现代数学译丛

拓扑空间论

〔日〕 儿玉之宏
永见启应 著

科学出版社

现代数学译丛

拓 扑 空 间 论

〔日〕儿玉之宏　永见启应 著

方嘉琳 译

周浩旋 等 校

科 学 出 版 社

1 9 8 4

内 容 简 介

本书是点集拓扑学方面的一本专著，取材新颖，内容丰富，介绍了一些新概念、新方法和点集拓扑学发展中值得注意的趋势. 全书共十章，内容为：拓扑空间、积空间、仿紧空间、紧空间、一致空间、复形和扩张子、逆极限和展开定理、Arhangel'skiĭ空间、商空间和映射空间、可数可乘的空间族. 其中第八、九、十章反映了70年代的成果. 正文前的绪论简要地叙述了阅读本书所需要的集合论的基本知识. 书中有大量的例题和习题，有益于加强基本训练. 同时还提出一些尚未解决的问题，为了解学科动态，进行点集拓扑学方面的研究提供了较方便的条件.

本书可供大学数学系高年级学生、研究生、教师及有关方面的研究人员参考.

参加本书校订工作的还有白苏华、胡师度同志.

児玉之宏　永見啓応
位相空間論
岩波書店 1974

现 代 数 学 译 丛
拓 扑 空 间 论
〔日〕儿玉之宏　永见启应 著
方嘉琳 译
周浩旋 等 校
责任编辑 杜小杨 张鸿林
科学出版社出版
北京朝阳门内大街137号
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1984年3月第一版　开本：850×1168 1/32
1984年3月第一次印刷　印张：13 1/4
印数：0001—7,500　字数：346,000

统一书号：13031·2488
本社书号：3419·13—1

定价：2.45元

前　　言

本书可以作为拓扑空间论的教科书．对此理论及其应用有兴趣的各分支的研究工作者，也可将此书作为一本入门书．了解大学低年级的集合论基本内容的读者，即可顺利阅读，不需要其它任何预备知识．为了读者方便，在绪论中简要叙述了本书所需要的集合论的基本知识．

本书正文共十章．其中前三章是最基本的部分，对于理解以后各章是必需的．第四章以后分为第四、五章，第六、七章，第八、九、十章三部分．各部分之间可以独立地阅读(定义等例外)．

在第一章中引入拓扑空间和连续性的概念．在第二章中引入积拓扑，证明了 Tychonoff 积定理和选择公理的等价性、可分空间、完全可分空间、完全正则空间的嵌入定理等．第三章的目的是证明关于仿紧空间、可列仿紧空间的基本定理群．给出了对于这些空间的 Dieudonné, Dowker, Michael, Stone 等的特征定理．

第四章中更深入地考察了拓扑空间论中最有趣味的对象之一，即有广泛应用的紧空间．关于可数紧性以及伪紧性也予以注意，但这些是为了更深刻地理解紧性概念的一个侧面．在此介绍了关于 Stone-Čech 紧化的保积性的 Glicksberg 定理，Tamano 积定理等．第五章考察了一致空间及 δ 空间．只需要大体上了解一下关于这些空间的知识的读者，本章的前半部分就已足够，理解它并不需要第四章的知识．

第六章讨论了扩张子和收缩核的理论，第七章讨论了各种展开定理．这两章特别有助于从集合论的侧面更深刻地理解代数拓扑学．

第八、九、十章是以展望拓扑空间论最近发展趋势的观点来写的．在第八、九章主要着眼于 Arhangel'skiĭ 创始的新空间概念、新

映射概念以及它们之间的某种相互关系．根据这个新观点，在第九章中指出了关于基数的 Alexandroff 问题的解决方法．为了解决这个半个世纪以前提出的问题，Arhangel'skiĭ 用了自由列的概念．这是必须注意的重要概念，但本书中限于篇幅未能采取他的证明方法．最后，第十章讨论了各种可数可乘空间族．可以预期这些空间族将是有广泛应用的领域．

为了更深刻地理解数学内容，习题是不可少的．在这种意义下，在各章末配置了习题．对于难题全部给予提示，估计自学的读者也不会有困难．另外，为了能够接触本文以外尽可能多的重要概念及定理，在习题中也常常涉及它们．

数学的历史也可以说是解决问题的历史．问题有时由反例直接否定，有时由新理论肯定地予以解决．这种情况，在拓扑空间论中也不例外．特别是用例子给新概念以可靠的基础，保证了它不是空洞的理论．在此意义下，在本书中许多例子与理论占有相同的比重，二者互为表里．另外，随时随地提出了未解决的问题．它们未必都是经受历史考验的重要问题，但向读者传授这个理论的生动面貌是作者的强烈愿望，这就是敢于做这个尝试的原因．

为了知道拓扑空间论的概略，做为大学中期的一门课程，用第一、二章即可．继续的课程可以考虑如下的组合，即用第三章，第四、五章的前半部分或第三章和第九章的 k 空间、映射空间两节．再以后的选择可以自由进行．记号口表示证明完了．

在小松醇郎先生不断的鼓励下我们写出了这本书．吉田耕作先生关心本书的出版，并给予了有力的精神支持．木村信夫、津田满、奥山晃弘诸教授细心地通读了原稿，提出了许多有益的意见．野仓嗣纪、宇都官京子、永见缘诸位先生帮助作成索引等烦杂琐事．京都大学数理解析研究所在作者共同研究期间提供了讨论本书的场所．也应提到岩波书店的各方协助．由于各方热情关怀，本书才得以出版．在此向以上各方表示作者衷心的感谢．

作　者

1974年夏

记　号　表

$a\in X$，$a\notin X$	1.1
$X\subset Y$，$X\subsetneqq Y$，$X=Y$	1.1
$X\cup Y$，$X\cap Y$，$X-Y$	1.1
$\{a:P\}$	1.1
$\varnothing$	1.1
$\bigcup\{A_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$，$\bigcup A_\alpha$	1.2
$\bigcap\{A_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$，$\bigcap A_\alpha$	1.2
$X\times Y$	1.4
aRb	1.4
$f: X\to Y$，$f(a)$，$f(X)$，f^{-1}	1.4
$f\|X'$	1.4
1_X	1.4
$\prod_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$	1.5
Δ_X	1.4
(f_α)	1.5
$\prod_{\alpha\in\Lambda} g_\alpha$	1.5
X/R	1.6
$(X,<)$，$\sup A$，$\inf A$	1.7
$p(A)$，$\|A\|$	2.1
2^A	2.2，I.V
$\aleph_0$，$\aleph_1$，$\mathfrak{c}$	2.3—2.4
N	2.3

I^{ω}	11.5
D	11.7
$\mathscr{U} < \mathscr{V}$	14.3
$\mathrm{ord}_x \mathscr{U}$, $\mathrm{ord}\mathscr{U}$	14.3
$\dim X$	14.3
$\bar{\mathscr{V}}$	14.4
$\bigwedge_{\alpha \in A} \mathscr{U}_{\alpha}$	14.6
$\mathrm{mesh}\mathscr{U}$	14.6
$\mathscr{U} \mid Y$	14.7
$\mathrm{ord} f$	14.11
$\mathscr{U}(A)$, $\mathscr{U}^n(A)$, $\mathscr{U}^{-n}(A)$	15.1
$\mathscr{U}^n$, $\mathscr{U}^{\Delta}$, $\mathscr{U}^*$	15.1
$n(X)$	19.1
βX	20.2
$A \Subset B$	20.3,29.1
cX	20.8
wX	20.11
$\chi_0(X)$	22.7
$\Sigma(\bar{x})$	25.8
$\sigma(X)$	4.B
(X, Φ)	26.2
$\mathrm{lub}\{\Phi_r\}$	26.5
$\chi_X(F)$, $\chi(F)$	28.8
$A\delta B$, $A\bar{\delta}B$	29.1
U^{-1}, $U \circ V$, $U[A]$	5.A
vX	5.G
$\dim s$, $\dim K$	31.1
$s' \prec s$	31.1
K^n	31.1

目　　录

绪论 集合论

§1. 集 合

1.1 在本章中简要地叙述本书使用的关于集合的基本定义和记号，以及集合论中必要的定理.

考虑满足某条件的事物的汇集时，汇集的全体称为集合或集(set)或族(family)，系(system).构成集合的各个事物称为该集合的元素(element)，点(point)，称元素属于集合，或被集合包含.将元素 a 属于集合 X 的事实记作 $a\in X$（或 $X\ni a$）. 当 a 不是 X 的元素时，写为 $a\notin X$（或 $X\not\ni a$）. 当集合 X 的元素全部被集合 Y 包含时，称 X 为 Y 的子集(subset)，表为 $X\subset Y$ 或 $Y\supset X$. 此时称 X 被 Y 包含或 Y 包含 X. 二集合 X 和 Y，若 $X\subset Y$ 且 $X\supset Y$，则称为同一集合或相等，写做 $X=Y$. 当 $X\subset Y$ 且 $X\neq Y$，即 X 是 Y 的子集而与 Y 不是同一集合时，称 X 为 Y 的真子集(proper subset)，写做 $X\subsetneqq Y$. 对于两个集合 X,Y，属于 X 或 Y 的元素的集合，记为 $X\cup Y$，称为 X 和 Y 的并集(union)或简单地称为和. 既属于 X 也属于 Y 的元素的集合称为 X 和 Y 的交集(intersection)，记作 $X\cap Y$. 属于 X 但不属于 Y 的元素的集合称为 Y 关于 X 的补集(complement)，记作 $X-Y$.集合 X 是满足某条件 P 的元素 a 的集合时，写做 $X=\{a:P\}$. 若使用这个记号，则可写做 $X\cup Y=\{a: a\in X$ 或 $a\in Y\}$，$X\cap Y=\{a: a\in X$ 且 $a\in Y\}$，$X-Y=\{a: a\in X$ 且 $a\notin Y\}$. 集合 $X-X$ 是不具有元素的集合. 称之为空集(empty set)，以 $\varnothing$ 表示之. $\varnothing$ 是任意集合 X 的子集.

1.2 当集合的各元素本身就是集合时，这个集合称为集族(family of sets)或集系(system of sets).为了区别集族的元素，可对做为元素的集合赋予指标(index). 对集合 Λ 的各元素 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$

确定集合X的子集 A_α, A_β, A_γ, $\cdots$时，由 $A_\alpha, A_\beta, A_\gamma, \cdots$ 构成的集族以 $\{A_\alpha: \alpha\in \Lambda\}$ 或简单地以 $\{A_\alpha\}$ 表示之，称之为依Λ赋予指标的族. 集合Λ称为指标集 (index set)，Λ的元素称为指标. 对于集族 $\{A_\alpha: \alpha\in \Lambda\}$，至少属于一个 A_α 的元素的集称为并集，属于所有 A_α 的元素的集称为交集，分别以$\cup\{A_\alpha:\alpha\in \Lambda\}$，$\cap\{A_\alpha: \alpha\in \Lambda\}$ 表示之. 并集，交集也写做 $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$，$\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$，有时更简单地仅写做$\cup A_\alpha$，$\cap A_\alpha$. 集族 $\{A_\alpha: \alpha\in \Lambda\}$ 对于Λ的任意不同元素α，β，有 $A_\alpha\cap A_\beta = \varnothing$ 时，称为不交的 (disjoint).

1.3 定理 设$\{A_\alpha\}$为以Λ为指标集的集X的子集族，B为X的子集. 下列等式成立.

(1) $$B\cap\left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right)=\bigcap_{\alpha\in\Lambda}(B\cap A_\alpha),$$

$$B\cup\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}(B\cup A_\alpha),$$

(2) $$B\cap\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}(B\cap A_\alpha),$$

$$B\cup\left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right)=\bigcap_{\alpha\in\Lambda}(B\cup A_\alpha),$$

(3) $$X-\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right)=\bigcap_{\alpha\in\Lambda}(X-A_\alpha),$$

$$X-\left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}(X-A_\alpha).$$

(2) 称为分配律 (distributive law)，(3) 称为 de Morgan 法则.

1.4 当给与集合X与Y时，X和Y的积 (product) 或直积 (direct product) $X\times Y$定义如下. $X\times Y$是X的元素a和Y的元素b的所有有序对(a, b)的集合，即 $X\times Y=\{(a,b): a\in X, b\in Y\}$. $X\times Y$的元素(a,b)，(a',b')仅限于 $a=a'$ 且 $b=b'$ 时是同一元素. 对于$X\times Y$的元素(a,b)，X的元素a称为(a,b)的第一成分，Y的元素b称为(a,b)的第二成分. $X\times Y$的子集R确定X的元素a和Y的元素b的关系 (relation) 如下：当 $(a, b)\in R$

时称为 a 和 b 具有关系 R，以 aRb 表示之. 关系 R 的定义域 (domain) 是属于 R 的元素的第一成分的集合，R 的值域 (range) 是 R 的元素的第二成分的集合.即 R 的定义域 $=\{a$: 关于某个 $b\in Y$, $aRb\}$, R 的值域 $=\{b$: 关于某个 $a\in X$, $aRb\}$.

对于两个集合 X 和 Y，给与关系 f: (1) f 的定义域是 X 全体，(2) f 的相异二元不具有相同的第一成分，这时 f 称为 X 到 Y 的映射 (mapping)，函数 (function) 或对应(correspondence). 即所谓 f 是 X 到 Y 的映射，是指对于 X 的任意元素 a，有 Y 的元素 b，使 afb，若 afb 且 afb'，则 $b=b'$. 当 f 是 X 到 Y 的映射时，以 $f: X\to Y$ 表示之. 当 afb 时，写做 $f(a)=b$ 或 $fa=b$，b 称为 f 在 a 的值 (value) 或 a 在 f 下的象 (image). 或称 f 使 X 的元素 a 对应或映射于 Y 的元素 $b=f(a)$. 当 $f: X\to Y$ 为映射时，f 的值域称为 X 在 f 下的象，以 $f(X)$ 或 fX 表示之. 当 $f(X)=Y$ 时，称 f 为到 Y 上的映射. 关于 $Y'\subset Y$，称集合 $\{a: f(a)\in Y'\}$ 为在 f 下 Y' 的逆象 (inverse image)，以 $f^{-1}(Y')$ 或 $f^{-1}Y'$ 表示之. 当 Y' 是由 Y 的一个元素 b 组成时，可简单地写做 $f^{-1}(b)$ 来代替 $f^{-1}(\{b\})$.当 f 的象的任意元素的逆象仅由一个元素组成时，称 f 为一一映射. 关于 $X'\subset X$ 对于 $a\in X'$ 由 $f'(a)=f(a)$ 定义映射 $f': X'\to Y$ 时，f' 称为 f 在 X' 上的限制映射 (restriction)，以 $f|X'$ 表示之. 关于各 $a\in X$ 若定义 $i(a)=a$，则得到 X 到 X 上的一一映射 $i: X\to X$. i 称为恒等映射 (identity mapping)，以 1_X 或单用 1 表示之. 当 $X'\subset X$ 时，限制映射 $1_X|X': X'\to X$ 称为包含映射(inclusion). 做为关系的映射 $f: X\to Y$ 亦即 $X\times Y$ 的子集$\{(a,f(a)): a\in X\}$ 特别地称为映射 f 的图象 (graph). 例如，恒等映射 1_X 的图象是 $X\times X$ 的对角集合 (diagonal) $\Delta_X=\{(a,a): a\in X\}$.

设 $f: X\to Y$ 为 X 到 Y 上的一一映射.对于各 $b\in Y$，使$f(a)=b$ 的 X 的元素 a 唯一确定.使 $b\in Y$ 对应这个 a 的映射称为 f 的逆映射 (inverse mapping)，以 f^{-1} 表示之. 设 X, Y, Z 为集合，$f: X\to Y$, $g: Y\to Z$ 为映射时，关于各 $a\in X$，若令$gf(a)=g(f(a))$，则得到映射$gf: X\to Z$. gf 称为 f 和 g 的合成映射(composition).

若 f 是 X 到 Y 上的一一映射，则 $f^{-1}f = 1_X$，$ff^{-1} = 1_Y$.

1.5 设 $\{A_\alpha: \alpha \in \Lambda\}$ 为以 Λ 为指标集的集族. 由 Λ 到 $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ 的映射 φ，它对于各 $\alpha \in \Lambda$，使 $\varphi\alpha \in A_\alpha$，这种映射全体的集合称为 $\{A_\alpha\}$ 的积集或直积，以 $\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ 表示之. 各集合 A_α 称为因子集合 (factor). 取 $\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ 的元素 φ 时，A_α 的元素 $\varphi\alpha$ 称为 φ 的 α 坐标 (coordinate). φ 的 α 坐标为 a_α 时，φ 以 $(a_\alpha: \alpha \in \Lambda)$ 或简单地以 (a_α) 表示之. $P_\alpha: \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \to A_\alpha$ 若定义为 $P_\alpha((a_\alpha)) = a_\alpha$，则得到直积 $\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ 到因子集合 A_α 上的映射. P_α 称为射影 (projection).

设 B 为集合，$\{A_\alpha: \alpha \in \Lambda\}$ 为集族. 关于各 $\alpha \in \Lambda$ 给与映射 $f_\alpha: B \to A_\alpha$ 时，映射 $f: B \to \prod\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ 关于各 b 由 $fb = (f_\alpha b: \alpha \in \Lambda)$ 确定. 对于各 $\alpha \in \Lambda$，合成映射 $P_\alpha f$ 等于 f_α. 映射 f 由映射集 $\{f_\alpha: \alpha \in \Lambda\}$ 唯一确定，反之 $\{f_\alpha: \alpha \in \Lambda\}$ 也由 f 唯一确定. 这个 f 以 (f_α) 表示，称为 $\{f_\alpha: \alpha \in \Lambda\}$ 的对角映射. 另外，给予集族 $\{B_\alpha: \alpha \in \Lambda\}$，当关于各 $\alpha \in \Lambda$ 给予映射 $g_\alpha: A_\alpha \to B_\alpha$ 时，满足 $g(a_\alpha) = (g_\alpha a_\alpha)$ 的映射 $g: \Pi A_\alpha \to \Pi B_\alpha$ 称为 g_α 的积，以 $\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} g_\alpha$ 表示之.

1.6 设 R 为集合 X 的元素间的关系. 则 R 是 $X \times X$ 的子集. 关于 X 的各元素 a，有 aRa 时，R 称为自反的 (reflexive). R 是自反的和 R 含有对角集 Δ_X 是等价的. 关于 X 的元素 a,b，若 aRb，则恒有 bRa 时，R 称为对称的 (symmetric). 与此相反，当 aRb 且 bRa 绝对不成立时 R 称为反对称的. 关于 X 的元素 a，b，c，当 aRb 且 bRc 时，若恒有 aRc，则 R 称为可迁的 (transitive). 自反的、对称的、可迁的关系称为等价关系 (equivalence relation).

设 R 为 X 的元素间的等价关系，关于 X 的元素 a，用 $R[a]$ 表示使 aRb 成立的 X 的元素 b 的集合，即 $R[a] = \{b: aRb\}$. X 的子集 A 关于某个 $a \in X$，有 $A = R[a]$ 时，称为 R 等价类或者简单地称为等价类 (equivalence class). 若 R 是等价关系，则所有等价类

的集合 $\mathscr{A}$ 构成并集为 X 的互不相交的集族．若使 X 的各元素 a 对应含 a 的等价类 $R[a]$，则得到 X 到等价类集合 $\mathscr{A}$ 上的映射 f．这时，关于 X 的元素 a，b，$f(a)=f(b)$ 和 aRb 是等价的．集合 $\mathscr{A}$ 称为 X 依 R 的商集（quotient set），以 X/R 表示之．映射 f: $X\to X/R$ 称为标准射影（canonical projection）．等价类 $R[a]$ 的一个元素称为它的代表元（representative）．

1.7 集合 X 的元素间的关系 $<$ 是可迁的时，称为序（order）或半序（partial order）．称 X 由 $<$ 附与序，X 称为有序集（ordered set）．有时将具有序关系 $<$ 的集合 X 以 $(X,<)$ 表示之．对于有序集 X 的元素 a，b，当 $a<b$ 时，称为 a 在 b 前，a 比 b 小或 b 在 a 后，b 比 a 大．关于 X 的元素 a，b，用 $a\leqslant b$ 意味着 $a<b$ 或 $a=b$．在本书中，$a\leqslant b$ 和 $a<b$ 区别使用．设 A 为 X 的子集，元素 $b\in X$，关于 A 的所有元素 a，均有 $a\leqslant b$ 时，b 称为 A 的上界（upper bound）．同样地，小于或等于 A 的各元素的 X 的元素称为 A 的下界（lower bound）．在 A 的上界中同时小于或等于 A 的任意上界的元素称为 A 的上确界（supremum），以 $\sup A$ 表示之．同样地，在 A 的下界中同时大于或等于 A 的任意下界的元素称为 A 的下确界（infimum），以 $\inf A$ 表示之．

设 $(X,<)$，$(Y,<)$ 为有序集．映射 f: $X\to Y$，若 $a<b$ 恒有 $f(a)\leqslant f(b)$ 时称 f 为保序（order preserving）的．有序集 X 的子集 A 的元素 a，b，若在 X 中 $a<b$ 时，在 A 中也确定 $a<b$，由此 A 也构成有序集．这时称 A 为 X 的有序子集．包含映射：$A\to X$ 显然是保序的．有序集 X 的元素 a，b，在 $a<b$，$a=b$，$a>b$ 之中必有一个成立时，称 X 为可比的．X 的元素 a 比所有和 a 可比的元素大或相等时，称 a 为 X 的极大元，比和 a 可比的所有元素小或相等时，称 a 为极小元．在集族 $\mathscr{A}=\{X_\alpha:\ \alpha\in\Lambda\}$ 中，若用 $X_\alpha\subsetneqq X_\beta$ 定义 $X_\alpha<X_\beta$ 时，$\mathscr{A}$ 是有序集．这时极大元是不能成为 $\mathscr{A}$ 的其它元素的真子集的元素．

有序集 X，对于任二元素，存在比它们大或相等的元素时，即对任意 a，$b\in X$，存在 $c\in X$，使 $a\leqslant c$ 且 $b\leqslant c$ 时，称 X 为有向集