计算机辅助几何图形设计

Computer Aided Geometric Design

关履泰　罗笑南　黎罗罗　毛明志　编著

CHEP
高等教育出版社
Springer
施普林格出版社

(京) 112 号

图书在版编目(CIP)数据

计算机辅助几何图形设计 / 关履泰等 编著 . - 北京：高等教育出版社；海德堡：施普林格出版社，1999.8

ISBN 7-04-006932-6

Ⅰ.计… Ⅱ.关… Ⅲ.几何图形设计-计算机辅助-教材 Ⅳ.TP391.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 25523 号

计算机辅助几何图形设计

关履泰　罗笑南　黎罗罗　毛明志　编著

出版发行	高等教育出版社　施普林格出版社		
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	**邮政编码**	100009
电　　话	010－64054588	**传　　真**	010－64014048
网　　址	http://www.hep.edu.cn		
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京民族印刷厂		
开　　本	880×1230　1/32	**版　　次**	1999 年 8 月第 1 版
印　　张	12.375	**印　　次**	1999 年 8 月第 1 次印刷
字　　数	360 000	**定　　价**	20.00 元

建设精品教材　　促进教学改革

当今世界，科学技术突飞猛进，国际竞争日趋激烈。未来的竞争，归根结底是人才的竞争。为此，党和国家提出“科教兴国”的发展战略，把希望寄托在人才培养和科技发展上。高等学校肩负培养高素质创造性人才的重任。面向新世纪，高等学校要通过深化改革，努力提高人才培养的数量和质量。

在高等教育的改革和发展中，教学改革是核心。教学改革包括人才培养模式、教学内容、课程体系、教学方法、教学手段和教材建设等丰富的内容。其中，教材是教学经验和学科理论知识融合的结果，是教学内容和教学方法的知识载体，是教师进行教学的基本工具，是学校教学和科研水平的重要体现。教材建设是高等学校的基础性工作。抓好教材建设，是提高教学质量、培养高素质人才的基础环节和重要保证。因此，中山大学十分重视教材建设。

“抓重点，出精品”是“九五”期间普通高等教育教材建设与改革工作的核心。中山大学为了进一步贯彻落实国家教育部教材建设“树立精品意识，实施精品战略”的要求，保证“211 工程”建设目标的实现，促进出版一批能突出反映学校学科优势、质量较高、影响较大、适应 21 世纪高等教育发展需要的精品教材，学校决定从“211 工程”建设经费中拨出专款，用于建设中山大学“211 工程”系列精品教材。其目的就是为了提高教材建设水平，使教材建设与教育改革和教学改革协调发展，更好地为教学服务，提高教学质量。

现在，第一批中山大学“211 工程”精品教材与读者见面了。我衷心感谢各位编著教师和评审专家的辛勤劳动，感谢高等教育出版社和科学出版社的鼎力支持，并对他们的劳动深表敬意。相信这批教材能

够促进学校的教学改革,为进一步提高教学质量和培养高素质的创造性人才作出应有的贡献。

王珣章

1998年9月于中山大学

前　　言

1992年，中山大学科学计算与计算机应用系决定把"计算几何"列为三年级本科生的指定选修课，并把这工作作为系教学改革的重点工作的一部份。这项工作得到中山大学教务处的重视和大力支持，把这门课程列入重点课程加以建设①。在重视基础教学的同时，提高同学们应用开发的能力，在这门课程中尽量用现代化的手段，搞好教学改革。舍弃或精简与课程主要内容关系不大的东西，增加与实际应用课题联系比较直接的内容，把科学问题归结成用计算手段处理的数学问题，设法开出一条体现自己风格与意图的路子，适应社会主义市场经济建设的需要。教材的初稿由关履泰、黎罗罗完成。黎罗罗主要负责有理曲线一章。几次试教之后，根据罗笑南积累的丰富的材料，特别是他在服装裁剪计算机辅助设计方面积累的有关素材，充实了各章的内容，各章列出的程序基本上来自他的工作，他撰写了多元B形式中的曲面一章及第四章第九节。毛明志为第七章及第九章第三节提供了部分材料。本书在写作中还得到一些当时的研究生与本科生的协助，他们有：聂卉，第九章第一节；张方、冯大羽，第三章第六节；逯峰，第九章第四节；云永先，第九章第二节。

作者感谢李岳生教授长期对本课程建设的关心、支持和帮助，我们从他长期领导的计算数学讨论班中得到许多启示和教益。作者感谢徐利治教授、王仁宏教授的指导。作者还十分感谢北方工业大学齐东旭教授、吉林大学周蕴时教授对本书提出的许多宝贵意见和建议。感谢黄友谦教授的支持和帮助。有些地方得益于他编的教材。

本课程在教学中强调结合理论研究成果、丰富教学内容；结合开发

---

① 本书在写作中得到国家自然科学基金，国家教委博士点基金和香港中山大学高等学术研究中心基金会的资助。

软件工作，增强动手能力；结合教学实习安排，巩固教学成果。充分利用多媒体教学，运用制作的教学辅助软件，让学生在实验室中解决应用问题。我们把教的重点放在前六章，后三章以讲座与讨论班的形式进行。利用录像带与投影仪，加强效果并加快速度。

由于计算机软、硬件的更新速度很快，开发的手段亦日益增多，在国内也很容易找到参考资料，在本书中不再罗列，仅在讲授中随时注意展开某些必要的讨论，并注意作业的评改与交流。

目　录

第一章 引 言

§1 计算机辅助几何图形设计

CAGD——计算机辅助几何图形设计(Computer Aided Geometric Design)的简写,国内经常把它简称为计算几何,出版过苏步青、刘鼎元的著名专著[1]与孙家昶的著名专著[2].实际上这门学科研究的是在几何曲线与曲面用计算机处理时,它们的逼近与再生.

许多产品在制作之前要进行几何曲线与曲面的设计,例如汽车车壳设计,船体设计与放样,飞机机身、机舱及机翼的设计,甚至刀片、刀架和鞋模等外型设计,以及服装设计,都要考虑有关曲线与曲面的计算机处理,对有关曲线与曲面的逼近和再生,及在原有基础上作局部修改的方法和效果.在有先进的计算机之前,这些设计问题是用几何学的方法与逼近论的方法去做的.把曲面用一些曲线来表示,而这些曲线通常是由均匀分布的平行于坐标平面截曲面得出的截线,再加上某些具有特征性质的截线.这些信息足可供制作模板、木模、冲压用模具和铸造用模具.

50年代后期,数控机床开始涌现,制模与生产更是可以由计算机编程序进行.为了充分发挥其作用,需要解决好一个问题:怎样设计好一个"数学模型",把存在的曲面翻译成计算机易于处理的格式.起初,得把曲面数字化,即把曲面分成一大堆点坐标;现在这工作可以由计算机进行,这也是计算机辅助设计(CAD)工作之一.Coons由曲面形式开始,用若干个小的曲面片拼接,适当选择它们的方程,使联接有一定光滑性,他用布尔和逼近的方法,得出的曲面称为Coons曲面.Bézier用选择控制点控制曲线形状,构造Bézier曲线.

在自然科学中还有不少问题也会用到计算几何,很普通的一个问题就如怎样根据测量得出的一组数据,找一个合适的曲面拟合它们.地理中地形图的绘制,气象中温度、气压等曲线、曲面都可以认为是这类问题.

Bézier(1972), Forrest(1971)和 Riesenfeld(1973)巧妙地处理了依据样条曲线和曲面的几何模型,把这学科分支称计算几何(Computational Geometry),与我们本书讨论的中心内容是一致的[3].

值得注意的是还有好些学科分支用“计算几何”这个名字.在 F.P.Preparata 与 M.I.Shamos 著的“计算几何导论”(有科学出版社 1990 年出的中译本),讨论几何问题的计算机方法,他们注意到好些几何问题,如欧几里德巡回售货员问题,最小生成树问题,隐藏线问题和线性规划问题等,需要辨别出有用的概念,建立有助于有效计算的性质,把几何的传统学科改造成它的计算实体.这门学科命名为计算几何,最早出现在 M.I Shamos 1975 年的文章里.

1969 年 Minsky 和 Papert 在一本标题为“感知器——计算几何”的书中,处理了识别某些几何性质(例如凸性)的谓词的复杂性.他们研究工作的目的是陈述用简单回路构成的大网膜来实现模式识别任务的可能性.他们的理论是独立的,与我们讨论的内容完全不同.

计算几何与计算机图形学是密切联系着的,图形学软件和几何编辑程序确实是计算几何给出的许多算法的目标,不过后者更强调图形的实现,包括常用图形输入输出设备的讨论以及计算机图形系统的组成.

计算几何这个术语有些人听起来象是用计算机证明几何定理,这是一种误解.几何定理的机器证明是一个重要而又十分吸引人的课题,不过从来没有用过计算几何这个名称.

1971 年英国的 A.R.Forrest 首次提出计算几何的定义:计算几何就是对几何外形的信息的计算机表示、分析和综合.

所谓几何外形信息,包括诸如平面或空间曲线和曲面的型值点,特

征多边形的顶点和型值点处的导数值等.通过这些信息,可以建立多种多样几何外形的数学模型,并通过电子计算机进行插值计算,以求得任意中间点的几何信息,这就是所谓计算机表示,然后对这些信息进行分析和综合.正如著名数学家苏步青教授指出,计算几何是一门由代数几何、微分几何、函数逼近论、计算数学,特别是数控技术等相互结合而形成的边缘学科.这样计算几何就是一门特别强调计算机作用、涉及领域非常广阔的学科.国内有学者认为计算几何学与计算机辅助几何设计是关系密切的两门学科,前者偏重学科,后者侧重工程.不过更多人认为计算几何只是计算机辅助几何设计的简称.

近年,由于分形(Fractal)与小波(Wavelet)的发展,对计算几何影响很大.应用分形进行计算机辅助分析过程的无限嵌套的几何结构,产生一幅幅变化莫测的、奇境般的图像.应用小波进行大规模图形数据的压缩,选择理想的特征多边形的顶点.加上在近代科学进展中,分形、小波与分歧(Bifuration)、混沌(Chaos)交织在一起,特别为众多物理学家所关注.相关课题会适合研究生学习需要,而对本科生来说,这些内容只好略去.

本课程与微分几何、函数逼近论、计算数学联系密切,我们在有关部分会作深入浅出地介绍,不打算单独开出章节,读者只要有数学分析、代数与解析几何的基础知识,即可掌握本课程内容.本课程考虑充分利用计算机进行辅助教学,提供有关算法软件包,并提供检测题软件包.

§2 局部坐标与几何信息的计算机表示

计算几何研究的主要对象是平面或空间的曲线和曲面,自然要考虑用合适的方法表示平面或空间中的点与点运动的轨迹.

从中学开始,我们就习惯建立平面或空间的直角坐标系,用点在这直角坐标系中的坐标来表示点,用动点运动要满足的关系式来表示曲

线或曲面.

例如,到一固定点距离等于 a 的平面上的点轨迹,在选择这固定点为坐标原点,建立平面直角坐标系后,设动点为 $M(x,y)$,由点间距离公式得出

$$\sqrt{x^2+y^2}=a$$

从而得到平面上圆的方程: $x^2+y^2=a^2$

但是这式子不方便计算几何的计算机表示,因为函数的单值性,计算中要把圆分成上半圆周: $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 与下半圆周: $y=-\sqrt{a^2-x^2}$

在计算几何中经常采用向量参数方程.

一、向量参数方程

1. 曲线的参数表示

平面 R^2 中的点可以表示为

$$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

空间 R^3 中的点可以记为

$$\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

它们是二维空间或者三维空间中的点的向量表示.一个动点的轨迹可以用位置向量 $\boldsymbol{u}$ 连续不断的各瞬间值来描述,这个向量随时间 t 的变化关系用函数 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{r}(t)$表示,即向量 $\boldsymbol{u}$ 是时间的一个函数.如果 $\boldsymbol{u}$ 是平面向量,这个函数代表平面曲线,如果 $\boldsymbol{u}$ 是空间向量,它表示空间曲线,用直角坐标表示就是

$$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}\qquad 或 \qquad \begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$$

以 t 为参变量的曲线参数方程，$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{r}(t)$亦称为曲线的向量参数方程.

例 1 试用向量参数方程表示圆

$$x^2+y^2=a^2. \tag{1.1}$$

解 1) 设圆 $x^2+y^2=a^2$ 上的动点为 $\boldsymbol{u}=(x,y)$，向量 $\boldsymbol{u}$ 与 x 轴正向夹角为 t，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$

令 $x=a\cos t$ 代入(1.1)得出

$y=a\sin t$

记 x 方向单位向量为 $\boldsymbol{i}(1,0)$，y 方向单位向量为 $\boldsymbol{j}(0,1)$，得出圆的向量参数方程

$$\boldsymbol{u}=(a\cos t)\boldsymbol{i}+(a\sin t)\boldsymbol{j} \qquad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

2) 设动点为 $\boldsymbol{u}(x,y)$

令 $x=\dfrac{a(1-v^2)}{1+v^2}$ 代入(1.1)得

$$y^2=a^2\left(1-\frac{(1-v^2)^2}{(1+v^2)^2}\right)=a^2\left(\frac{4v^2}{(1+v^2)^2}\right)$$

$$y=a\cdot\frac{2v}{1+v^2} \qquad -\infty<v<+\infty$$

设 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 分别为 x，y 方向的单位向量，得出圆的向量参数方程

$$\boldsymbol{u}=\frac{a(1-v^2)}{(1+v^2)}\boldsymbol{i}+\frac{2av}{1+v^2}\boldsymbol{j} \qquad -\infty<v<+\infty$$

例 2 试用向量参数方程表示空间直线

$\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$，并说明参数的几何意义.

解 设直线上动点为 $\boldsymbol{u}=(x,y,z)$，记 $\boldsymbol{u}_0=(x_0,y_0,z_0)$，$\boldsymbol{v}=(a,b,c)$

令 $\dfrac{x-x_0}{a}=t$， 由方程可得

$x=x_0+at$

$y=y_0+bt$

$z=z_0+ct$

从而向量参数方程为

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{v}t \qquad -\infty < t < +\infty$$

由此式得 $\quad |t| = \dfrac{|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_0|}{|\boldsymbol{v}|}$

所以参数 t 的绝对值等于 $\boldsymbol{u}_0$ 到 $\boldsymbol{u}$ 的距离除以 $\boldsymbol{v}$ 的长度.

例 3 讨论参数方程 $\boldsymbol{r} = a\cos u\boldsymbol{i} + a\sin u\boldsymbol{j} + bu\boldsymbol{k}$.

解 a,b 为常数,u 为参数,如图 1 - 1 所示.

把曲线垂直投影到 OXY 平面上则投影为:

$$\overrightarrow{OC} = a\cos u\boldsymbol{i} + a\sin u\boldsymbol{j}$$

这是一个圆.

$\overrightarrow{OA} = bu\boldsymbol{k}$ 表示动点 $\boldsymbol{r}(u)$ 以 b 的速度等速地沿 z 轴方向运动.

所以这条空间曲线是一条圆柱螺旋线.

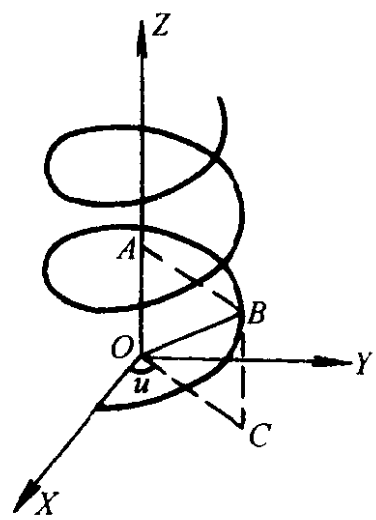

图 1 - 1

2. 曲面的参数表示

设想在三维空间中有一条运动着的可变曲线 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u)$(如图 1 - 2),可以发现曲线的形状及其随时间而连续变化的位置形成一个曲面 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,t)$,其中每一点可以用曲线经过该点的时间 t 以及该点在此曲线上的参数 u 来区分. 换用习惯用的变换 u,v 表示,则二个变量的任意矢量函数 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u,v)$ 可以表示曲面,写成其相应分量的函数为

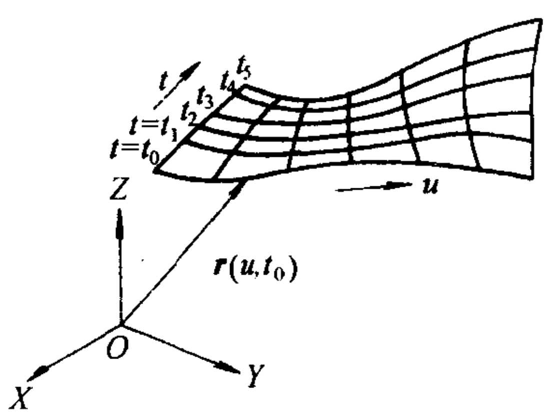

图 1 - 2

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

一般总用 u,v 的单值函数表示曲面. 参数 u,v 通常称为曲面上点

的曲线坐标. $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$ 称为曲面的向量参数方程.

如果 u,v 中有一个固定不变,就只有一个参变量,这时的矢量方程表示曲面上的参数曲线,例如 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u_0,v)$ 与 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v_0)$ 常把前者叫 v 曲线,后者叫 u 曲线. 给定常数列 $\{u_n\}$ 与 $\{v_n\}$,得出两族参数曲线 $\boldsymbol{r}(u_n,v)$ 与 $\boldsymbol{r}(u,v_n)$,称为坐标曲线,由这两族曲线组成曲面上的坐标网.

例4 求通过点 p_0 并包含直线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+u\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+v\boldsymbol{b}$ 的曲面参数方程,其中 p_0 的向径为 $\boldsymbol{r}_0$.

解 原点为 O,则 $\overrightarrow{op_0}=\boldsymbol{r}_0$,直线 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+v\boldsymbol{b}$ 看成是 $u=u_0=0$ 时的 v 曲线,同理讨论 u 曲线,例中的曲面过相交于 p_0 的两条直线是一个平面,它的方程是

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)=\boldsymbol{r}_0+u\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{b}$$

例5 用参数 θ 和 φ 表示中心在 O,半径为 a 的球面方程.

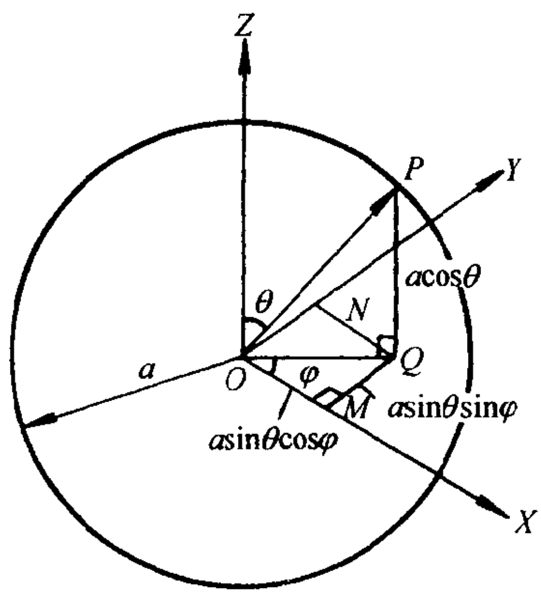

图 1 - 3

解 如图1-3所示,球面上动点为 P, $\overrightarrow{OP}$ 在平面 OXY 上投影为 $\overrightarrow{OQ}$, z 轴与 $\overrightarrow{OP}$ 夹角为 θ, x 轴与 $\overrightarrow{OQ}$ 夹角为 φ

在直角三角形 OPQ 中, $\angle OPQ=\theta$,从而

$$|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{OP}|\cos\theta=a\cos\theta$$

$$|\overrightarrow{OQ}|=|\overrightarrow{OP}|\sin\theta=a\sin\theta$$

$\overrightarrow{OQ}$ 在 x 与 y 轴的投影 OM 与 ON 分别有

$$|\overrightarrow{OM}|=|\overrightarrow{OQ}|\cos\varphi=a\sin\theta\cos\varphi \text{ 与}$$

$$|\overrightarrow{ON}|=|\overrightarrow{OQ}|\sin\varphi=a\sin\theta\sin\varphi$$

从而

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(\theta,\varphi)=\overrightarrow{OP}=a\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{i}+a\sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{j}+a\cos\theta\boldsymbol{k}$$

例6 旋转曲面可以看成由一平面曲线绕其对称轴线旋转而成.

设对称轴为 z 轴,该曲面与 OXZ 平面的交线为$\boldsymbol{r}_c(u)=p(u)\boldsymbol{i}+q(u)\boldsymbol{k}$,试求旋转曲面的向量参数方程,并用它具体写出旋转椭球面的方程.

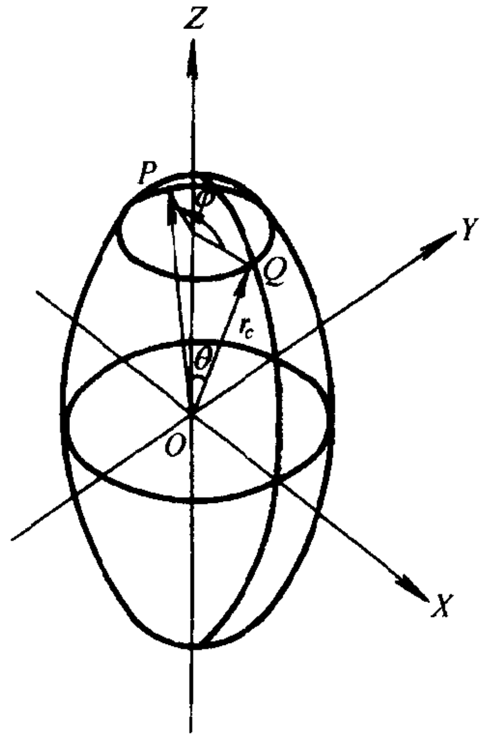

图 1-4

解 设动点 $P(x,y,z)$ 由 $\boldsymbol{r}_c(u)$ 上的点 Q 绕 z 轴旋转一个 φ 角得出(如图 1-4所示),P 点在 OXY 平面上投影为 A, $\overrightarrow{OA}$ 在 x 轴 y 轴投影为 $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, Q 点在 x 轴 y 轴投影为 M 与 N,(因位置关系 A, B, C, M, N 均未画出)

由设可知 $\overrightarrow{OM}=p(u)\boldsymbol{i}$, $\overrightarrow{ON}=q(u)\boldsymbol{k}=\overrightarrow{AP}$, $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OM}|$, 从而

$$y=|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{OA}|\sin\varphi=p(u)\sin\varphi$$
$$x=|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{OA}|\cos\varphi=p(u)\cos\varphi$$
$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,\varphi)=\overrightarrow{OP}=p(u)\cos\varphi\boldsymbol{i}+p(u)\sin\varphi\boldsymbol{j}+q(u)\boldsymbol{k}$$

由于椭圆截线为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$(在 OXZ 平面),写成参数形式为

$$\boldsymbol{r}_c(\theta)=a\sin\theta\boldsymbol{i}+b\cos\theta\boldsymbol{k}$$

于是得椭圆旋转而成的旋转椭球面参数方程为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}&=\boldsymbol{r}(\theta,\varphi)\\&=a\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{i}+a\sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{j}+b\cos\theta\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

二、局部坐标

在CAGD中,通常将曲线和曲面分割成较小的段和片,分别进行处理.曲线由参数区域上的节点 $u_0<u_1<\cdots<u_n$ 分割为若干段.曲面由参数区域上的坐标曲线分割为若干个四边形片,相应节点横纵坐标为 $u_0<u_1<\cdots<u_p$, $v_0<v_1<\cdots<v_q$.或者用三角形剖分方法,对应于参数区域三角形的若干三角形片.