

齿根过渡曲线与齿根应力

吴继泽 王 统 编著

国防工业出版社

413

内 容 简 介

本书介绍了圆柱齿轮的齿根过渡曲线形成原理及其局部最大应力的计算方法。对计算齿根应力的平截面法、折截面法、映射函数法、有限元法及斜截面法的有关原理、公式和图表皆作了详尽地讨论。本书对齿根应力计算与设计齿轮刀具具有一定指导作用。

本书适用于对渐开线齿轮已具有一定基础知识的读者，可作为高等院校师生及工程技术人员的参考书。

齿根过渡曲线与齿根应力

吴继泽 王 统 编著

责任编辑 张仁杰

*

国防工业出版社 出版发行

(北京市车公庄西路老虎庙七号)

新华书店经售

北京长城印刷厂印刷

*

787×1092 1/16 印张 8¹/₄ 190千字

1989年1月第一版 1989年1月第一次印刷 印数: 0,001—2,030册

ISBN7-118-00110-4/TH6 定价: 3.20元

前 言

本书对渐开线圆柱齿轮常见的齿根过渡曲线及齿根应力的计算方法作了较详尽的叙述,对计算齿根应力的平截面法、折截面法、映射函数法、有限元法及斜截面法有关的原理、公式、图、表皆有较详尽的介绍。本书适合于对渐开线齿轮已具有一定基础知识的读者,可做为高等院校师生及工程技术人员参考书。

本书第一、二、三、五、六章由北京航空学院吴继泽编写,第四章由上海交通大学王统编写。

在编写过程中,我们曾得到东安机械厂胡永安工程师,航空工业部某研究所朱文伯、张长秦工程师的大力支持,部分章节曾经过北京航空学院王洪星教授审阅,谨在此表示衷心的感谢。

由于我们水平低,加上编写时间短促,书中难免有错误和不妥之处,诚恳地欢迎广大读者提出改进意见。

编 者

目 录

第一章 齿根过渡曲线	1
一、渐开线及外摆线	1
二、几种过渡曲线	3
三、齿根局部应力的计算公式	4
四、过渡曲线的方程式	6
五、过渡曲线的曲率半径	12
六、 $\overline{GD}$ 线段、 δ 角及 γ 角的计算公式	14
七、计算举例	15
八、光弹试验结果	17
九、齿根过渡曲线对比结果	19
第二章 平截面法及折截面法	20
一、路易斯 (Lewis) 公式	20
二、美国齿轮制造者协会 (AGMA) 公式	21
三、库德略夫采夫 (Кудрявцев) 公式	25
四、尼曼 (Niemann) 公式	32
五、国际标准化组织 (ISO) 公式	32
六、平截面法与折截面法的比较	41
第三章 映射函数法	46
一、映射函数	46
二、齿根应力的计算	47
三、几个问题	56
第四章 齿根应力分析的有限元法	60
一、有限元法的基本概念和思路	60
二、齿根应力分析中的两类平面问题及其基本方程	63
三、用有限元法分析齿根应力的计算过程	67
四、齿根部位的应力分布形态	83
五、不同齿根圆角及变工况下的齿根应力	97
第五章 非标准齿形的齿轮传动	106
一、大压力角的齿轮传动	106
二、非对称齿廓的齿轮传动	109
三、带根凹量的齿轮	110
第六章 斜齿圆柱齿轮的齿根应力	117
一、美国齿轮制造者协会公式	117
二、库德略夫采夫公式	121
三、国际标准化组织公式	122
四、斜截面法计算公式	124
参考书目	128

第一章 齿根过渡曲线

渐开线直齿圆柱齿轮的齿根过渡曲线有多种形式, 过渡曲线对于轮齿弯曲强度具有重要意义。目前, 机械工业中常见的过渡曲线有五种。本章对这几种过渡曲线作一介绍。

一、渐开线及外摆线

如图 1-1 所示, 直线 KK 在基圆上纯滚, 直线上 K 点将描出渐开线 $K_0-M_0-K_{10}$ 。与直线 KK 固接的点 L 将描出延伸渐开线 $L_0-L_0'-L_{10}$ 。与直线 KK 固接的另一点 W 将描出缩短渐开线 $W_0-W_0'-W_8$ 。

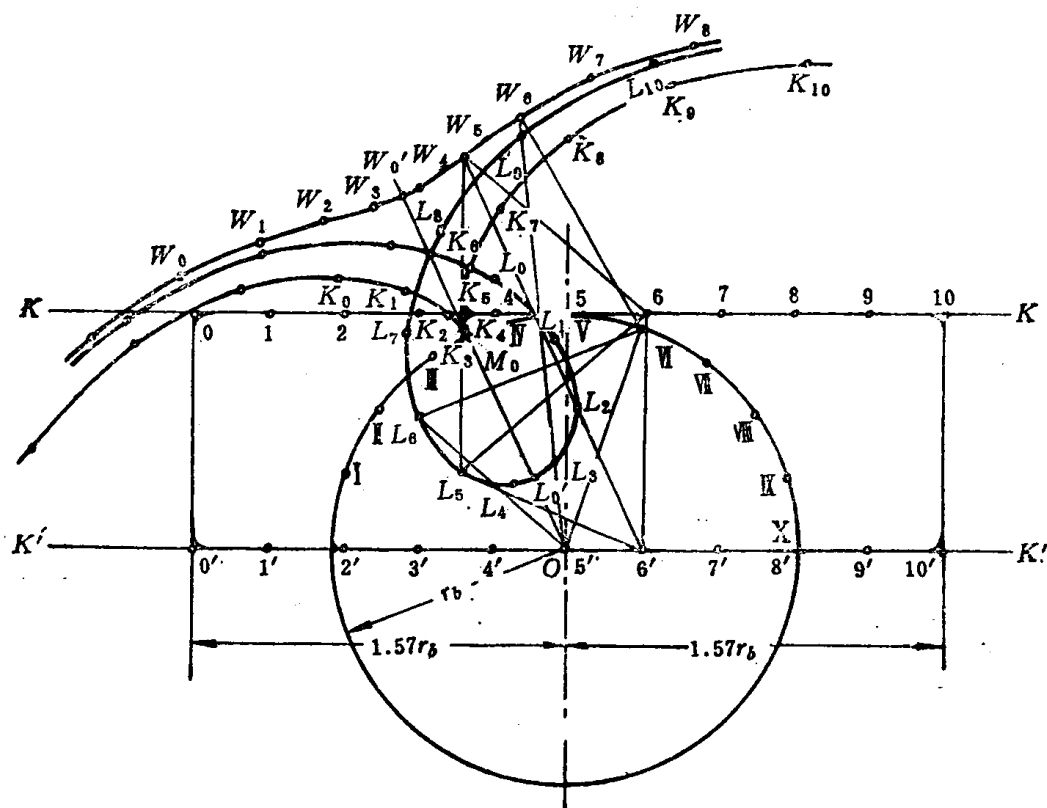


图 1-1

延伸渐开线及缩短渐开线可由作图法得出。假设直线 $K'K'$ 与直线 KK 固接, 形成一矩形框架, 其长边与基圆的半周长相等, 其短边与基圆的半径相等。这样, 当直线 KK 在基圆上纯滚时, 直线 $K'K'$ 总是通过基圆的圆心 O 。将矩形框架的长边及基圆的半周长分为对应的等分, 图 1-1 上分为十等份。直线 KK 与基圆相切于 V 点, 与 KK 固接的 L 点位于 L_5 位置, 与 KK 固接的 W 点位于 W_5 位置。例如, 要找直线 KK 与基圆切于 VI 点时, L 点的位置 L_6 , 只要作出 $\triangle 66'L_5$, 然后使 $\triangle 66'L_5$ 的顶点 6 与 VI 点重合, 使顶点 $6'$ 与 O 点重合, 则 $\triangle 66'L_5$ 的第三个顶点 L_5 所处的新位置即为 L_6 。 L 点的其他位置可类似地求得。为了找到 L_0' 位置, 在基圆上截取圆弧 $\widehat{VM_0}$, 使 $\widehat{VM_0} = \widehat{5K}$, 连接直线 M_0O , 在直线 M_0O 上截取线段 $\overline{M_0L_0'}$, 使 $\overline{M_0L_0'} = \overline{5K}$, 则得 L 点距基圆圆心 O 最近的位置 L_0' 。显然, 直线 M_0O 是延伸渐开线的对称轴线。

可用类似的办法作出缩短渐开线。例如，可利用 $\triangle 66'W_5$ ，得到 W 点的 W_6 位置等等。缩短渐开线上， W'_0 位置可在直线 M_0O 上截取线段 $\overline{M_0W'_0} = \overline{K_5W_5}$ 来找到。直线 M_0O 也是缩短渐开线的对称轴线。

如图 1-2 所示，圆 O_1 在圆 O_2 上纯滚，圆 O_1 上 K 点将描出外摆线 $K_1-K_0-K_{11}$ 。圆外与圆 O_1 固接的点 L 将描出延伸外摆线 $L_1-L_0-L_{11}$ 。圆内与圆 O_1 固接的点 W 将描出缩短外摆线 $W_2-W_0-W_{11}$ 。

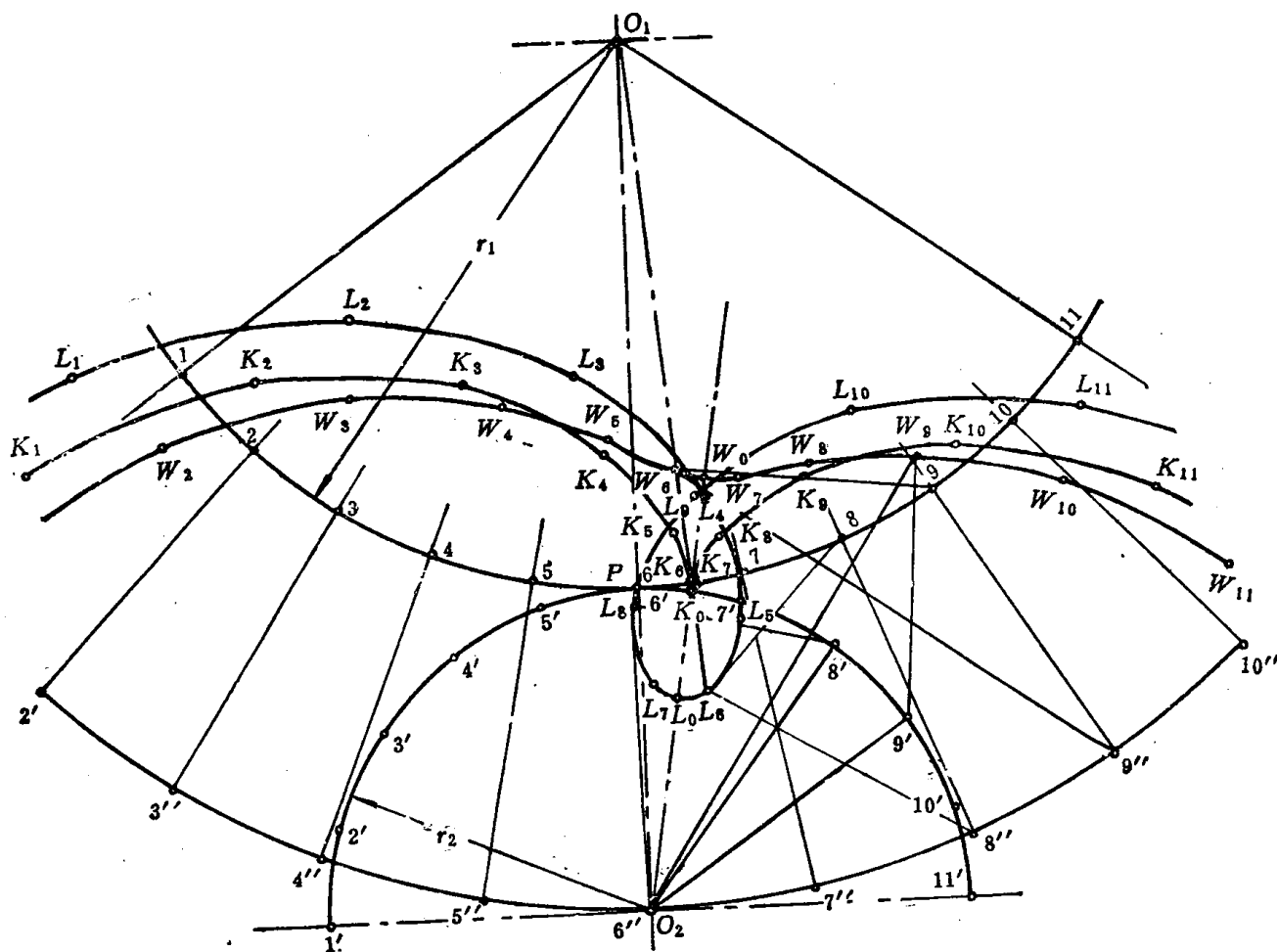


图 1-2

延伸外摆线与缩短外摆线可由作图法得出。假设以 O_1 为圆心、以 $\overline{O_1O_2}$ 为半径的辅助圆与圆 O_1 固接，则当圆 O_1 在圆 O_2 上纯滚时，辅助圆总是通过圆心 O_2 。将圆 O_1 、圆 O_2 及辅助圆分成等份，（图 1-2 上分成十等份），并使圆 O_1 与圆 O_2 上的对应等份弧长相等。图上，6、6' 点与 P 点重合，即圆 O_1 、圆 O_2 以 6、6' 点相切。例如，为了找到延伸外摆线上 L 点的 L_8 位置，可使 $\triangle 88''L_6$ 的顶点 8 与 8' 点重合，使顶点 8'' 与 O_2 重合，第三个顶点 L_6 所处的新位置，即为所求的 L_8 位置。为了找到 L_0 位置，在圆 O_2 上截取圆弧 $6'K_0$ ，使 $6'K_0 = 6K_6$ ，连直线 K_0O_2 ，在 K_0O_2 线上截取线段 $\overline{K_0L_0}$ ，使 $\overline{K_0L_0} = \overline{K_6L_6}$ ，便得到 L_0 位置。显然，直线 K_0O_2 是延伸外摆线的对称轴线。用类似的办法可得到缩短外摆线。如利用 $\triangle 99''W_6$ 可找到 W 位置等等。在 K_0O_2 线上，截取 $\overline{K_0W_0} = \overline{K_6W_6}$ ，可得 W_0 位置。直线 K_0O_2 也是缩短外摆线的对称轴线。

二、几种过渡曲线

如图 1-3 所示, 用齿条型刀具加工齿轮, 相当于齿条齿轮的啮合。被加工齿轮齿廓的渐开线部分由刀具的直线部分切出, 过渡曲线部分由刀具的圆角部分切出。加工过程中, 刀具的加工节线与齿轮的加工节圆相切纯滚, 显然, 刀具圆角的圆心 C_p 将描出延伸渐开线, 于是, 可得到齿轮的过渡曲线是延伸渐开线的等距曲线。

如图 1-4 所示, 用齿轮型刀具加工齿轮, 相当于一对齿轮的啮合, 被加工齿轮齿廓的渐开线部分由刀具的渐开线部分切出, 过渡曲线部分由刀具的圆角部分切出。加工过程中, 刀具的加工节圆与齿轮的加工节圆相切纯滚, 显然, 刀具圆角的圆心 C_p 将描出延伸外摆线, 于是, 可得到齿轮的过渡曲线是延伸外摆线的等距曲线。

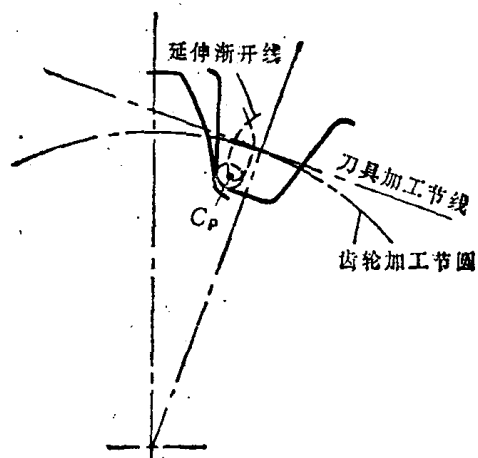


图 1-3

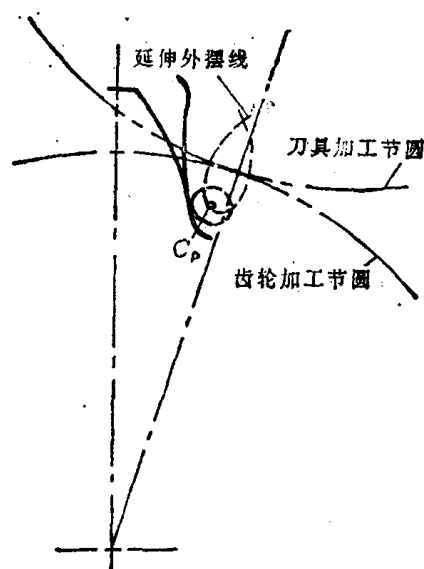


图 1-4

目前, 机械工业生产中常见的过渡曲线有以下五种:

(1) 当采用齿条型刀具加工齿轮时, 如果刀具齿廓的顶部具有两个圆角 (见图 1-7 a), 则过渡曲线如图 1-5 a 所示, I、II 两段为延伸渐开线的等距曲线, III 段为齿轮的根圆圆弧;

(2) 当采用齿条型刀具加工齿轮时, 如果刀具齿廓的顶部只具有一个圆角 (见图 1-7 b), 则过渡曲线如图 1-5 b 所示, I 段为一整段延伸渐开线的等距曲线;

(3) 当采用齿轮型刀具加工齿轮时, 如果刀具的顶部具有两个圆角 (见图 1-9), 则过渡曲线如图 1-5 a 所示, I、II 两段为延伸外摆线的等距曲线, III 段为齿轮的根圆圆弧;

(4) 当采用齿轮型刀具加工齿轮时, 如果刀具的顶部只具有一个圆角 (见图 1-10), 则过渡曲线如图 1-5 b 所示, I 段为一整段延伸外摆线的等距曲线;

(5) 如图 1-5 b 所示, 过渡曲线即为一整段圆弧。

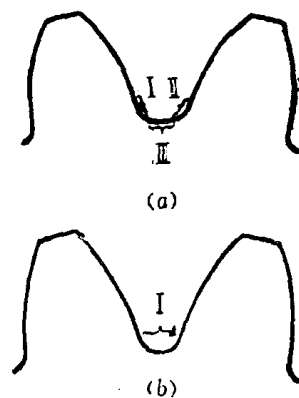


图 1-5

三、齿根局部应力的计算公式

图 1-6 表示一个轮齿，其齿宽为单位长度。 A 、 B 两点对称于 μ 坐标轴， AD 表示过渡曲线 A 点的法线方向， BD 表示过渡曲线 B 点的法线方向。由大量试验得知，齿根弯曲疲劳裂纹发生在局部应力最大的地方，且裂纹是沿着过渡曲线的法线方向。因而，为了找出齿根局部最大应力，着重研究 ADB 截面上的应力变化规律是合适的。轮齿在 F 力的作用下产生变形， ADB 截面转过 $d\varphi$ 角，转至 $A'DB'$ 位置，但假设 AD 、 BD 仍然保持为平面。 η 为 A 点的横坐标， A_1 点的横坐标为 $\eta + d\eta$ ，对应的截面为 $A_1D_1B_1$ 。我们来研究一小段材料 KF ， KF 距 D 点的距离为 u ，由图有

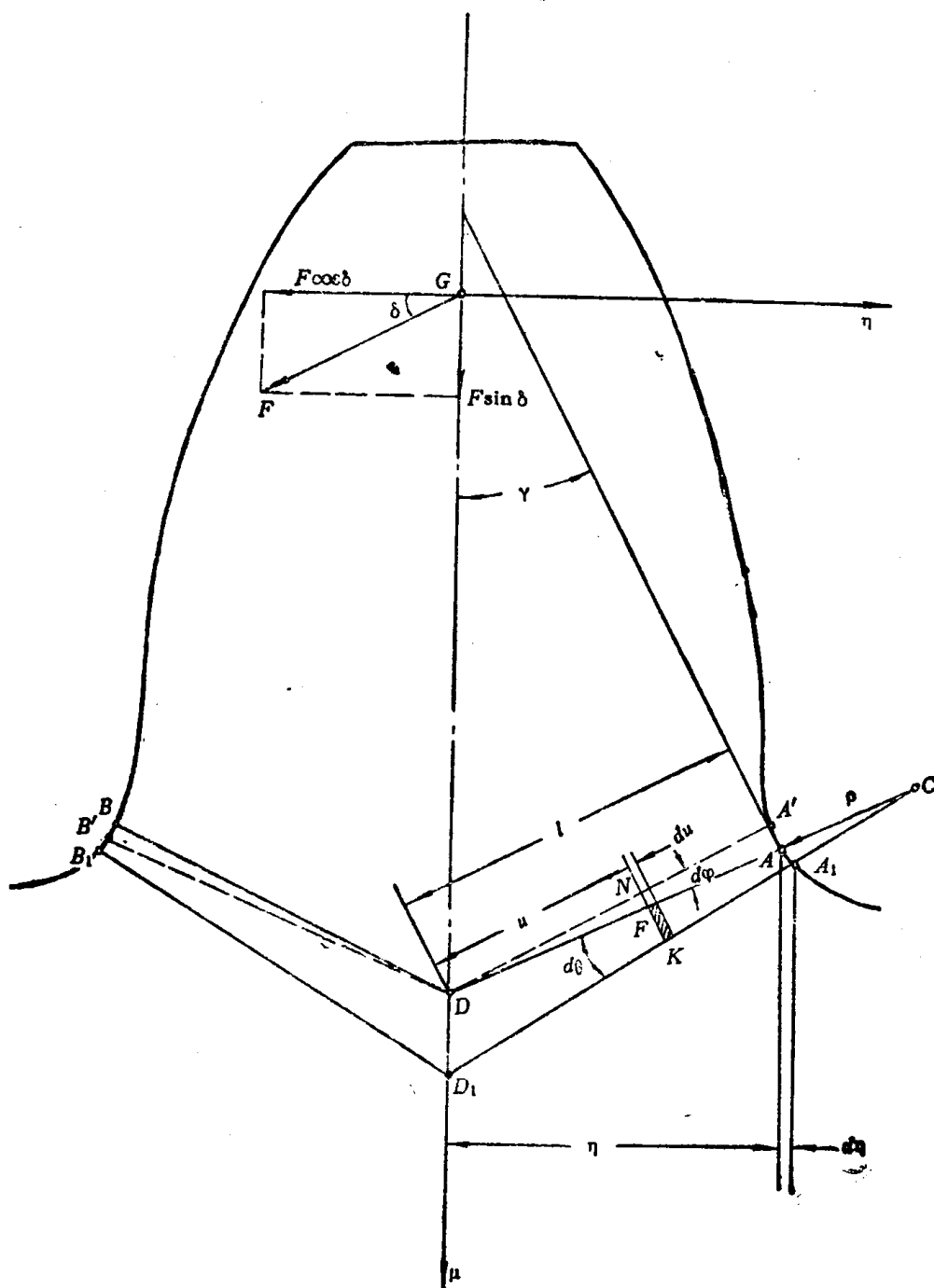


图 1-6

$$\overline{KF} = (\rho + l - u) d\theta$$

在力 $F \cos \delta$ 的作用下, 小段材料 KF 将伸长, 伸长量

$$\overline{FN} = u d\varphi$$

所以, 距 D 点 u 处应力

$$\bar{\sigma}_u = E \frac{u d\varphi}{(\rho + l - u) d\theta} \quad (1-1)$$

可进一步求得距 D 点 u 处内力对 D 点的力矩。

$$dM = \sigma_u u du = E \frac{d\varphi}{d\theta} \left(\frac{u^2 du}{\rho + l - u} \right)$$

根据轮齿的平衡条件, 对 D 点取矩, 有

$$2E \frac{d\varphi}{d\theta} \int_0^l \frac{u^2 du}{\rho + l - u} = F \overline{GD} \cos \delta$$

积分上式, 可得

$$E \frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{-F \overline{GD} \cos \delta}{2 \left[(l + \rho) l + 0.5 l^2 + (l + \rho)^2 \ln \left(\frac{\rho}{l + \rho} \right) \right]} \quad (1-2)$$

将式 (1-2) 代入式 (1-1), 并使 $u = l$, 再以 $l = \eta / \cos \gamma$ 代入, 可求得过渡曲线上 A 点的弯曲应力

$$\sigma_b = \frac{F \overline{GD} \cos \delta}{\eta^2} H \quad (1-3)$$

式中

$$H = \frac{-\cos \gamma}{2 \left[\frac{3 \frac{\eta}{\rho} + 2 \cos \gamma}{2 \left(\frac{\eta}{\rho} \right)^3} + \frac{\left(\cos \gamma + \frac{\eta}{\rho} \right)^2}{\left(\frac{\eta}{\rho} \right)^3} \ln \left(\frac{\cos \gamma}{\cos \gamma + \frac{\eta}{\rho}} \right) \right]} \quad (1-4)$$

另外, 由于 ADB 截面上压缩应力 σ_p 较小, 可假设它在 ADB 截面上均匀分布, 于是

$$\sigma_p = \frac{\frac{F \sin \delta}{2} \cos \gamma}{\frac{\eta}{\cos \gamma}} = \frac{F \sin \delta \cos^2 \gamma}{2\eta} \quad (1-5)$$

因为 ADB 截面与齿根自由边界垂直, 所以 ADB 截面上 A 点、 B 点处没有剪应力。最后可得过渡曲线上 A 点的局部应力

$$\sigma = \sigma_b - \sigma_p = F \left(\frac{\overline{GD} \cos \delta}{\eta^2} H - \frac{\sin \delta \cos^2 \gamma}{2\eta} \right)$$

考虑到

$$F = \frac{M}{Br \cos \alpha}$$

得

$$\bar{\sigma} = \frac{M}{Brm} \frac{m (2 \overline{GD} H \cos \delta - \eta \sin \delta \cos^2 \gamma)}{2 \eta^2 \cos \alpha}$$

或

$$\sigma = \frac{M}{Brmy} \quad (1-6)$$

这里

$$y = \frac{2\eta^2 \cos \alpha}{m (2GDH \cos \delta - \eta \sin \delta \cos^2 \gamma)} \quad (1-7)$$

在以上诸式中

M ——作用在齿轮上的力矩；

B ——齿宽；

r ——分圆半径；

m ——模数；

α ——分圆压力角；

η ——过渡曲线上某点 A 的横坐标；

ρ ——过渡曲线上某点 A 的曲率半径；

γ ——过渡曲线上某点 A 的切线与轮齿对称线之间夹角；

$\overline{GD}$ —— F 力作用线与轮齿对称线交点 G 至过渡曲线上某点 A 的法线与轮齿对称线交点 D 之间距离；

δ —— F 力作用线与轮齿对称线的垂线之间夹角。

为了对几种过渡曲线进行比较，需要求出它们的齿根处的局部最大应力，这就要找出各种过渡曲线的 η 、 ρ 、 γ 、 $\overline{GD}$ 的计算公式。

四、过渡曲线的方程式

上面指出的第一种过渡曲线和第二种过渡曲线都是延伸渐开线的等距曲线，不过它们的刀具齿廓参数有所不同。

对于第一种过渡曲线，刀具齿廓如图 1-7 a 所示，其某些参数间具有以下关系：

$$a = fm + cm - r_\rho$$

$$b = \frac{\pi m}{4} + fm \operatorname{tg} \alpha + r_\rho \cos \alpha$$

$$r_\rho = \frac{cm}{1 - \sin \alpha}$$

对于第二种过渡曲线，刀具齿廓如图 1-7 b 所示，其某些参数间具有以下关系：

$$a = fm + cm - r_\rho$$

$$b = \frac{\pi m}{2}$$

$$r_\rho = \frac{\pi m - 4fm \operatorname{tg} \alpha}{4 \cos \alpha}$$

$$cm = r_\rho (1 - \sin \alpha)$$

在以上刀具参数的关系式中

a ——刀顶圆角圆心 C_ρ 距中线的距离；

b ——刀顶圆角圆心 C_ρ 距刀具齿槽中心线的距离；

r_ρ ——刀顶圆角半径；

f ——齿高系数；

c ——径向间隙系数。

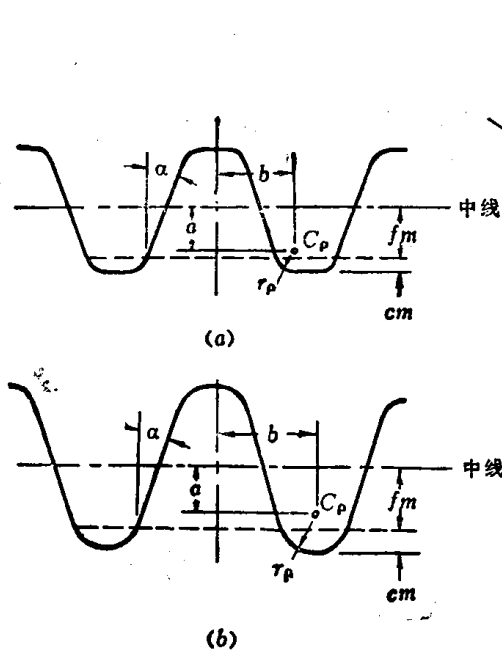


图 1-7

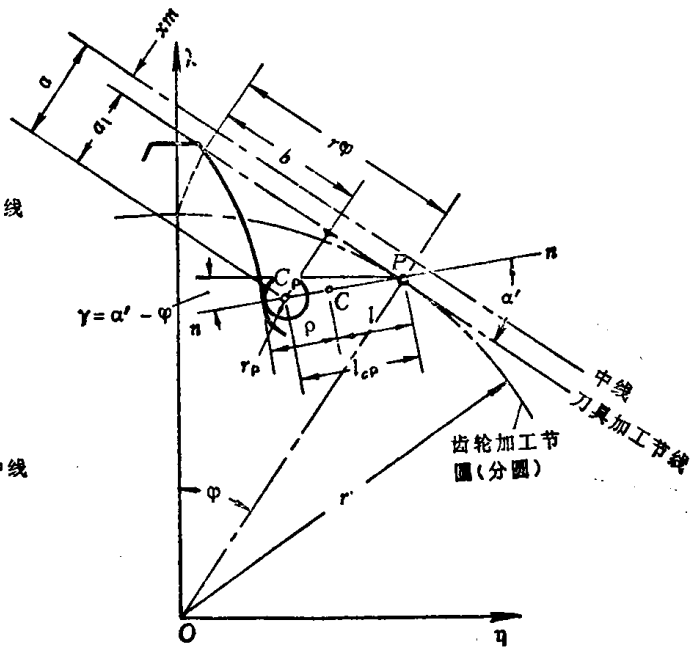


图 1-8

下面求延伸渐开线等距曲线的方程式。用齿条型刀具加工齿轮，是刀具的加工节线与齿轮的加工节圆（分圆）相切纯滚。图 1-8 所示， P 是节点， nn 是刀具圆角与过渡曲线接触点的公法线， α' 是 nn 与刀具加工节线间的夹角。若选取 $O\eta\lambda$ 坐标系如图示，则不难写出延伸渐开线等距曲线的参数方程式

$$\left. \begin{aligned} \eta &= r \sin \varphi - \left(\frac{a_1}{\sin \alpha'} + r_p \right) \cos(\alpha' - \varphi) \\ \lambda &= r \cos \varphi - \left(\frac{a_1}{\sin \alpha'} + r_p \right) \sin(\alpha' - \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (1-8)$$

方程式 (1-8) 中， φ 与 α' 的关系式为

$$\varphi = \frac{1}{r} (a_1 \operatorname{ctg} \alpha' + b) \quad (1-9)$$

式 (1-8) 及 (1-9) 中， $a_1 = a - xm$ 。

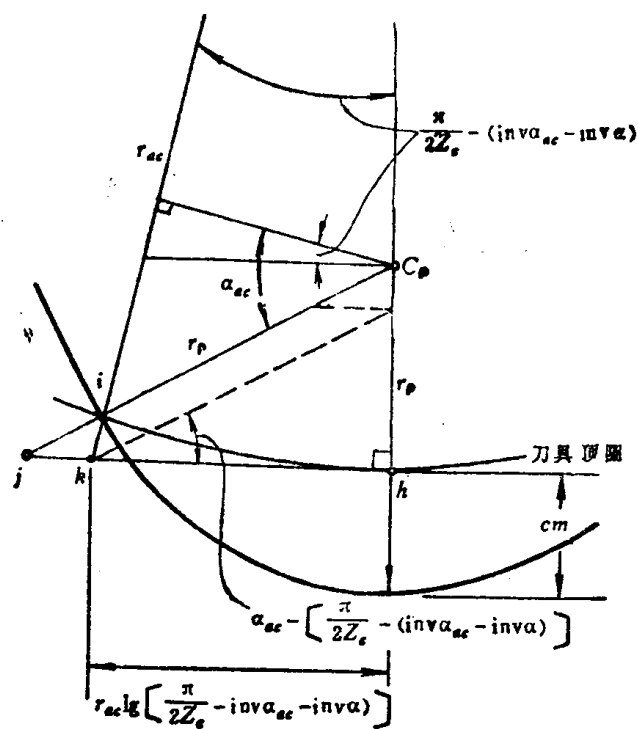
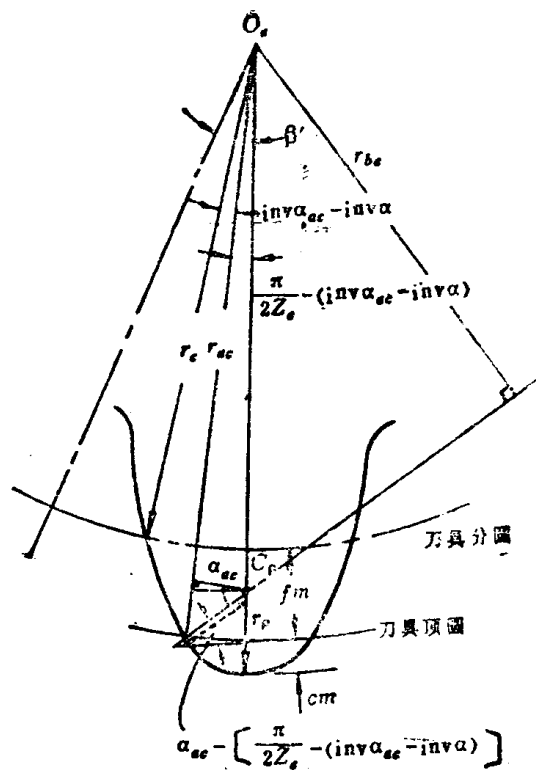
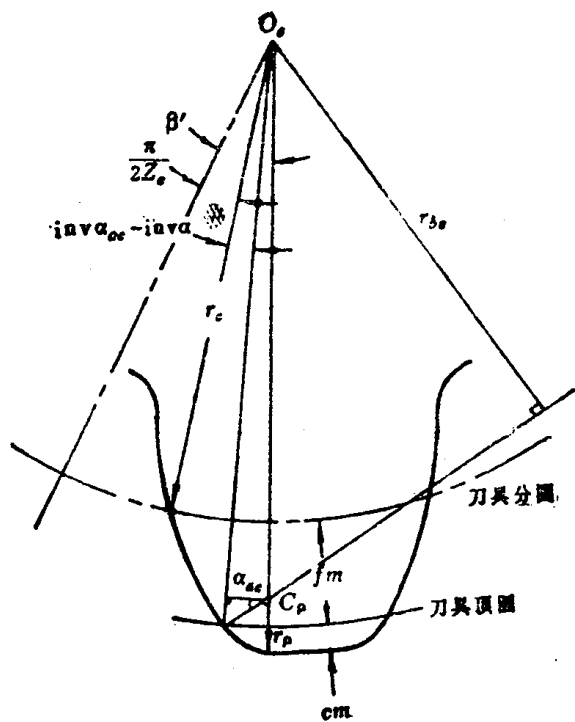
在参数方程式 (1-8) 中， α' 角是变参数， α' 在 $\alpha \sim 90^\circ$ 范围内变化。对应于不同的 α' 角，利用式 (1-9) 及式 (1-8)，分别代入两种过渡曲线刀具的参数，即可求得第一种过渡曲线或第二种过渡曲线上不同点的坐标。

第三种过渡曲线和第四种过渡曲线都是延伸外摆线的等距曲线，但是它们的刀具参数并不一样。

一般说来，齿轮插刀是变位齿轮，不过在设计计算时，还是将齿轮插刀看成是标准齿轮来进行计算。我们也这样处理问题，认为齿轮插刀是标准齿轮。

对于第三种过渡曲线，刀具如图 1-9 所示，其参数间具有以下关系：

$$\begin{aligned} r_p &= \frac{cm}{1 - \sin \alpha_{ac}} \\ \overline{O_c C_p} &= r_c + fm + cm - r_p \\ \beta' &= \frac{\pi}{2Z_c} + (\operatorname{inv} \alpha_{ac} - \operatorname{inv} \alpha) + \sin^{-1} \frac{r_p \cos \alpha_{ac}}{r_c + fm + cm - r_p} \end{aligned}$$



对于第四种过渡曲线, 刀具如图 1-10 所示, 其参数间关系式可以推导如下。图 1-11 为刀顶圆角处放大图, 由图有

$$\frac{r_p \cos \alpha_{ac}}{r_{ac} - r_p \sin \alpha_{ac}} = \operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{2Z_\epsilon} - (\operatorname{inv} \alpha_{ac} - \operatorname{inv} \alpha) \right]$$

于是得

$$r_p = \frac{r_{ac} \operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{2Z_c} - (\operatorname{inv} \alpha_{ac} - \operatorname{inv} \alpha) \right]}{\cos \alpha_{ac} + \sin \alpha_{ac} \operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{2Z_c} - (\operatorname{inv} \alpha_{ac} - \operatorname{inv} \alpha) \right]}$$

另外, 在 $\triangle ijk$ 中, 有

$$\frac{\overline{jk}}{\cos \alpha_{ac}} = \frac{\overline{ik}}{\sin \left\{ \alpha_{ac} - \left[\frac{\pi}{2Z_c} - (\operatorname{inv} \alpha_{ac} - \operatorname{inv} \alpha) \right] \right\}}$$

即

$$\frac{\overline{jk}}{\cos \alpha_{ac}} = \frac{\frac{r_{ac}}{\cos \left[\frac{\pi}{2Z_c} - (\operatorname{inv} \alpha_{ac} - \operatorname{inv} \alpha) \right]} - r_{ac}}{\sin \left\{ \alpha_{ac} - \left[\frac{\pi}{2Z_c} - (\operatorname{inv} \alpha_{ac} - \operatorname{inv} \alpha) \right] \right\}}$$

可得

$$\overline{jk} = \frac{r_{ac} \cos \alpha_{ac} \left\{ \frac{1}{\cos \left[\frac{\pi}{2Z_c} - (\operatorname{inv} \alpha_{ac} - \operatorname{inv} \alpha) \right]} - 1 \right\}}{\sin \left\{ \alpha_{ac} - \left[\frac{\pi}{2Z_c} - (\operatorname{inv} \alpha_{ac} - \operatorname{inv} \alpha) \right] \right\}}$$

所以

$$\begin{aligned} cm &= r_p - r_{ac} \operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{2Z_c} - (\operatorname{inv} \alpha_{ac} - \operatorname{inv} \alpha) \right] \operatorname{tg} \left\{ \alpha_{ac} - \left[\frac{\pi}{2Z_c} - (\operatorname{inv} \alpha_{ac} - \operatorname{inv} \alpha) \right] \right\} \\ &\quad - \frac{r_{ac} \cos \alpha_{ac} \left\{ \frac{1}{\cos \left[\frac{\pi}{2Z_c} - (\operatorname{inv} \alpha_{ac} - \operatorname{inv} \alpha) \right]} - 1 \right\}}{\sin \left\{ \alpha_{ac} - \left[\frac{\pi}{2Z_c} - (\operatorname{inv} \alpha_{ac} - \operatorname{inv} \alpha) \right] \right\}} \\ &\quad \times \operatorname{tg} \left\{ \alpha_{ac} - \left[\frac{\pi}{2Z_c} - (\operatorname{inv} \alpha_{ac} - \operatorname{inv} \alpha) \right] \right\} \\ &= r_p - r_{ac} \operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{2Z_c} - (\operatorname{inv} \alpha_{ac} - \operatorname{inv} \alpha) \right] \operatorname{tg} \left\{ \alpha_{ac} - \left[\frac{\pi}{2Z_c} - (\operatorname{inv} \alpha_{ac} - \operatorname{inv} \alpha) \right] \right\} \\ &\quad - \frac{r_{ac} \cos \alpha_{ac} \left\{ \frac{1}{\cos \left[\frac{\pi}{2Z_c} - (\operatorname{inv} \alpha_{ac} - \operatorname{inv} \alpha) \right]} - 1 \right\}}{\cos \left\{ \alpha_{ac} - \left[\frac{\pi}{2Z_c} - (\operatorname{inv} \alpha_{ac} - \operatorname{inv} \alpha) \right] \right\}} \end{aligned}$$

于是, 由图 1-10 不难得到

$$\overline{O_c C_p} = r_c + fm + cm - r_p$$

$$\beta' = \frac{\pi}{Z_c}$$

在以上刀具参数的关系式中

Z_c ——刀具齿数;

r_c ——刀具分圆半径;

r_{ac} ——刀具顶圆半径;

坐标。

五、过渡曲线的曲率半径

1. 欧拉-沙伐尔定理

欲求过渡曲线的曲率半径，可利用欧拉-沙伐尔 (Euler-Savary) 定理。如图 1-14 所示， $\alpha\alpha$ 与 $\beta\beta$ 为两瞬心线，它们各绕 O_1 、 O_2 轴回转，某瞬时它们在 P 点接触， A_1 、 A_2 是两瞬心线关于接触点 P 的对应的曲率中心。 E_1 、 E_2 是一对共轭齿廓，它们在 K 点接触， C_1 、 C_2 是两共轭齿廓关于接触点 K 的对应的曲率中心。

tt 是两瞬心线过 P 点的公切线， nn 是两共轭齿廓过 K 点的公法线。两瞬心线的曲率半径与两共轭齿廓的曲率半径之间关系服从下述欧拉-沙伐尔定理，即瞬心线与共轭齿廓对应两曲率中心的连线 A_1C_1 、 A_2C_2 与过瞬心线接触点 P 且与齿廓公法线垂直的直线 PD 相交于一点。

欧拉-沙伐尔定理可简要证明于下：

假设在已知瞬时， $\alpha\alpha$ 与 $\beta\beta$ 各绕 A_1 、 A_2 轴回转，只要它们的角速度满足条件

$$\frac{\omega_{A_1}}{\omega_{A_2}} = \frac{A_2P}{A_1P} \quad (1-16)$$

则它们仍为瞬心线机构， $\alpha\alpha$ 与 $\beta\beta$ 的接触点 P 即为两构件的相对瞬心。我们来考察铰链四杆机构 $A_1C_1A_2C_2$ ，由机械原理的知识可知，铰链四杆机构中构件 A_1C_1 、 A_2C_2 的相对瞬心在连杆与连心线的交点，亦为 P 。这就是说铰链四杆机构的构件 A_1C_1 、 A_2C_2 的角速度也满足式 (1-16)。

可见铰链四杆机构中构件 A_1C_1 、 A_2C_2 与假设的瞬心线机构中两构件 $\alpha\alpha$ 、 $\beta\beta$ 的瞬时运动情况相同。假设的瞬心线机构在构件回转无穷小角度时，相对瞬心不会沿 A_1A_2 连线移动，因而铰链四杆机构构件 A_1C_1 、 A_2C_2 的相对瞬心也不会沿 A_1A_2 移动，即连杆上 P 点的速度是沿着连杆的方向。而 A_1C_1 、 A_2C_2 两直线的交点 D 应为连杆的绝对瞬心，连杆上 P 点速度既沿着连杆方向，那么过 P 点所作连杆的垂线自然通过连杆的绝对瞬心 D 。这就是欧拉-沙伐尔定理的简要证明。

2. 过渡曲线的曲率半径

我们先求延伸外摆线等距曲线的曲率半径。如图 1-15 所示，刀具加工节圆与齿轮加工节圆为两瞬心线，刀顶圆角与过渡曲线为两共轭齿廓。连接刀具瞬心线与齿廓的曲率中心，得联线 O_cC_p ，过节点 P 作齿廓公法线 nn 的垂线 PD ，据欧拉-沙伐尔定理，过渡曲线的曲率中心应位于连线 OD 上，同时它又应位于齿廓公法线 nn 上，所以 OD 与 nn 的交点 C 即为过渡曲线的曲率中心。过渡曲线的曲率半径 ρ 可据图进一步求得。过 O 、 O_c 作公法线 nn 的垂线 OB 、 O_cB_c ，有

$$\overline{O_cB_c} = r_{pc} \cos \alpha'$$

$$\overline{C_pB_c} = r_{pc} \sin \alpha' + l_{cp}$$

$$\overline{OB} = r_p \cos \alpha'$$

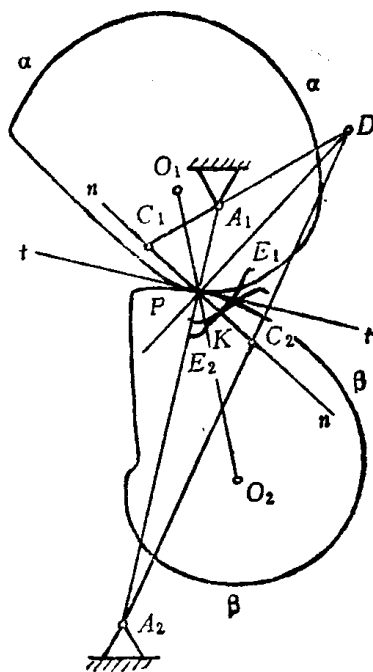


图 1-14

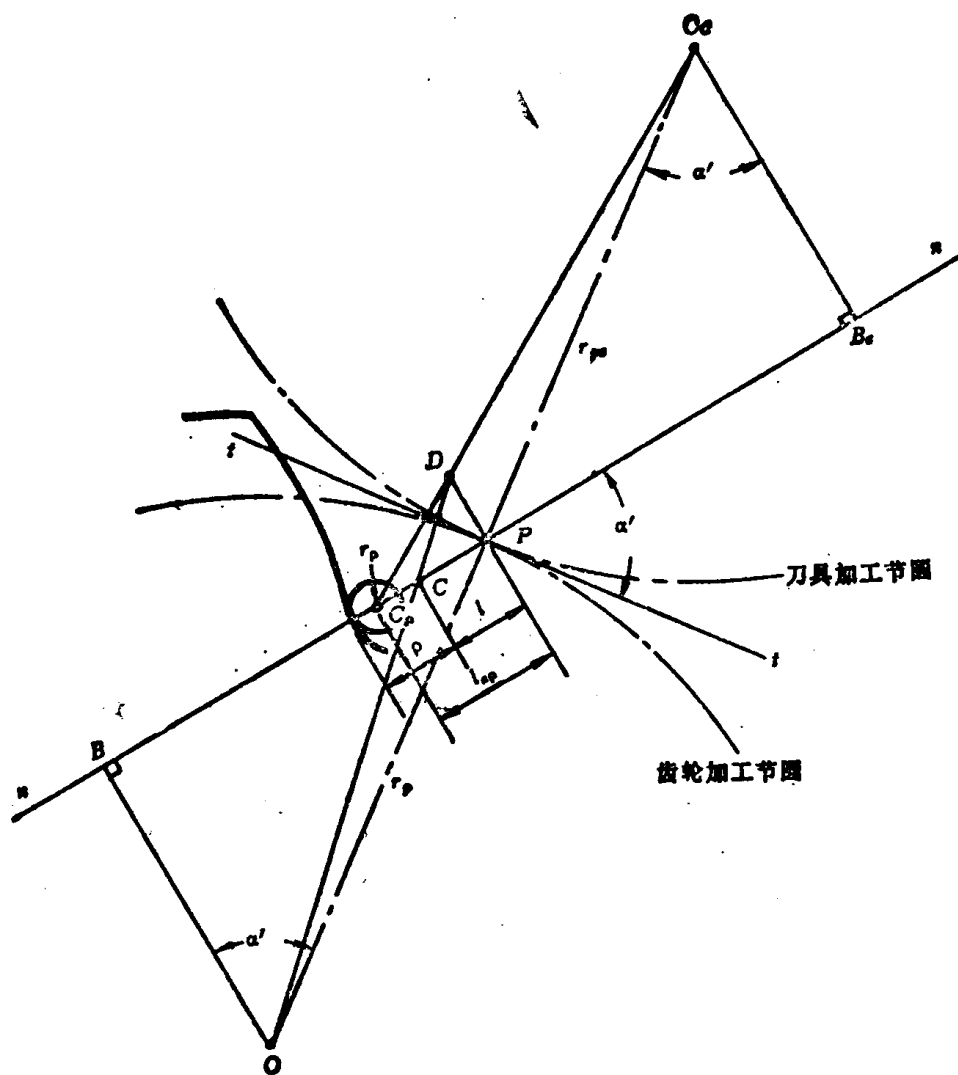


图 1-15

$$\overline{CB} = r_p \sin \alpha' - l$$

由 $\triangle DPC_p$ 与 $\triangle O_c B_c C_p$ 相似, 得

$$\overline{PD} = \overline{O_c B_c} \frac{l_{cp}}{\overline{C_p B_c}} = r_{pc} \sin \alpha' \frac{l_{cp}}{r_{pc} \sin \alpha' + l_{cp}}$$

由 $\triangle DPC$ 与 $\triangle OBC$ 相似, 得

$$\overline{PD} = \overline{OB} \frac{l}{\overline{CB}} = r_p \cos \alpha' \frac{l}{r_p \sin \alpha' - l}$$

所以

$$r_{pc} \cos \alpha' \frac{l_{cp}}{r_{pc} \sin \alpha' + l_{cp}} = r_p \cos \alpha' \frac{l}{r_p \sin \alpha' - l}$$

变换后有

$$\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l_{cp}} \right) \sin \alpha' = \frac{1}{r_{pc}} + \frac{1}{r_p} \quad (1-17)$$

式(1-17)常称为欧拉-沙伐尔公式。

由式(1-17)得

$$l = \frac{l_{cp} r_p r_{pc} \sin \alpha'}{(r_{pc} + r_p) l_{cp} + r_p r_{pc} \sin \alpha'}$$