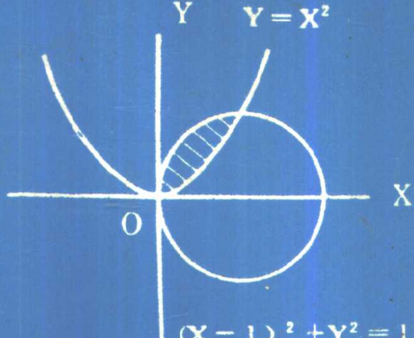
几何学辞典

（解析几何分册）



科学技术文献出版社重庆分社

几 何 学 辞 典

（解析几何分册）

〔日〕笹部贞市郎　著

王家序、阴正锡、王友芳
陆孝齐、姚裕贤　　译

科学技术文献出版社重庆分社

几何学辞典（解析几何分册）

科学技术文献出版社重庆分社　出版
（重庆市市中区胜利路91号）
科学技术文献出版社重庆分社印刷厂　印刷

开本：787×1092毫米1/32　印张：10.5　字数：25万
1980年8月第一版　1980年8月第一次印刷
印数：17,500　定价：1.10元

统一书号：17176·207

（内部发行）

前　　言

本书译自日本笹部贞市郎著“几何学辞典”（1978年6月版）解析几何部分，共分十章，计452道题例，选材新颖，内容丰富，解题简练，方法灵活，富有启发性和指导意义，是中等学校和中等专业学校师生必备的参考书，也可供高等学校师生和工程技术人员参考。

本书由重庆大学王家序、阴正锡、王友方、陆孝齐、姚裕贤等同志翻译。由于时间仓促、水平有限，错误之处在所难免，希读者指正。

译　者

目　　录

第一章　直线……………………………………………………(1)

第二章　圆……………………………………………………(58)

第三章　抛物线………………………………………………(90)

第四章　椭圆…………………………………………………(134)

第五章　双曲线………………………………………………(176)

第六章　座标轴的平移和旋转………………………………(223)

第七章　参数方程……………………………………………(236)

第八章　极座标方程…………………………………………(242)

第九章　空间座标……………………………………………(255)

第十章　复数和矢量在初等几何中的应用…………………(271)

附录　重要定理和公式集……………………………………(313)

第 8 编 解析几何

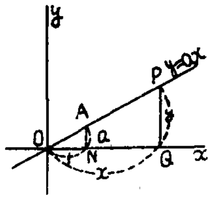
第一章 直 线

1. 直线的性质

3475 证明函数 $y=ax$ 的图形是一条直线，并证明函数 $y=ax+b$的图形与直线$y=ax$平行，交y轴于点$(0,b)$。

解：对于$y=ax$，令$x=0$，得：$y=0$；再令$x=1$，得$y=a$。

因此，$y=ax$的图形通过原点$O(0,0)$和点$A(1,a)$。现在，从连接O,A的直线上的任意一点P，向x轴引垂线PQ。



设 $OQ=x$，$QP=y$

$\because$ $QP/OQ=NA/ON$

(AN是从点A向x轴引的垂线)

即 $\dfrac{y}{x}=\dfrac{a}{1}$ $\therefore$ $y=ax$

$\therefore$ 直线OA上点的坐标都满足$y=ax$；又因为，若设直线OA以外的任意一点的坐标为：(x',y')，显然，$\dfrac{y'}{x'}\neq\dfrac{a}{1}$，不满足$y=ax$。由此可得：

(i) 直线OA上的所有点的座标满足$y=ax$，

(ii) 不在直线OA上的任何点的座标都不满足$y=ax$。

因此，$y=ax$的图形就是直线OA。其次，对于

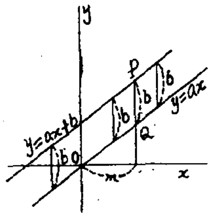
$$y=ax \qquad ①$$

$$y=ax+b \qquad ②$$

令$x=m$，设①、②的y值分别是y'，y''则

$$y'=am \qquad y''=am+b$$

$\therefore \quad y'' - y' = b$



现在假定点P，Q的座标分别为(m, y'')、(m, y')，则直线PQ垂直于x轴（因此，与y轴平行），而且$PQ = b$。这个值b与变量x无关。即对于x的同一个值，$y'' - y'$等于定值b，因此，②的图形就是把直线$y = ax$沿y轴方向平移b的结果。当$b > 0$时，把直线$y = ax$向上平移b。当$b < 0$时，把直线向下平移$|b|$，即得$y = ax + b$的图形。

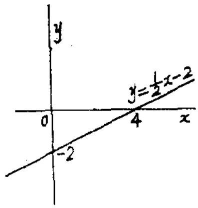
根据以上分析可知：

（i） $y = ax$的图形是过原点的直线，根据a值，可以确定该直线与x轴夹角的大小。因此，a能够定出直线的方向，我们把它叫做直线$y = ax$的斜率或方向数。

（ii） $y = ax + b$的图形与直线$y = ax$平行，与y轴交于点$(0, b)$。我们把b叫做直线$y = ax + b$在y轴上的截距。

3476 作出下面函数的图形，并求出直线的斜率和在y轴上的截距。

（1） $y = \dfrac{1}{2}x - 2$ （2） $3x + 2y = 6$



解：（1）$\because \quad y = \dfrac{1}{2}x - 2$是二元一次方程，

$\therefore$ 它的图形是一条直线。

又$\because$ $x = 0$时，$y = -2$；

$y = 0$时，$x = 4$

$\therefore$ 这条直线过$(0, -2)$、$(4, 0)$两点。

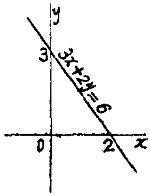
又$\because$ $y = \dfrac{1}{2}x - 2$中x的系数是$\frac{1}{2}$，

∴　直线的斜率是$\frac{1}{2}$。

如果令$x=0$，则$y=-2$

∴　y轴上的截距是-2。

（2）　$3x+2y=6$是过$(2,0)$、$(0,3)$两点的直线。



又由$2y=-3x+6$　　得

$$y=-\frac{3}{2}x+3$$

∴　这条直线的斜率是$-\frac{3}{2}$，y轴上截距是3。

3477　求满足以下条件的直线方程。

（1）　斜率是$-\frac{2}{3}$，过点$(3,-1)$。

（2）　与x轴的正方向成$30°$角，过点$(0,-2)$。

解：（1）　设所求直线方程为$y=ax+b$

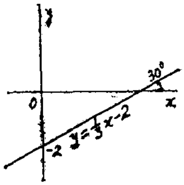
∵　斜率a是$-\frac{2}{3}$

∴　这条直线是$y=-\frac{2}{3}x+b$

又∵　直线过点$(3,-1)$，

把$x=3$，$y=-1$代入上式，得：

$$-1=-\frac{2}{3}\times3+b,\ 故b=1$$



∴　所求方程是$y=-\frac{2}{3}x+1$

（2）∵　$\mathrm{tg}\,30°=\frac{1}{\sqrt{3}}$

∴　这条直线的斜率是$\frac{1}{\sqrt{3}}$，由此，所求直线的方程是 $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x+b$。

又∵ 此直线过点(0, -2)　　∴ $b=-2$

故所求直线方程是$y=\frac{1}{\sqrt{3}}x-2$。

3478　试写出过定点(x_1, y_1)、斜率为a的直线方程。

解： 设所求的直线方程为$y=ax+b$，因为此直线过点(x_1, y_1)，所以在上式中，若　$y=y_1$，$x=x_1$则$y_1=ax_1+b$。

因此，$b=y_1-ax_1$　　把此式代入$y=ax+b$，得

$$y=ax+(y_1-ax_1)$$

即　　$y-y_1=a(x-x_1)$

3479　试求过两定点$A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$的直线方程。

解： 由上题结果可知，过点$A(x_1, y_1)$、斜率为α的直线方程为$y-y_1=\alpha(x-x_1)$，若此直线过点$B(x_2, y_2)$，则可把$x=x_2$，$y=y_2$代入此方程得

$$y_2-y_1=\alpha(x_2-x_1)$$

$$\therefore\quad \alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

把此式代入原方程得

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

即　$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$。

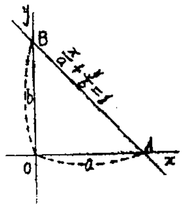
3480　求过两点$(-3, 0)$、$(5, -4)$的直线方程。

解： 由上题结果可得：

$$\frac{y-0}{-4-0}=\frac{x-(-3)}{5-(-3)}\qquad \therefore\quad x+2y+3=0$$

3481　试求出x轴上的截距为a，y轴上的截距是b的直线方程。

解： 设所求直线与x轴、y轴分别交于A、B两点，并且$OA=a$，$OB=b$，由于直线过两点$A(a,\ 0)$、$B(0,\ b)$，则可根据3479题结果得



$$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a}$$

即 $$\frac{y}{b}=\frac{x}{-a}+1$$

$\therefore$ $$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

3482 求在x轴、y轴上的截距分别是3、-2的直线方程。

解： 由前题可得：

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1$$

即 $$y=\frac{2}{3}x-2$$

3483 求过一定点$(1,\ -2)$、且与直线$2x-y=0$夹角为45°的直线方程。

解： 直线$2x-y=0$的斜率是2，设所求直线的斜率是m，根据3542题可得：

$$\text{tg}\,45^\circ=\pm\frac{m-2}{1+2m} \qquad \therefore\quad 1=\pm\frac{m-2}{1+2m}$$

$\therefore$ $m=-3$ 及 $m=\frac{1}{3}$

因此所求直线方程是：

$$y+2=-3(x-1),\quad \text{即}\quad 3x+y=1$$

及 $$y+2=\frac{1}{3}(x-1),\quad \text{即}\quad x-3y=7$$

3484 有A，B，C三点，设其座标分别是：(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3)。求这三点在一直线上的条件。

解：连结(x_1, y_1)，(x_2, y_2)的直线方程为：

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

当(x_3, y_3)点满足这直线方程时，以x_3，y_3代这方程中的x，y得：

$$y_3-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_3-x_1)$$

$\therefore \quad (y_3-y_1)(x_2-x_1)=(y_2-y_1)(x_3-x_1)$

或 $\quad x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)=0$

又，$y_1(x_2-x_3)+y_2(x_3-x_1)+y_3(x_1-x_2)=0$

以上三方程均为所要求的条件。

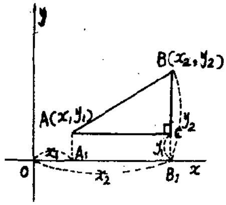
注　用行列式表示为：

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

3485 证明两点$A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$的距离为：

$$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

解：由A、B两点分别向x轴引垂线AA_1和BB_1，如果由A点引垂直于BB_1的直线AC，有$OA_1=x_1$，$OB_1=x_2$，$B_1C=y_1$，$B_1B=y_2$。于是，$AC=A_1B_1=x_2-x_1$，$BC=y_2-y_1$，在直角三角形ABC中，由勾股定理，得：



$$AB^2=AC^2+CB^2$$

$\therefore \quad AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$

$\therefore \quad AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

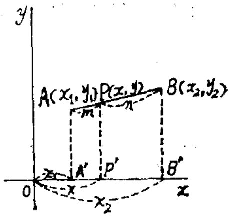
3486 推导出把连接两点$A(x_1\ y_1)$、$B(x_2,y_2)$的线段分为$m:n$的内分点的座标公式及外分点的座标公式，若再把这两式归纳成一个公式又有什么好处？

解： 从点A、B向x轴引垂线，其垂足分别为A'、B'，则$OA'=x_1$，$OB'=x_2$。

现设将AB内分为$m:n$的点P的座标为$P(x,y)$，并由P点向x轴引垂线PP'，有$OP'=x$。

由于AA'，PP'，BB'互相平行，

则$A'P':P'B'=AP:PB=m:n$



$\therefore\quad x-x_1:x_2-x=m:n$

$\therefore\quad n(x-x_1)=m(x_2-x)$

$\therefore\quad (m+n)x=mx_2+nx_1$

$$\therefore\quad x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}$$

同样地，由A，B，P各点分别引y轴的垂线得：

$$y=\frac{my_2+ny_1}{m+n}$$

下面，讨论P点将AB外分为$m:n$的情况，

$\because\quad AP:BP=m:n$，$AP:BP=A'P':B'P'$

$\therefore\quad A'P':B'P'=m:n$。

将$A'P'=x-x_1$，$B'P'=x-x_2$，代入上式得：

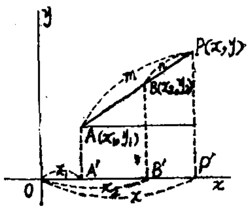
$x-x_1:x-x_2=m:n$，$n(x-x_1)=m(x-x_2)$，

$(m-n)x=mx_2-nx_1$，

$$\therefore\quad x=\frac{mx_2-nx_1}{m-n}$$

同理可得：

$$y=\frac{my_2-ny_1}{m-n}$$



∴ 内外分点座标公式可写为：

$$x=\frac{mx_2\pm nx_1}{m\pm n}$$

$$y=\frac{my_2\pm ny_1}{m\pm n}$$

即，内分点的座标公式中n取正号，外分点的座标公式中n取负号，这样只需记住内分点的座标公式就行了。

3487 求将连接两点$A(-3, 0)$，$B(2, 0)$的线段分为3:1的内、外分点的座标，并求AB的中点座标。

解： 内分点的x座标：$x=\frac{3\times2+1\times(-3)}{3+1}=\frac{3}{4}$

外分点的x座标：$x=\frac{3\times2-1\times(-3)}{3-1}=\frac{9}{2}$

中点的x座标：$\frac{1}{2}(-3+2)=-\frac{1}{2}$

答： $(\frac{3}{4}, 0)$，$(\frac{9}{2}, 0)$，$(-\frac{1}{2}, 0)$。

3488 已知 $2x^2+9xy+10y^2-13x-30y+20=0$ 的图形表示两条直线。

（1） 求两直线的方程；

（2） 求由两直线和x轴，y轴所包围的图形的面积。

解：（1） 对y，将已知方程整理：

$$10y^2+(9x-30)y+2x^2-13x+20=0 \qquad ①$$

由①解出y：$y=\frac{-9x+30\pm(x-10)}{20}$

即 $y=\frac{-2x+5}{5}$，$y=\frac{-x+4}{2}$

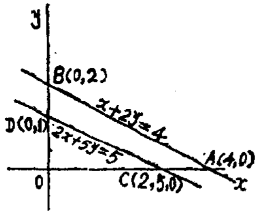
则 $2x+5y=5$，$x+2y=4$为所求两直线方程。

（2） 设所求的面积为S，则

$$S=\triangle OAB-\triangle OCD$$

$$=\frac{1}{2}\times4\times2-\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times1$$

$$=4-\frac{5}{4}=\frac{11}{4}$$



〔注〕 在用①表示两直线时，①的判别式常用x的完全平方式。

3489 下面两个方程表示两条直线，试求该两直线。

(1) $(x-y)^2-6(x-y)+8=0$

(2) $(2x-3y)^2-6x+9y-10=0$

解：(1) 该式可因式分解为：

$$(x-y-2)(x-y-4)=0$$

∴ $x-y-2=0$，或$x-y-4=0$

因此，两直线为：$y=x-2$

$$y=x-4$$

(2) 将已知方程 $(2x-3y)^2-3(2x-3y)-10=0$

分解因式得：$(2x-3y-5)(2x-3y+2)=0$

于是得两直线：$2x-3y-5=0$

$$2x-3y+2=0$$

3490 为了将关于x、y的二次方程式$f(x, y)=x^2-xy+3x-12y^2+\square y-10=0$的图形表示成二直线，应在□填入什么数值？

解：设在□填入k值，将$f(x, y)=0$整理为x的二次方程。

$$x^2-(y-3)x-(12y^2-ky+10)=0 \quad ①$$

设该方程的判别式为D，将①左边分解为关于x，y的两个一次因式，则D必须是完全平方式。

$$D=(y-3)^2+4(12y^2-ky+10)$$
$$=49y^2-2(3+2k)y+49 \qquad ②$$

设$D'=(3+2k)^2-49^2$，为使D是完全平方式，必须$D'=0$

解　$(3+2k)^2-49^2=0$得：

$k_1=23$，或$k_2=-26$。

（ⅰ）取$k=23$，则

$$f(x,y)=x^2-xy+3x-12y^2+23y-10$$
$$=(x+3y-2)(x-4y+5),$$

故$f(x,y)=0$时，两直线为：

$x+3y-2=0$

$x-4y+5=0$

（ⅱ）取$k=-26$，则

$$f(x,y)=x^2-xy+3x-12y^2-26y-10$$
$$=x^2-(y-3)x-(12y^2+26y+10)$$
$$=(x-4y-2)(x+3y+5)$$

故$f(x,y)=0$时，两直线为

$x-4y-2=0$

$x+3y+5=0$

答：　$k_1=23$或$k_2=-26$

3491　a为什么值时，方程$x^2+2xy+ay^2+3x+9y=0$表示两直线，并求出两直线的方程。

解：　$x^2+2xy+ay^2+3x+9y=0$

$\therefore$　$x^2+(2y+3)x+ay^2+9y=0$

$$\therefore\quad x=\frac{-(2y+3)\pm\sqrt{(2y+3)^2-4(ay^2+9y)}}{2}$$

为了使给出的方程表示两直线，上式根号内必须是完全平方式。

即　$(2y+3)^2-4(ay^2+9y)$

$$=4y^2+12y+9-4ay^2-36y$$

$$=4(1-a)y^2-24y+9$$

因为这是完全平方式

$$12^2-36(1-a)=0 \qquad \therefore \quad a=-3$$

$$\therefore \quad x=\frac{-(2y+3)\pm\sqrt{16y^2-24y+9}}{2}$$

$$=\frac{-(2y+3)\pm(4y-3)}{2}$$

故　$x=y-3$，$x=-3y$

即所求的两直线方程为：

$$x-y+3=0$$

$$x+3y=0$$

3492　作出二次方程$6x^2-5xy+y^2-8x+2y-8=0$的图形。

解： 将方程按x进行整理得：

$$6x^2-(5y+8)x+(y^2+2y-8)=0 \qquad ①$$

$$\therefore \quad 6x^2-(5y+8)x+(y+4)(y-2)=0$$

$$\begin{array}{lll} 3 & \searrow\nearrow & -(y-2)=-(2y-4) \\ 2 & \nearrow\searrow & -(y+4)=\underline{-(3y+12)} \\ & & \qquad\quad -(5y+8) \end{array}$$

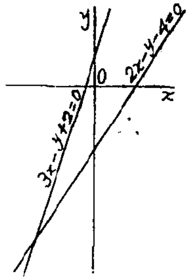
故①式变为：

$$\{3x-(y-2)\}\{2x-(y+4)\}=0$$

这就表示为两直线

$$3x-y+2=0$$

$$2x-y-4=0$$



因此，所求图形如右图所示。

〔注〕　用求根公式

从①式可求得x：

$$x=\frac{5y+8\pm(y+16)}{12}$$

$$\therefore \quad x=\frac{6y+24}{12}=\frac{y+4}{2} \qquad x=\frac{4y-8}{12}=\frac{y-2}{3}$$

根据上式可得：$(2x-y-4)(3x-y+2)=0$

3493　关于x,y的二次式

$$f(x,y)=x^2-xy-6y^2+9x+ky+20$$

回答下面的问题：

（1）为了将函数 $f(x,y)$ 分解成关于 x,y 的两个二元一次因式，k应取何值？

（2）将（1）求得的k的大值代入 $f(x,y)$ 时，作出满足 $f(x,y)>0$ 的点 (x,y) 的存在范围的图形。

解：　（1）将$f(x,y)$ 按x进行整理，则有：

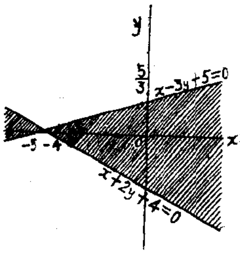
$$f(x,y)=x^2+(9-y)x+(-6y^2+ky+20)$$

为了将上式分解成关于x,y的两个一次式的积，令 $f(x,y)=0$，则该方程的判别式D必须是完全平方式。

$$\therefore \quad D=(9-y)^2-4(-6y^2+ky+20)$$

$$=25y^2-2(9+2k)y+1=\text{完全平方式。}$$

为使上式成立，方程 $D=0$ 的判别式 D' 必须为0



$$\therefore \quad D'=[2(9+2k)]^2-4\times25=0$$

$$\therefore \quad (9+2k)^2-25=0$$

$$\therefore \quad 9+2k=\pm5$$

$$\therefore \quad k_1=-7,\ k_2=-2$$

（2）将$k=-2$代入$f(x,y)$，则$f(x,y)$被分解为$x-3y+5$ 和$x+2y+4$ 的积，为使$f(x,y)>0$，必须是：