，A 只能引出2条红边和两条蓝边.如图2－3所示.设两条红边是 AB，AC，

两条蓝边是 AD, AE.

因图中不出现同色三角形,故 DE 边必为红边,而 BC 边必为蓝边. 以 A 为中心,如果不考虑$\triangle ADE$ 与$\triangle ACB$ 的大小,那么这两个三角形的红蓝边是反对称的——即以 A 为中心,红边与蓝边对称.

因从 C 引出的边已有一红一蓝,还需引出一红一蓝边,因为上述的反对称性,可随意选择 CD, CE,其一为红边,另一为蓝边. 不妨按图 2-4 进行选择.

于是,由 D 点引出的另一条边 DB 必须染红色,而 BE 必须染蓝色. 请读者自己把这两边在图 2-4 中添上去,便得到一个和图 2-1 同构的图. 它也是由两个颜色分别是红和蓝的五边形组成.

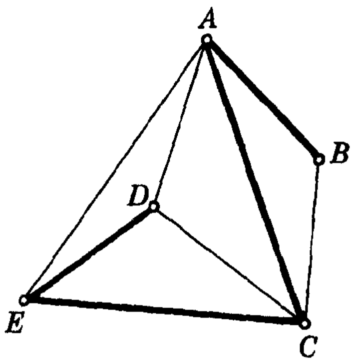


图 2-4

上面的每一步都是由严格的逻辑推理得来的. 因此,我们便证明了:

五点染色游戏中,只有如图 2-1 的唯一情形不出现同色三角形. (2·1)

上面的证明是构造性的. 我们还可以用计算方法给予一个更简单的证明:由 § 1 的论证,见图 1-2 可知,要图中不出现同色三角形,每个顶点引出的同色的边不能多于两条. 因此,在五个点的情形中,由每个点引出的红,蓝边恰好各是两条,这样红边(或蓝边)只能构成一个圈或几个圈. 由于我们的染色不能出现重边(即两个点之间有一条以上的边),因此红边(或蓝边)只能构成一个圈,这就是红(蓝)五边形. 也即图

2 - 1.

(2·1)的结论也可以换一个说法,表述为下列等价命题:

在五点染色的游戏中,或者必出现一个同色三角形,或者必出现一个同色五边形.

§3 拉姆赛的发现

1928年,在英国伦敦数学会的一次学术会议上,年仅24岁的年青数学家弗兰克·普拉东·拉姆赛(Frank Plumpton Ramsey)登上了讲坛,他宣读了一篇题为《论形式逻辑中的一个问题》的论文.

拉姆赛(1903~1930)

他证明了一个定理:如果某一集合(如点集)中事物的数量足够多,且每对事物间都存在一定数量的关系(如各种颜色的边)中的一种,那么必定存在一个包含若干数目事物的子集(如三点集),其中每对事物间也存在同样的关系(如同色三角形).

拉姆赛宣读完论文,会场上响起了热烈的掌声.拉姆赛的定理的条件是如此一般,数学家们意识到:一条刻画客观世界一般规律的定理诞生了.

上述的定理称为拉姆赛定理.

让我们用§1,§2中叙述的特例来说明一下拉姆赛定理.

拉姆赛定理告诉我们:如果平面上的点数足够多,且每对点间的线(边)或染红色或染蓝色,那么必定存在一个包含3

个点的子集,它们之间的边都同色,即包含一个同色的三角形.

由§1,§2中的叙述我们知道:上面所说的"如果平面上的点数足够多",是指6个点就足够了,而5个点不行.6就是染两色游戏中,必出现一个同色三角形的至少点数,我们称它为染两色出现同色三角形的拉姆赛数.

为了方便叙述,我们把平面上有 n 个点,每两点都有连线的图称为 n 阶完全图,记作 K_n. 显然,每个 K_n 一共有 C_n^2 条边.下面是1到6个点的完全图.

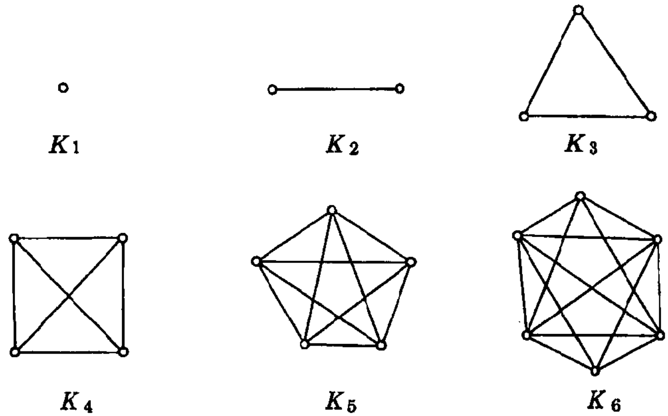


图 3-1

于是,我们可以说,若把边染红,蓝两色,要出现一个红 K_3 或一个蓝 K_3,至少要有6个点.故这个拉姆赛数可记为 $R(K_3,K_3)=6$.

同理,我们不难理解 $R(K_3,K_4)$,$R(K_3,K_5)$,$R(K_3,K_6)$,

$R(K_4,K_4)$,$R(K_3,K_3,K_3)$等的含义.例如 $R(K_3,K_6)$就是把边染红,蓝两色,要出现一个红 K_3 或蓝 K_6,至少需要的点数.而 $R(K_3,K_3,K_3)$是用红,蓝,白三色染边,出现一个同色三角形,所需要的至少点数.

请注意:拉姆赛定理仅仅告诉我们,上述那些 $R(K_3,K_3)$,$R(K_3,K_4)$,……必定存在,但是,它没有告诉我们这些数是多少,也没有告诉我们,怎样去求出它们.

让我们回忆一下,如何求 $R(K_3,K_3)=6$.

在§1中,我们证明了:6个点的染色游戏,必出现一个同色三角形.于是,即证明了 $R(K_3,K_3)$的上界

$$R(K_3,K_3)\leqslant 6. \tag{3·1}$$

在§2中,我们举出了一个5个点的图(图2-1),它的边染两色,但不存在同色三角形.这种不出现我们所需图形的阶数最大的图称为拉姆赛数的临界图.临界图2-1表明了 $R(K_3,K_3)$的下界:

$$R(K_3,K_3)\geqslant 6. \tag{3·2}$$

即 $R(K_3,K_3)>5$,于是,由(3·1)和(3·2)式合起来,就得到结论 $R(K_3,K_3)=6$.

用这种方法,我们探索 $R(K_3,K_4)$.

先证明 $R(K_3,K_4)\leqslant 9$,即证明:平面上9个点,用红,蓝两色任意连边,必出现一个红 K_3 或一个蓝 K_4.

在9个点中的某一点若用4条红边连另外4个点,则仿照§1的思路,必出现一个红 K_3 或一个蓝 K_4.于是,每个点引出的红边数至多有3条,但不能每点引出的红边数都恰有3条,否则整个图的红边数是$\frac{9\times 3}{2}$,不是整数!因此至少有一点,设为 A,引出的红边数$\leqslant 2$.即 A 引出的蓝边至少有6条,