



MATLAB  
工具系列丛书

# 偏微分方程的 *MATLAB*解法

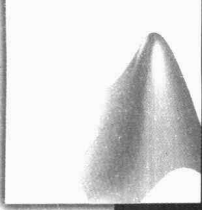
■ 陆君安 尚涛 谢进 谷平 编著

■ 武汉大学出版社

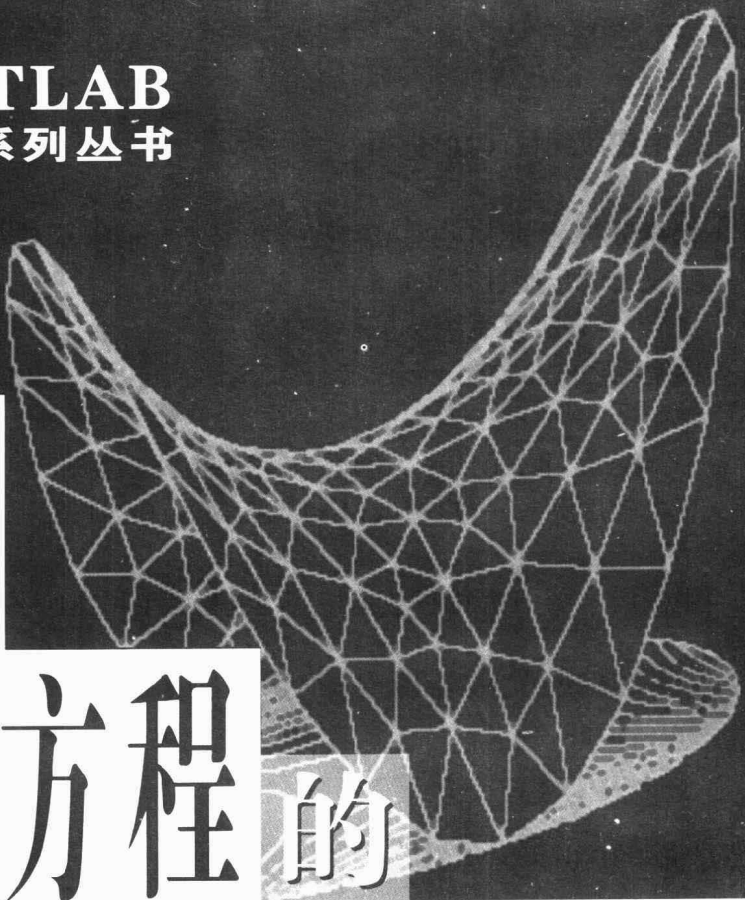
82



# MATLAB



MATLAB  
工具系列丛书

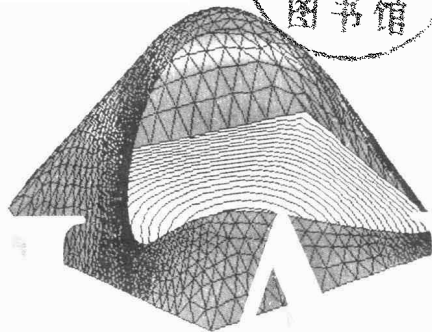


# 偏微分方程的

# MATLAB 解法

■ 陆君安 尚涛 谢进 谷平 编著

■ 武汉大学出版社



## 图书在版编目(CIP)数据

偏微分方程的 MATLAB 解法/陆君安, 尚涛, 谢进, 谷平编著. —武汉:  
武汉大学出版社, 2001. 8

MATLAB 工具系统丛书

ISBN 7-307-03256-2

I. 偏… II. ①陆… ②尚… ③谢… ④谷… III. 偏微分方程—计  
算机辅助计算—软件包, MATLAB IV. O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 040281 号

责任编辑: 顾素萍      责任校对: 卢建      版式设计: 支笛

---

出版: 武汉大学出版社 (430072 武昌 珞珈山)

(电子邮件: wdp4@whu.edu.cn 网址: www.wdp.whu.edu.cn)

发行: 新华书店湖北发行所

印刷: 湖北省通山县印刷厂

开本: 787×980 1/16      印张: 13      字数: 239 千字      插页: 2

版次: 2001 年 8 月第 1 版      2001 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 7-307-03256-2/O·237      定价: 20.00 元

---

版权所有, 不得翻印; 凡购我社的教材, 如有缺页、倒页、脱页等质量问题者, 请与当地教材供应部门联系调换。

## 内 容 简 介

MATLAB 是国际公认的最优秀的科技应用软件之一,具有极高的编程效率和强大的作图功能。本书详细介绍了 MATLAB 6 的偏微分方程工具箱,包括图形用户界面和函数命令的使用方法,通过典型方程和大量应用实例,让读者很快掌握解题方法。

本书既可作为大专院校师生的教材或教学参考书,也可作为科研及工程技术人员高效、实用的工具参考书。

## 前 言

偏微分方程定解问题有着广泛的实际背景，很多重要的物理、力学学科的基本方程本身就是偏微分方程。人们用偏微分方程来描述、解释或预见各种自然现象，并用于科学和工程技术的各个领域。随着计算机技术的飞速发展，编制高效的程序求解各种偏微分方程问题已成为可能，偏微分方程数值解法也成为科学和工程计算中的重要分支。然而，对于广大应用工作者来说，从偏微分方程模型出发，使用有限元法或有限差分法求解都要经过许多步骤，耗费很大的工作量，才能得到数值解。进一步做可视化又是一个迫切需要解决的问题。现在，MATLAB PDE Toolbox 已实现对于空间二维问题高速、准确的求解过程，人们只要使用用户界面或 M 文件，画出所需要的任何区域，输入方程类型和有关系数，点按鼠标，就可以显示解的图形或输出解的数值。这一切变得如此轻松，如此容易。当人们使用这一软件后，不禁会感叹万分，MATLAB PDE Toolbox 竟然有如此大的本领！

我们花了近一年时间，对 MATLAB 的 PDE 工具箱，从图形用户界面入手，对各种典型方程和应用实例逐个作了计算，对各条函数命令作了研究，决定把它们整理出来献给读者。它对于希望用偏微分方程解决实际问题的广大科技人员和高校师生，将会带来极大的方便，并且在此基础上一定能够解决更多更复杂的问题。同时，我们也深深地感到，过去我们在给学生讲授偏微分方程（或数理方程）和偏微分方程数值解这类课程时，教学手段太落后了。今天，我们应该把 MATLAB 引入课堂，一边讲授一边演示，形象生动地显示解的图像，分析解的性质。

全书共分七章。第一章概述，介绍了 PDE Toolbox 的功能及其应用领域，并且通过一个例子让读者大致了解它的求解过程。第二章图形用户界面（GUI），详细地介绍菜单和工具栏的使用方法。熟悉这些，便可以在 PDE Toolbox 上做题了。第三章典型方程及应用实例，提供了三类方程及特征值方程和方程组的各种例子（包括非线性 PDE 的例子），还提供了广泛的应用实例。每个例子基本上都有解题步骤和图形解（包括动画）及数值解。读者可以一边阅读一边在 MATLAB 上演练，少走弯路，迅速掌握 PDE Toolbox 解题方法。第四章介绍 PDE Toolbox 中的函数命令，MATLAB 语言被称为第四代计算机的语言，比起

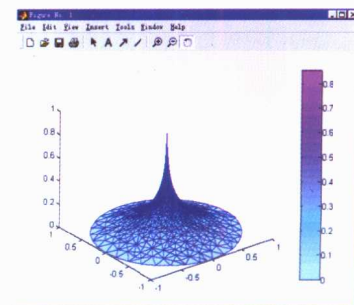
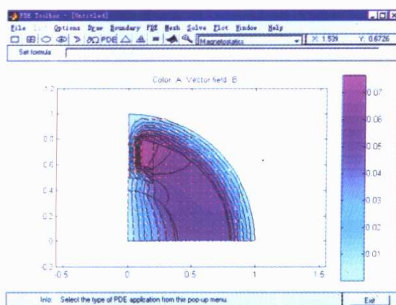
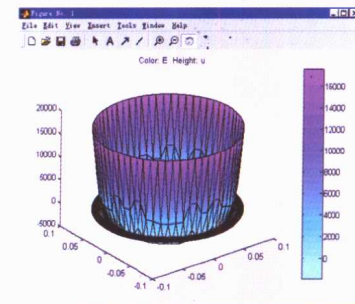
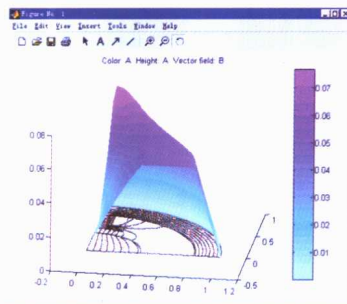
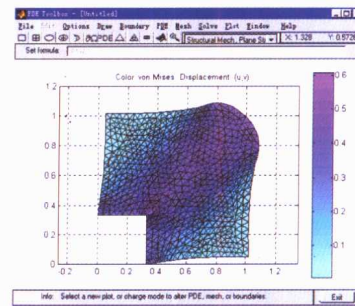
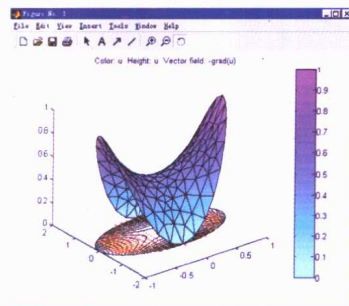
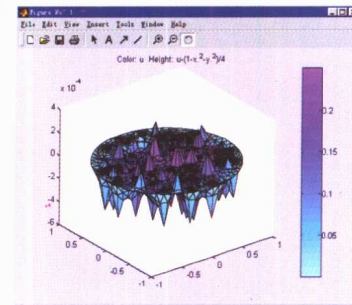
C 和 FORTRAN 语言明显的优点是简洁且功能强大，特别是具有强大的编辑图形界面的能力。虽然这一章读起来比较枯燥乏味，但要解决更复杂的问题或进行二次开发，就必须掌握 M 文件的编程。第五章用实例讲解了有限元法及传统的五点格式差分方法。第六章介绍了常微分方程初值问题数值解和解析解的方法，虽然只是入门，但有了这些也能轻轻松松地作出像 LORENZ 这样复杂的混沌奇怪吸引子图形。第七章介绍 MATLAB 6 的基础知识，供初学者参考。附录一、二便于读者查阅。全书图文并茂，力求详尽，通过大量例题，让读者很快进入 PDE Toolbox 的精彩世界。

尽管本书反复斟酌完善，但限于作者的水平，书中的错误在所难免，恳请读者批评指正。我们衷心地感谢武汉大学出版社和原武汉水利电力大学师资办公室的老师，没有他们的大力支持和资助，本书很难及时出版。同时我们也感谢所有支持和关心我们工作的同事和朋友们。

作者

于武昌珞珈山

2001 年 6 月



# 目 录

前言 .....	1
<b>第一章 概述</b> .....	<b>1</b>
1.1 偏微分方程工具箱的功能 .....	1
1.2 PDE Toolbox 求解的问题及其背景 .....	1
1.2.1 方程类型 .....	1
1.2.2 边界条件 .....	2
1.2.3 PDE 模型的背景 .....	3
1.3 如何使用 PDE Toolbox .....	3
1.3.1 定解问题的设置 .....	3
1.3.2 解 PDE 问题 .....	3
1.3.3 使用 Toolbox 求解非标准的问题 .....	4
1.3.4 计算结果的可视化 .....	4
1.3.5 应用领域 .....	4
1.4 解偏微分方程的一个例子 .....	4
<b>第二章 PDE 图形用户界面</b> .....	<b>10</b>
2.1 PDE Toolbox 菜单 .....	10
2.2 PDE 工具栏 .....	25
<b>第三章 典型方程及应用实例</b> .....	<b>27</b>
3.1 求解椭圆型方程的例子 .....	27
3.2 求解抛物型方程的例子 .....	38
3.3 求解双曲型方程的例子 .....	41
3.4 求解特征值问题的例子 .....	43
3.5 应用模型 .....	47



3.5.1	结构力学——平面应力问题	48
3.5.2	结构力学——平面应变问题	51
3.5.3	静电场问题	51
3.5.4	静磁场问题	53
3.5.5	交流电磁场问题	57
3.5.6	直流导电介质问题	59
3.5.7	热的传输问题	61
3.5.8	扩散问题	62
3.6	输出计算结果的例子	63
3.7	PDE 的 M 文件格式	67
3.8	用命令行解 PDE 的若干程序	73
<b>第四章</b>	<b>PDE Toolbox 中的命令简介</b>	<b>84</b>
4.1	PDE Toolbox 中的函数及其分类	84
4.2	PDE 数值计算函数简介	87
4.3	用户界面算法函数简介	108
4.4	几何算法函数简介	109
4.5	几何绘图函数简介	118
4.6	通用算法	123
4.7	其他函数简介	128
<b>第五章</b>	<b>有限元法和有限差分法</b>	<b>134</b>
5.1	椭圆型方程	134
5.2	抛物型方程	137
5.3	双曲型方程	138
5.4	特征值方程	139
5.5	非线性方程	139
5.6	用有限元法求解的应用实例	141
5.7	典型方程的有限差分法简介	146
5.7.1	矩形区域椭圆型方程的差分格式	146
5.7.2	热传导方程的差分格式	148
5.8	用差分方法求解的例子	149

---

<b>第六章 常微分方程及方程组的解法</b> .....	151
6.1 求常微分方程及方程组的初值问题的数值解 .....	151
6.2 求常微分方程及方程组的解析解 .....	158
6.3 用 DEE 解常微分方程及其方程组 .....	160
<b>第七章 MATLAB 的基础知识</b> .....	167
7.1 MATLAB 的启动 .....	167
7.2 变量、表达式和语句 .....	168
7.3 命令行的编辑和输入 .....	169
7.4 数据显示格式命令 .....	170
7.5 命令窗口中常用操作命令 .....	171
7.5.1 演示命令 demo .....	171
7.5.2 内存变量管理 .....	171
7.5.3 搜索路径 .....	172
7.5.4 在线帮助 .....	172
7.6 编程入门 .....	173
7.6.1 M 文件的形式 .....	173
7.6.2 控制语句 .....	176
<b>附录一 MATLAB 的函数命令</b> .....	180
常用指令 .....	180
基本数学函数 .....	183
关于函数的命令和 ODE 求解器 .....	185
偏微分方程工具箱 .....	186
<b>附录二 根据有限元法用 MATLAB 语言解 PDE 的程序</b> .....	189
<b>参考文献</b> .....	197

# 第一章 概 述

## 1.1 偏微分方程工具箱的功能

偏微分方程工具箱 (PDE Toolbox) 提供了研究和求解空间二维偏微分方程问题的一个强大而又灵活实用的环境。PDE Toolbox 的功能包括:

- (1) 设置 PDE (偏微分方程) 定解问题, 即设置二维定解区域、边界条件以及方程的形式和系数;
- (2) 用有限元法 (FEM) 求解 PDE, 即网格的生成、方程的离散以及求出数值解;
- (3) 解的可视化。

无论是高级研究人员还是初学者, 在使用 PDE Toolbox 时都会感到非常方便。只要 PDE 定解问题的提法正确, 那么, 启动 MATLAB 后, 在 MATLAB 工作空间的命令行中键入 `pdetool`, 系统立即产生偏微分方程工具箱 (PDE Toolbox) 的图形用户界面 (Graphical User Interface, 简记为 GUI), 即 PDE 解的图形环境, 这时就可以在它上面画出定解区域、设置方程和边界条件、作网格剖分、求解、作图等工作, 详见 1.4 节中的例子。我们将在第二章详细介绍 GUI 的使用, 在第三章给出大量典型例子和应用实例。除了用 GUI 求解 PDE 外, 也可以用 M 文件的编程计算更为复杂的问题, 详见第三章和第四章的内容。

## 1.2 PDE Toolbox 求解的问题及其背景

### 1.2.1 方程类型

PDE Toolbox 求解的基本方程有椭圆型方程、抛物型方程、双曲型方程、特征值方程、椭圆型方程组以及非线性椭圆型方程。

椭圆型方程:

$$-\nabla \cdot (c\nabla u) + au = f, \text{ in } \Omega,$$

其中  $\Omega$  是平面有界区域,  $c, a, f$  以及未知函数  $u$  是定义在  $\Omega$  上的实(或复)函数。

抛物型方程:

$$d \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (c \nabla u) + au = f, \text{ in } \Omega.$$

双曲型方程:

$$d \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla \cdot (c \nabla u) + au = f, \text{ in } \Omega.$$

特征值方程:

$$-\nabla \cdot (c \nabla u) + au = \lambda du, \text{ in } \Omega,$$

其中  $d$  是定义在  $\Omega$  上的复函数,  $\lambda$  是待求的特征值。在抛物型方程和双曲型方程中, 系数  $c, a, f$  和  $d$  可以依赖于时间  $t$ 。

可以求解非线性椭圆型方程:

$$-\nabla \cdot (c(u) \nabla u) + a(u)u = f(u), \text{ in } \Omega,$$

其中  $c, a$  和  $f$  可以是解  $u$  的函数。还可以求解如下 PDE 方程组:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (c_{11} \nabla u_1) - \nabla \cdot (c_{12} \nabla u_2) + a_{11}u_1 + a_{12}u_2 = f_1, \\ -\nabla \cdot (c_{21} \nabla u_1) - \nabla \cdot (c_{22} \nabla u_2) + a_{21}u_1 + a_{22}u_2 = f_2. \end{cases}$$

利用命令行可以求解高阶方程组。对于椭圆型方程, 可以用自适应网格算法, 还能与非线性解结合起来使用。

另外, 对于 Poisson 方程还有一个矩形网络的快速求解器。

### 1.2.2 边界条件

(1) Dirichlet 条件

$$hu = r.$$

(2) Neumann 条件

$$\mathbf{n} \cdot (c \nabla u) + qu = g,$$

其中  $\mathbf{n}$  是  $\partial\Omega$  上的单位外法向矢量,  $g, q, h$  和  $r$  是定义在  $\partial\Omega$  上的函数。对于特征值问题仅限于齐次条件:  $g = 0, r = 0$ 。对于非线性情形, 系数  $g, q, h$  和  $r$  可以依赖于  $u$ ; 对于抛物型方程和双曲型方程, 系数可以依赖于时间  $t$ 。对于方程组情形, Dirichlet 边界条件为

$$h_{11}u_1 + h_{12}u_2 = r_1, \quad h_{21}u_1 + h_{22}u_2 = r_2.$$

而一般的 Neumann 条件为

$$\mathbf{n} \cdot (c_{11} \nabla u_1) + \mathbf{n} \cdot (c_{12} \nabla u_2) + q_{11}u_1 + q_{12}u_2 = g_1,$$

$$\mathbf{n} \cdot (c_{21} \nabla u_1) + \mathbf{n} \cdot (c_{22} \nabla u_2) + q_{21}u_1 + q_{22}u_2 = g_2.$$

混合边界条件为

$$\begin{aligned} h_{11}u_1 + h_{12}u_2 &= r_1, \\ \mathbf{n} \cdot (c_{11}\nabla u_1) + \mathbf{n} \cdot (c_{12}\nabla u_2) + q_{11}u_1 + q_{12}u_2 &= g_1 + h_{11}\mu, \\ \mathbf{n} \cdot (c_{21}\nabla u_1) + \mathbf{n} \cdot (c_{22}\nabla u_2) + q_{21}u_1 + q_{22}u_2 &= g_2 + h_{12}\mu. \end{aligned}$$

其中  $\mu$  的计算要使得 Dirichlet 条件满足。在有限元法中, Dirichlet 条件也称为本质边界条件, Neumann 条件也称为自然边界条件, 关于有限元法详见第五章。

### 1.2.3 PDE 模型的背景

Toolbox 中所解的 PDE 模型有着广泛的背景, 它来自工程和科学的许多分支, 现举例如下:

- 椭圆型和抛物型方程来自定常和非定常传输问题
- 多孔介质的流动和扩散问题
- 绝缘和导体材料的静电场问题
- 势流
- 双曲型方程来自暂态和谐波在声音和电磁场中的传播
- 薄膜的横振动
- 特征值问题来自例如求解薄膜和结构力学的固有振动问题

Toolbox 对于偏微分方程和偏微分方程数值解 (特别是有限元法) 的教学也大有好处。

## 1.3 如何使用 PDE Toolbox

### 1.3.1 定解问题的设置

最简单的办法是在 PDE Tool 上直接使用图形用户界面 (GUI)。设置定解问题包括三个模式 (Mode):

- (1) Draw 模式: 使用 CSG (几何结构实体模型) 对话框画几何区域, 包括矩形、圆、椭圆和多边形, 也可以将它们组合使用。
- (2) Boundary 模式: 在各个边界段上给出边界条件。
- (3) PDE 模式: 确定方程的类型、系数  $c, a, f$  和  $d$ 。也能够不同子区域上设置不同的系数 (反映材料的性质)。

### 1.3.2 解 PDE 问题

用 GUI 解 PDE 问题主要使用下面两个模式:

(1) Mesh 模式：生成网格，自动控制网格参数。

(2) Solve 模式：对于椭圆型方程还能求非线性和自适应解。对于抛物型和双曲型方程，设置初始边值条件后能求出给定  $t$  时刻的解。对于特征值问题，能求出给定区间内的特征值。求解后可以加密网格再求解。

### 1.3.3 使用 Toolbox 求解非标准的问题

对于非标准的问题，可以用 PDE Toolbox 的函数，或者用 FEM（有限元法）求解更为复杂的问题。见第四章关于命令函数部分。

### 1.3.4 计算结果的可视化

从 GUI 能够使用 Plot 模式实现可视化。可以使用 Color, Height 和 Vector 等作图。对于抛物型和双曲型方程，还可以生成解的动画。这些操作通过命令行都很容易实现。

### 1.3.5 应用领域

在应用界面提供了如下应用领域：

- 结构力学——平面应力问题
- 结构力学——平面应变问题
- 静电场问题
- 静磁场问题
- 交流电磁场问题
- 直流导体介质问题
- 热传导问题
- 扩散问题

这些界面都有对话框，它包括 PDE 的系数、边界条件、解的性质等。许多例子不但有 GUI 的使用方法，还有命令行的说明。

## 1.4 解偏微分方程的一个例子

解 Poisson 方程  $-\Delta u = f$ ，边界条件为齐次 Dirichlet 类型。

第一步：启动 MATLAB，键入 pdetool，按回车键确定便可启动 GUI，然后在 Options 菜单下选择 Grid 命令，打开栅格。栅格的使用，能使用户容易确定所绘图形的大小，如图 1-1。

第二步：分步完成平面几何造型：R1-C1-E1+R2+C2。用菜单或快捷工具，分别画矩形 R1、矩形 R2、椭圆 E1、圆 C1、圆 C2。画圆时，首先选中椭圆工

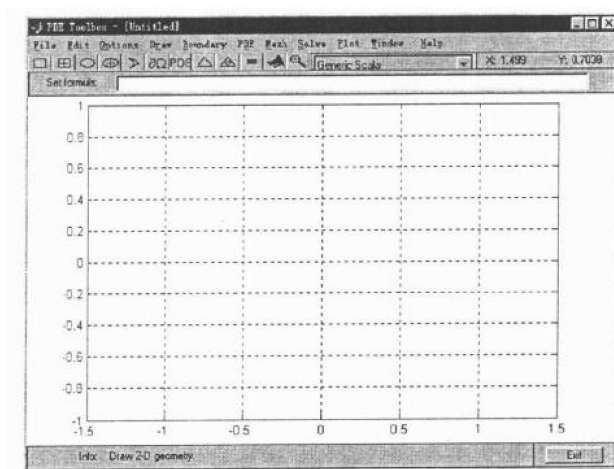


图 1-1

具，按鼠标右键并拖动即可，或者在按 Ctrl 的同时，拖动鼠标也可绘制圆。然后在 Set formula 栏，进行编辑并用算术运算符将图形对象名称连接起来，或删除默认的表达式直接键入  $R1-C1-E1+R2+C2$ ，如图 1-2。若需要，还可进行储存，形成 M 文件。

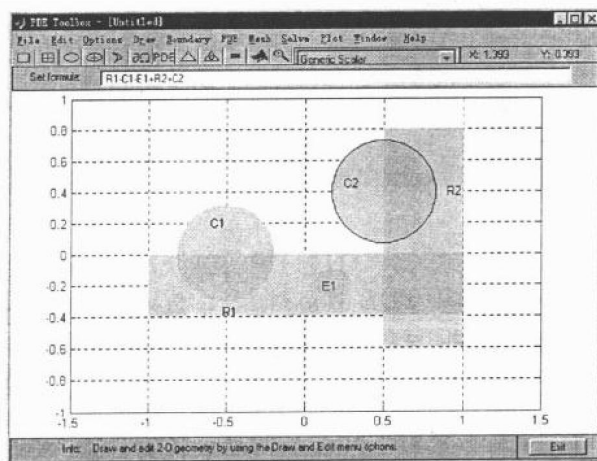


图 1-2

选择 Boundary 菜单中 Boundary Mode 命令，进入边界模式。单击 Boundary 菜单中 Remove All Subdomain Borders 选项，去除子域边界，如图 1-3。如果想将几何信息和边界信息进行存储，应选择 Boundary 菜单中的 Export Decomposed Geometry, Boundary Cond's...命令，将它们分别储存于 g,b 变量中，通过 MATLAB 形成 M 文件。

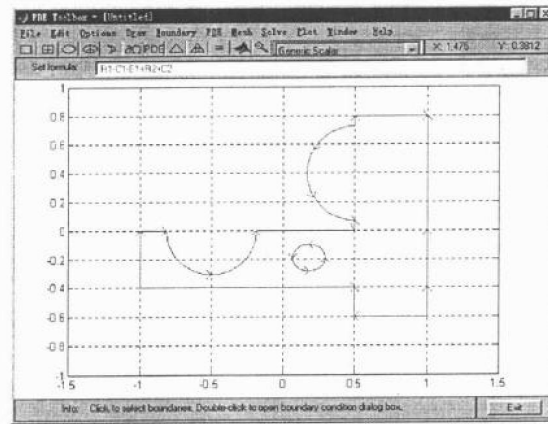


图 1-3

第三步：选取边界，单击 Boundary 菜单中 Specify Boundary Conditions... 选项，打开 Boundary Conditions 对话框，输入边界条件，如图 1-4。本例取缺省条件，即将全部边界设为齐次 Dirichlet 条件，边界颜色显示为红色。

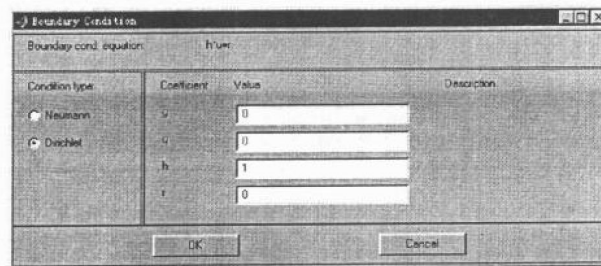


图 1-4

第四步：选择 PDE 菜单中 PDE Mode 命令，进入 PDE 模式。单击 PDE 菜单中 PDE Specification... 选项，打开 PDE Specification 对话框，设置方程类型。本例取缺省设置，类型为椭圆型，参数  $c, a, f$  分别为 1, 0, 10，如图 1-5。

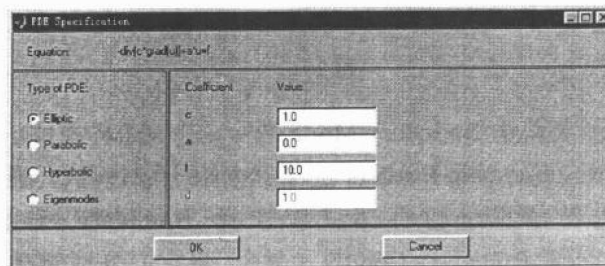


图 1-5



第五步：选择 Mesh 菜单中 Initialize Mesh 命令，进行网格剖分，如图 1-6。

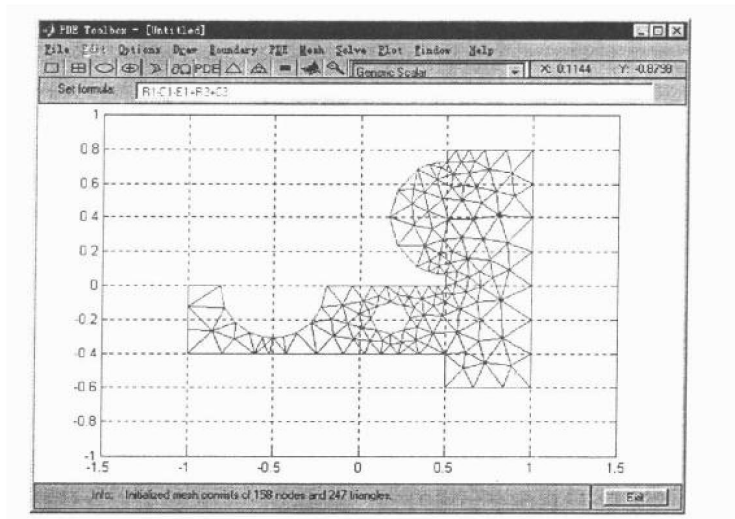


图 1-6

第六步：选择 Mesh 菜单中 Refine Mesh 命令，对网格加密，如图 1-7。

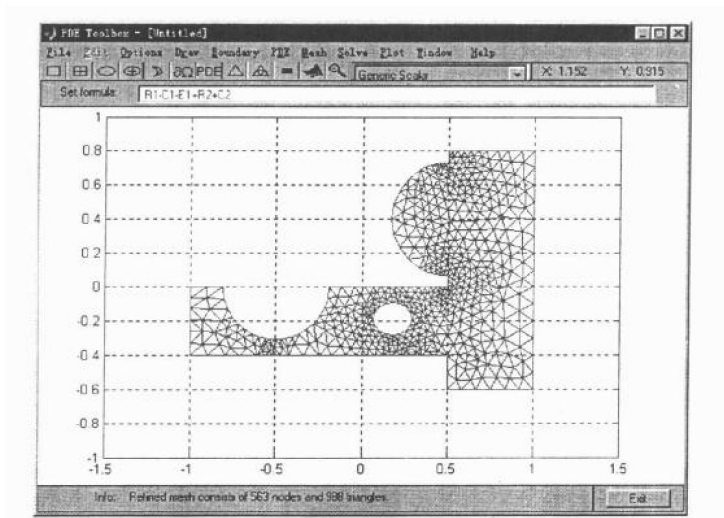


图 1-7

第七步：选择 Solve 菜单中 Solve PDE 命令，解偏微分方程并显示图形解，如图 1-8。