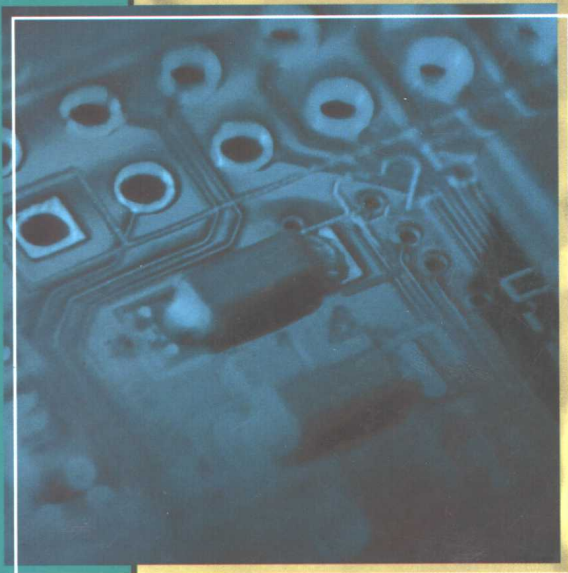




研究生系列教材

自适应信号处理

沈福民 编著



西安电子科技大学出版社
<http://www.xduph.com>

研究生系列教材

自适应信号处理

沈福民 编著

西安电子科技大学出版社

2001

2021010

内 容 简 介

本书主要介绍自适应信号处理的基本理论、基本电路与系统的性能和应用以及近年来的新进展。全书共分 10 章,在第三、四、五、六章中,着重分析和讨论自适应基本准则和自适应主要算法;为了便于理解和掌握自适应的基本理论,在本书的第一、二章中介绍了有关自适应及自适应信号处理的基本概念,发展概况和有关的基础知识;自第七章后,特别增加了关于自适应信号处理基本电路与系统的性能和应用方面的内容。

本书可作为通信、电子信息工程专业及其他相关专业大学高年级学生和研究生们的教科书,也可以作为从事自适应信号处理研究领域工程技术人员的自学用书。

图书在版编目(CIP)数据

自适应信号处理/沈福民编著. —西安:西安电子科技大学出版社,2001.3
研究生系列教材
ISBN 7-5606-0979-1

I. 自… II. 沈… III. 自适应通信系统—信号处理—研究生—教材
IV. TN914

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 82675 号

责任编辑 夏大平

出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)

电 话 (029)8227828 邮 编 710071

http://www.xduph.com E-mail: xdupfb@pub.xaonline.com

经 销 新华书店

印 刷 西安市第三印刷厂

版 次 2001 年 3 月第 1 版 2001 年 3 月第 1 次印刷

开 本 787 毫米×1092 毫米 1/16 印张 14.625

字 数 341 千字

印 数 1~4000 册

定 价 16.00 元

ISBN 7-5606-0979-1/TN·0170

*** 如有印装问题可调换 ***

本书封面贴有西安电子科技大学出版社的激光防伪标志,无标志者不得销售。

前 言

随着信号处理学科领域理论与技术的迅速发展,自适应信号处理作为一门新的学科分支应运而生,并在诸如通信、雷达、工业控制、地震勘探及生物医学电子学等领域获得愈来愈广泛的应用。近几十年来,在自适应信号处理的理论、方法与应用技术方面的研究已取得了丰硕成果,与之相关的研究文献及论著也不断问世。然而,作为适合该学科领域研究生教学与培养专业技术人才的教科书数量甚少,特别在我国还未见到。这就很难满足实际教学及科研工作的迫切需要。本书的编写旨在弥补在自适应信号处理理论、方法与应用技术的学习及研究之中教材的不足。

全书以“自适应性能测度”、“自适应算法”等基本理论的介绍、分析及应用方面的讨论贯穿前后各章内容。全书共分10章,其主要内容可概括如下:

1. 随机信号与信号矩阵理论(第一、二章):为便于初学者入门,在本书前面增加了有关自适应信号处理理论学习必备知识方面的内容。

2. 性能测度与性能表面搜索(第三、四章):这是自适应信号处理全部理论的核心思想与基本出发点,由此可推导出各种形式的自适应基本算法和相应的改进算法。

3. 基本自适应算法与适于不同应用情况下的自适应改进算法(第五、六章):这是本书最重要的内容,它体现了自适应信号处理理论与技术发展的方向与水平。本书除介绍较早期的研究成果和基本理论外,同时关注近年来取得的新成果。

4. 自适应模拟与逆模拟,自适应干扰对消与自适应预测滤波电路(第七、八章):主要分析了它们的基本原理和有针对性地介绍了它们的实际应用。

5. 自适应阵列与自适应波束形成(第九章):较详细地介绍了阵列波束形成的一般原理、旁瓣对消器和各种自适应波束形成器及它们的应用。

6. 自适应控制(第十章):这涉及到一个专门的学科领域,但本书主要想使读者了解和掌握自适应信号处理理论与技术在该领域的应用情况,并不想全面深入地研究整个领域。

读者应当从以下几个方面把握本书的主要特色:

1. 较全面地集中介绍了自适应信号处理的基本理论与方法。

2. 为了不使学生的学习仅仅停留在比较抽象的理论之上,在

本书中特别用较多的篇幅介绍了各种自适应算法在多个学科领域内的应用(其中包括对各种不同自适应电路与系统的分析),但主要侧重于通信、雷达及阵列信号处理等方面的实际应用。

3. 基于对复随机信号(或复确知信号)的自适应信号处理理论,从而使研究更具普遍性,本书的研究内容不仅针对复信号,而且也同样包含了(适合)实信号。

本书是在作者参加科研工作及承担本课程的多年研究生教学工作基础上编写完成的,因而较多地考虑到了教学工作中的实际要求和一般有关专业人员的自学需要。但是,由于本学科的发展十分迅速,本书对有些近年来才获得的新成果还不能满意地介绍给大家,加之作者水平所限,书中难免有错误与不当之处,敬请广大读者谅解并不吝赐教。

清华大学张贤达教授在百忙之中对书稿进行了认真审阅,并对书稿提出了十分宝贵的修改意见,在此深表感谢。

本书的编写与出版工作得到了西安电子科技大学教材建设基金和研究生教材建设基金的专项资助,在此也特表感谢。

沈福民

2000年9月

于西安电子科技大学

目 录

第一章 概 论

1.1 主要研究领域	1
1.2 发展和应用	2
1.3 章节内容安排	3

第二章 信号矩阵理论

2.1 信号、信号向量与权向量	4
2.2 输入信号的相关矩阵	5
2.3 信号子空间和噪声子空间	7
2.4 梯度运算	9

第三章 性能测量方法

3.1 均方误差(MSE)性能测度	11
3.2 最大信噪比(MSN)性能测度	14
3.3 最大似然(ML)性能测度	18
3.4 最小噪声方差(MV)性能测度	19
习题	21

第四章 性能表面的搜索

4.1 最速下降法梯度搜索	22
4.2 牛顿法梯度搜索	26
4.3 梯度估值及其对自适应过程的影响	30
习题	46

第五章 基本自适应算法

5.1 LMS 算法	48
5.2 序贯回归(SER)算法	56
5.3 RLS 算法	62
5.4 随机搜索算法	66
5.5 直接矩阵求逆(DMI)法	71
习题	75

第六章 自适应算法的改进形式

6.1 约束 LMS 算法	77
6.2 自适应递归滤波器	81
6.3 自适应格型滤波器	86
6.4 用正交信号的自适应滤波	98
6.5 解相关 LMS 算法	104
6.6 一种新的拟牛顿自适应滤波算法	106
习题	108

第七章 自适应模拟与逆模拟

7.1 概述	111
7.2 多径通信信道的自适应模拟	114
7.3 FIR 滤波器综合的自适应模拟	118
7.4 电话信道的自适应均衡	121
7.5 雷达信道的自适应均衡	124
7.6 IIR 滤波器自适应综合	125
习题	130

第八章 自适应干扰对消

8.1 概述	136
8.2 单信道噪声对消器	137
8.3 用作陷波滤波器的自适应干扰对消器	144
8.4 自适应预测器的几种应用	147
8.5 具有多参考输入的噪声对消	153
习题	154

第九章 自适应阵列与自适应波束形成

9.1 阵列波束形成的基本原理	157
9.2 自适应天线旁瓣对消	161
9.3 采用引导信号的波束形成	168
9.4 格里菲思 LMS 波束形成器	176
9.5 弗罗斯特自适应波束形成器	178
9.6 具有零点和极点的自适应波束形成器	182
9.7 杜瓦尔自适应波束形成器	184
9.8 跳频扩谱技术	187
9.9 超分辨波束形成	189
习题	195

第十章 自适应控制系统

10.1 自适应控制的基本概念	199
10.2 自适应模型控制(AMC)	202
10.3 自适应逆控制	204
10.4 被控系统噪声及过滤后 x -LMS 算法	207
10.5 模型参考自适应控制	209
习题	211

附 录

附录 A 信号复包络表示	214
附录 B 有用的矩阵关系和施瓦茨不等式	216
附录 C 多变量的高斯分析	217
C.1 实高斯随机向量	218
C.2 复高斯随机向量	219
参考文献	222

第一章 概 论

自适应信号处理(Adaptive Signal Processing)是近 40 年来发展起来的信号处理领域一个新的分支。随着人们在该领域研究的不断深入,自适应信号处理的理论和技术日趋完善,其应用的范围也愈来愈广泛。

通过信号和信号的传送,人们可以获取(有用)信息,而经对信号进行处理使蕴含于信号中的(有用)信息提取出来。由于信号形式及信号传送方式和传送环境的复杂性(例如信号在传送过程中受到噪声和干扰的污染等),促使信号处理理论和技术不断发展,从而使人们更有效地、最大可能地获取信息。

1.1 主要研究领域

自适应信号处理是研究一类结构可变或可以调整的系统,它可以通过自身与外界环境的接触来改善自身对信号处理的性能。通常这类系统是时变的非线性系统,可以自动适应(即“自适应”)信号传送变化的环境和要求,无须详细知道信号的结构和信号的实际知识,无须精确设计信号处理系统本身。

自适应系统(Adaptive System)的非线性特性主要是由系统对不同信号环境实现自身调整确定的。假如一个自适应滤波器(Adaptive Filter)的输入仅为有用信号,那么,它可以是一个全通滤波器,但若输入为有用信号加噪声(或干扰),则可成为一个带通或带阻滤波器。自适应系统的时变特性主要是由其自适应响应(自适应“学习”)过程确定的。当自适应过程结束,系统调整不再进行时,有一类自适应系统可成为线性系统,并称为“线性自适应系统”(Linear Adaptive System)。因便于设计并易于作数学处理,这类自适应系统特别有用。

自适应系统和一般系统类似,可以分为开环自适应和闭环自适应两种类型。开环自适应系统的工作主要为:对输入信号或信号环境进行测量,并用测量得到的信息形成公式或算法(Algorithm),用以调整自适应系统自身;而闭环自适应系统还利用系统调整所得结果的有关知识去优化系统某种性能,即该类系统是一种带“性能反馈”的自适应系统。

图 1.1(a)表示一个开环自适应系统,控制该系统的自适应算法仅由输入确定。图 1.1(b)则表示一个闭环自适应系统,控制该系统相应的自适应算法除取决于输入外,同时还依赖于系统输出的结果。

自适应信号处理所研究的信号既可以是随机平稳信号,也可以是局部平稳的随机信号。在大量的工程应用和研究中,又将信号在频率域分成窄带和宽带两种,在两种情况下研究或处理的方法及自适应系统的结构也不同。信号的统计量极其重要。人们最常用的统

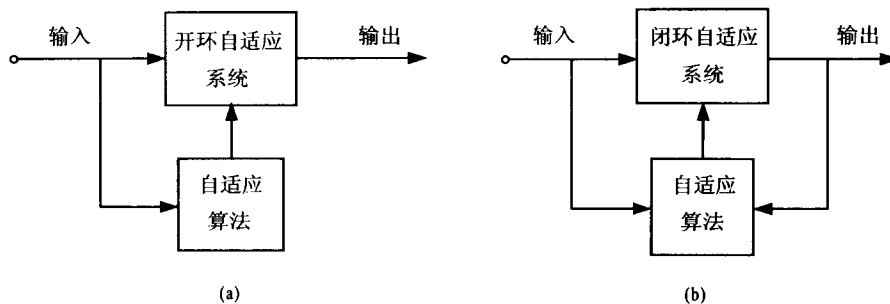


图 1.1 自适应系统的组成

(a) 开环自适应; (b) 闭环自适应

计量为信号的(平)均值(一阶统计量)、相关函数与功率谱密度(二阶统计量), 同时还有高阶矩、高阶累积量和高阶谱等高阶统计量。

一个平稳随机信号 $x(t)$ 是严格平稳的, 则 $\{x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)\}$ 的联合概率分布函数与 $\{x(t_1+\tau), x(t_2+\tau), \dots, x(t_n+\tau)\}$ 的联合概率分布函数对所有 t_1, t_2, \dots, t_n 和 $\tau \in T$ 都相同。严格平稳亦称狭义平稳。

随机信号 $x(t)$ 称为广义平稳过程, 其满足:

- (1) $E\{x(t)\} = m$, m 为常数
- (2) $E\{|x(t)|^2\} < \infty$
- (3) $E\{[x(s)-m]^* [x(t)-m]\} = R_x(t-s) - |m|^2$

其中, $R_x(t-s) = E\{x^*(s)x(t)\}$, $x^*(t)$ 代表 $x(t)$ 的复数共轭。

一个严格平稳随机过程必定是广义平稳的; 如果一个信号不是广义平稳的, 则称它是非平稳信号。用统计量来叙述, 各阶统计量和时间无关的信号被称为平稳信号。另外, 在某一段连续时间内, 信号的各阶统计量与该段时间的不同时刻无关, 则称它为局部平稳信号。通常在工程应用中, 对一类具有遍历性的平稳随机过程(亦称广义各态历经过程)更感兴趣。因为若一个信号是各态历经的, 则在概率意义上的集合统计平均等于信号在时间样本上的集合平均。由此, 使问题的研究更为方便。

在自适应信号处理中, 经常要研究两个(或两个以上)联合平稳信号的互相关特性, 即它们的互相关函数和互(功率)谱密度。若存在两个联合平稳信号 $x(t)$ 、 $y(t)$, 其互相关函数为

$$R_{xy}(t-s) = E\{x^*(s)y(t)\}$$

当互相关函数等于零时, 两平稳信号互不相关(也可以称为相互“正交”)。这种性质在自适应系统的算法研究中十分有用。

1.2 发展和应用

自适应信号处理的研究工作始于 20 世纪中叶。在 1957 年至 1960 年间, 美国通用电气公司的豪厄尔斯(P. Howells)和阿普尔鲍姆(P. Applebaum), 与他们的同事们研究和使

了简单的自适应滤波器,用以消除混杂在有用信号中的噪声和干扰。而结构更为复杂的自适应滤波器的研究工作,则由美国斯坦福大学的维德罗(B. Widrow)和霍夫(M. Hoff)始于1959年。此间,他们在自适应理论方面做出了贡献,发明了最小均方(LMS)自适应算法,并提出了一种采用被称为“自适应线性门限逻辑单元”的模式识别方案。同时,原苏联莫斯科自动学和遥控力学研究所的艾日曼(Aizermann)及其同事们,也研制出一种自动梯度搜索机器。英国的加布尔(D. Gabor)和他的助手们则研制出了自适应滤波器。他们的工作都是独立进行的。

到20世纪60年代初期和中期,有关自适应信号处理的理论研究和实践、应用工作更加强了,研究范围已发展到自适应、自适应控制、自适应滤波(包括时域和空域)及其他方面。勒凯(R. Lucky)在美国贝尔实验室首先将自适应滤波应用于商用的数字通信中。1965年,自适应噪声对消系统在斯坦福大学建成,并成功地应用于医学中,主要用于对消心电图放大器和记录仪输出端的60 Hz干扰。此后,瑞格勒(R. Riegler)和康普顿(R. T. Compton)推广了由豪厄尔斯和阿普尔鲍姆所做的工作。

随着自适应空域滤波概念的不断完善,一类由维德罗、格里菲思(L. J. Griffiths)等人研制出来的基于“引导信号”算法的自适应波束形成器应用于自适应阵列信号处理。1969年至1972年间,由格里菲思和弗罗斯特(O. L. Frost)等人发明了又一类和“引导算法”相似的“线性约束”自适应天线算法。

数字集成电路和微电子技术的迅速发展给自适应信号处理技术的应用提供了十分优越的条件。自适应系统的应用领域包括通信、雷达、声纳、地震学、导航系统、生物医学电子学和工业控制等。自适应系统模拟与辨识可用一个自适应系统模拟一个未知的,可以随时间慢变的系统,自适应模拟在机电系统的设计和试验方面十分有用;自适应逆模拟、解卷积与均衡则可消除信号在器件和媒质中传输所受到的影响,例如,可以让声频系统对所有的语音频率有相同的增益,或消除传输线对雷达信号的影响;自适应控制可控制系统的特性随时间而变,使之适应环境的改变;自适应噪声对消器已在语音通讯、心电图仪以及地震信号处理等领域得到应用;自适应干扰对消器和自适应波束形成器在自适应阵列信号处理中非常有用,已经得到人们的普遍关注。

1.3 章节内容安排

本书第二章介绍自适应信号处理的有关基础知识。其中包括随机信号及其统计特性,信号相关矩阵(厄米特矩阵)和它的基本特性,矩阵的运算及梯度运算。在第三章中叙述并推导了几种基本的自适应性能测量方法。第四、五章描述自适应梯度搜索和一些基本的自适应算法,且对它们的性能和基本组成单元电路进行了分析和比较。在第六章中介绍了一些适合于具体应用的改进形式的自适应算法。

本书第七~十章主要讨论了自适应信号处理的一些重要应用。有目的地介绍了自适应模拟、逆模拟、自适应滤波器设计、自适应噪声对消器及自适应旁瓣对消器、自适应波束形成器和自适应控制等。

第二章 信号矩阵理论

2.1 信号、信号向量与权向量

一个自适应系统的输入信号和信号特性，通常对该系统的结构和性能起重要作用。一般说来，系统输入的有用信号可以是确定性信号或随机信号，而输入信号中不可避免地会混有噪声或干扰；在频率域中考虑，它们可为窄带的，也可能是宽带信号。

不失一般性，假定一个自适应系统的输入 $x(t)$ 为

$$x(t) = a(t)e^{j\omega t} + n(t)$$

其中， $a(t)$ 为输入信号的复包络(时间缓变的随机信号)， ω 为信号载频， $n(t)$ 为输入噪声。

一个自适应线性组合器(自适应系统的基本单元)的一般形式如图 2.1 所示。图中有 $L+1$ 个输入 $x_0(t)$, $x_1(t)$, \dots , $x_L(t)$ ，与其相应的一组可调权为 w_0, w_1, \dots, w_L ，而输出信号为 $y(t)$ 。用于调整权的方法即“自适应算法”。

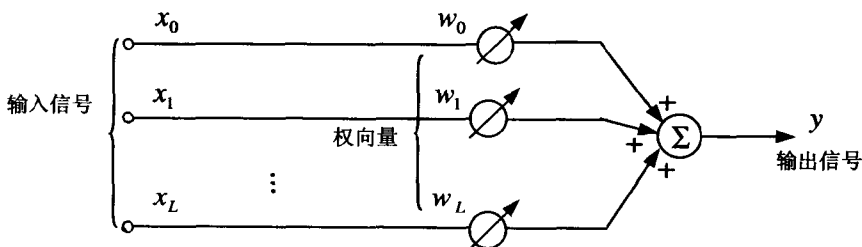


图 2.1 自适应线性组合器的一般形式

输入信号可以用向量的形式表示，并隐去时间函数，则信号向量 \mathbf{X} 为

$$\mathbf{X} = [x_0 \ x_1 \ \dots \ x_L]^T \quad (2.1)$$

式中，上标“T”表示矩阵转置。

可调权用权向量 \mathbf{W} 表示：

$$\mathbf{W} = [w_0 \ w_1 \ \dots \ w_L]^T \quad (2.2)$$

自适应组合器的信号输出为

$$y = \mathbf{X}^T \mathbf{W} = \mathbf{W}^T \mathbf{X} \quad (2.3)$$

以此方法描述自适应系统的输入输出关系显得更加简便。

2.2 输入信号的相关矩阵

在对自适应系统的研究中,系统输入信号的二阶统计量特别有用。在多输入系统,它包括每个输入端信号的自相关和不同输入端信号的互相关。于是可以定义输入信号的相关矩阵 \mathbf{R} 为

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &\stackrel{\text{def}}{=} E[\mathbf{X}^* \mathbf{X}^T] \\ &= \begin{bmatrix} E[x_0^* x_0] & E[x_0^* x_1] & \cdots & E[x_0^* x_L] \\ E[x_1^* x_0] & E[x_1^* x_1] & \cdots & E[x_1^* x_L] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E[x_L^* x_0] & E[x_L^* x_1] & \cdots & E[x_L^* x_L] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.4)$$

式中,“ $*$ ”表示复数共轭。由定义式(2.4)可知,信号相关矩阵 \mathbf{R} 是厄米特(Hermite)矩阵,即满足 $\mathbf{R}^* = \mathbf{R}^T$ 。作为厄米特矩阵,它具有如下一些性质:

(1) 对应于 \mathbf{R} 的不同特征值的特征向量都是正交的。

\mathbf{R} 的特征值可由以下齐次方程得到:

$$[\mathbf{R} - \lambda \mathbf{I}] \mathbf{Q}_n = \mathbf{0} \quad (2.5)$$

式中, λ 是一个标量, \mathbf{Q}_n 为一列向量, \mathbf{I} 为一单位矩阵, $\mathbf{0}$ 是所有元素都为零的向量。方程(2.5)具有非平凡解的条件是,当且仅当

$$\det[\mathbf{R} - \lambda \mathbf{I}] = 0 \quad (2.6)$$

其中,“ $\det[\cdot]$ ”表示行列式运算。

特征方程(2.6)是 $L+1$ 次代数方程。它的 $L+1$ 个解分别为 $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_L$ 。它们即为 \mathbf{R} 的特征值。对于任意一个特征值,至少存在一个列向量解 \mathbf{Q}_n , 使

$$\mathbf{R} \mathbf{Q}_n = \lambda_n \mathbf{Q}_n \quad (2.7)$$

向量 \mathbf{Q}_n 称为与特征值 λ_n 对应的矩阵 \mathbf{R} 的特征向量。推广式(2.7), 可得

$$\mathbf{R}[\mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_1 \cdots \mathbf{Q}_L] = [\mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_1 \cdots \mathbf{Q}_L] \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_L \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

也可以写成

$$\mathbf{R} \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \quad (2.9a)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^{-1} \quad (2.9b)$$

方程(2.9b)称为 \mathbf{R} 的正则形式, 对角矩阵 $\mathbf{\Lambda}$ 叫作“特征值矩阵”, 而 \mathbf{Q} 则称为“特征向量矩阵”。

对于 \mathbf{R} 的对应于不同特征值的任意两个特征向量 \mathbf{Q}_m 和 \mathbf{Q}_n , 则有

$$\mathbf{R} \mathbf{Q}_m = \lambda_m \mathbf{Q}_m \quad (2.10a)$$

$$\mathbf{R} \mathbf{Q}_n = \lambda_n \mathbf{Q}_n \quad (2.10b)$$

由式(2.10a)两边同乘 \mathbf{Q}_n^H (上标“H”表示对矩阵共轭转置)得

$$\mathbf{Q}_n^H \mathbf{R} \mathbf{Q}_m = \lambda_m \mathbf{Q}_n^H \mathbf{Q}_m \quad (2.11)$$

再对式(2.10b)两边共轭转置并右乘 \mathbf{Q}_m , 则

$$\mathbf{Q}_n^H \mathbf{R}^H \mathbf{Q}_m = \mathbf{Q}_n^H \mathbf{R} \mathbf{Q}_m = \lambda_m \mathbf{Q}_n^H \mathbf{Q}_m \quad (2.12)$$

对上两式的两边分别作相减运算, 则得

$$\mathbf{Q}_n^H \mathbf{Q}_m = 0, \lambda_m \neq \lambda_n \quad (2.13)$$

这就意味着特征向量 \mathbf{Q}_m 和 \mathbf{Q}_n 是相互正交的。

(2) \mathbf{R} 是正定(或半正定)矩阵, 它所有的特征值都为实数, 且大于或等于零。

由式(2.12)可知, 若 $m=n$, 则

$$\mathbf{Q}_n^H \mathbf{R} \mathbf{Q}_n = \lambda_n \mathbf{Q}_n^H \mathbf{Q}_n = \lambda_n \|\mathbf{Q}_n\|^2 \quad (2.14)$$

其中, “ $\|\cdot\|$ ”表示向量的范数运算, 必为实数。而式(2.14)等号左边为一标量, 且

$$(\mathbf{Q}_n^H \mathbf{R} \mathbf{Q}_n)^H = \mathbf{Q}_n^H \mathbf{R} \mathbf{Q}_n \quad (2.15)$$

即它也为一实数, 由此, 特征值 λ_n 亦为实数。

由上述可知, 对应于 \mathbf{R} 不同特征值的特征向量是正交的。若有重复特征值出现, 也可选取相应的特征向量互相正交。同时, 调节每个特征向量的模, 使它们都具有单位长度。于是, 构成特征向量矩阵 \mathbf{Q} 的 $L+1$ 个特征向量是相互正交并各自归一的, 即称 \mathbf{Q} 为“正交归一”阵。此时有

$$\mathbf{Q}^H \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \mathbf{Q}^H = \mathbf{I} \quad \text{或} \quad \mathbf{Q}^H = \mathbf{Q}^{-1} \quad (2.16)$$

因此, \mathbf{Q} 的逆存在。容易证明, 信号相关矩阵 \mathbf{R} 是一个正定(或有时为半正定)矩阵, 即对任意一个向量 \mathbf{V} , 都存在

$$\mathbf{V}^H \mathbf{R} \mathbf{V} \geq 0 \quad (2.17)$$

若依次设 \mathbf{V} 等于 \mathbf{Q} 的每一列, 于是

$$\mathbf{Q}^H \mathbf{R} \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^H \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \geq \mathbf{0} \quad (2.18)$$

将式(2.16)代入上式, 则

$$\mathbf{\Lambda} \geq \mathbf{0} \quad (2.19)$$

上式表明, \mathbf{R} 的所有特征值都大于等于零。

(3) 所有特征值之和等于矩阵 \mathbf{R} 的迹, 即为输入信号的功率。

定义一个幺向量

$$\mathbf{1} \stackrel{\text{def}}{=} [1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1]^T \quad (2.20)$$

于是, \mathbf{R} 的特征值之和为

$$\mathbf{1}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{1} = \mathbf{1}^T \mathbf{Q}^H \mathbf{R} \mathbf{Q} \mathbf{1} = \sum_{m=0}^L \sum_{n=0}^L r_{mn} \mathbf{Q}_m^H \mathbf{Q}_n = \sum_{n=0}^L E[|x_n|^2] \quad (2.21)$$

上式等号右边的求和即为矩阵 \mathbf{R} 的迹(矩阵主对角线所有元素之和), 亦即系统输入信号的功率。

(4) 信号相关矩阵 \mathbf{R} 可以被分解为一个实对称矩阵和一个实反对称矩阵, 即

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_a + j\mathbf{R}_b \quad (2.22)$$

其中, 实矩阵 \mathbf{R}_a 、 \mathbf{R}_b 分别满足条件:

$$\mathbf{R}_a^T = \mathbf{R}_a \quad \text{和} \quad \mathbf{R}_b^T = -\mathbf{R}_b$$

不难证明厄米特矩阵 \mathbf{R} 的这一性质。因为

$$\mathbf{R}^H = (\mathbf{R}_a + j\mathbf{R}_b)^H = \mathbf{R}_a^T - j\mathbf{R}_b^T = \mathbf{R}$$

反对称矩阵 \mathbf{R}_s 的对角元素全部为零。

(5) 若 \mathbf{W} 为 $L+1$ 维的权向量, 则对相关矩阵 \mathbf{R} , 存在关于 \mathbf{W} 的一个瑞利(Rayleigh)商(见参考文献[1]), 且对于所有 \mathbf{W} 的瑞利商均为实数。

定义向量 \mathbf{W} 的瑞利商 $\text{Ray}(\mathbf{W})$ 为

$$\text{Ray}(\mathbf{W}) = \frac{\mathbf{W}^H \mathbf{R} \mathbf{W}}{\mathbf{W}^H \mathbf{W}} \quad (2.23)$$

其中等号右边的分子即为图 2.1 中自适应系统的输出信号功率, 即

$$E[|y|^2] = E[(\mathbf{W}^T \mathbf{X})^* (\mathbf{X}^T \mathbf{W})] = \mathbf{W}^H \mathbf{R} \mathbf{W} \quad (2.24)$$

显然, 等式(2.23)右边的商是实数。

2.3 信号子空间和噪声子空间

事实上, 可以将图 2.1 自适应系统的输入信号 \mathbf{X} 表示为(有用)信号 \mathbf{S} 及噪声 \mathbf{N} 之和, 即

$$\mathbf{X} = \mathbf{S} + \mathbf{N} \quad (2.25)$$

若输入噪声和信号互不相关, 则相关矩阵 \mathbf{R} 可写为

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{S}^* \mathbf{S}^T] + E[\mathbf{N}^* \mathbf{N}^T] = \mathbf{R}_s + \mathbf{R}_n \quad (2.26)$$

式中, \mathbf{R}_s 、 \mathbf{R}_n 分别表示信号和噪声的相关矩阵。

自适应系统的输入向量 \mathbf{X} 构成了 $L+1$ 维的酉向量空间 U^{L+1} , 假如有 M 个(信号)源同时作用于系统的 $L+1$ 个输入端, 则第 m 个源在第 l 个输入端上的输入信号可写为

$$s_{ml}(t) = a_m(t) e^{j\omega t} e^{-j\varphi_{ml}} \quad (2.27)$$

其中, φ_{ml} 表示信号的相位滞后。

若第 m 个(信号)源的复包络 $a_m(t)$ 为随机的, 则它的输入信号向量 \mathbf{S}_m 也为一随机向量。可以用它在 $L+1$ 个输入端上的相位滞后定义一个信号方向向量 \mathbf{D}_m , 即

$$\mathbf{D}_m \stackrel{\text{def}}{=} [e^{-j\varphi_{m0}} \quad e^{-j\varphi_{m1}} \quad \cdots \quad e^{-j\varphi_{mL}}]^T \quad (2.28)$$

则由 M 个信号方向向量所张成的空间 $\text{Span}\{\mathbf{D}_m, m=1, 2, \dots, M\}$ 称为在全空间 U^{L+1} 中的 M 维信号子空间 C (其中 $M \leq L+1$), 而将它在全空间 U^{L+1} 中的正交补空间 C^\perp 称为 $L-M+1$ 维噪声子空间。

为了说明信号子空间和噪声子空间的概念, 由附录 A 中复(解析)信号和复包络之间求相关值的等价关系, 可将信号相关矩阵 \mathbf{R}_s 表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_s &= E\{[\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \cdots + \mathbf{S}_M]^* [\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 + \cdots + \mathbf{S}_M]^T\} \\ &= [\mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2 \cdots \mathbf{D}_M]^* E[\mathbf{A}^* \mathbf{A}^T] [\mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2 \cdots \mathbf{D}_M]^T \\ &= \mathbf{D}^* E[\mathbf{A}^* \mathbf{A}^T] \mathbf{D}^T \end{aligned} \quad (2.29)$$

式中, $\mathbf{A} = [a_1(t) a_2(t) \cdots a_M(t)]^T$ 为信号复包络向量, 它是一个随时间缓变的随机向量; \mathbf{D} 称为信号方向矩阵。

由式(2.29)可知, 只要 M 个信号方向向量相互线性无关, 它们就构成 M 维信号子空间 C 。可以再构建全空间 U^{L+1} 中的正交补空间 C^\perp , 即在 U^{L+1} 中任意找到一组线性无关的方向向量 $\{\mathbf{D}_i, i=M+1, M+2, \dots, L+1\}$, 且对于其中的每个向量都存在

$$D_i \perp D_m, m = 1, 2, \dots, M \quad (2.30)$$

其中, \perp 表示两向量正交。于是, 子空间 $\text{Span}\{D_i, i=M+1, M+2, \dots, L+1\}$ 即为正交补 C^\perp , 且称为噪声子空间。

全空间 U^{L+1} 可用一组标准正交基 $\epsilon_i (i=1, 2, \dots, L+1)$ 来表示, 即可先在信号子空间 $\text{Span}\{D_m, m=1, 2, \dots, M\}$ 中对每个向量 $D_m (m=1, 2, \dots, M)$ 逐一进行 Gram-Schmidt 正交处理, 其正交化过程为

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= D_1 / \|D_1\| \\ \epsilon'_2 &= D_2 - \epsilon_1 \epsilon_1^H D_2, \quad \epsilon_2 = \epsilon'_2 / \|\epsilon'_2\| \\ \epsilon'_m &= D_m - P_{m-1} D_m, \quad \epsilon_m = \epsilon'_m / \|\epsilon'_m\|, \quad m = 3, \dots, M \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

其中, $P_m = \sum_{k=1}^m \epsilon_k \epsilon_k^H$ 为 $m (\leq M)$ 维信号子空间 $\text{Span}\{\epsilon_k, k=1, 2, \dots, m\}$ 上的正交投影矩阵。图 2.2 简单表示 Gram-Schmidt 正交化方法的原理, 图中, 将向量 D_3 投影到由标准正交基向量 ϵ_1, ϵ_2 所构成的平面上, 因为在正交投影矩阵 P_2 中, $\epsilon_1 \epsilon_1^H$ 对向量 D_3 的作用为, 取标积 (ϵ_1, D_3) 再和正交基向量 ϵ_1 相乘。而

$$(\epsilon_1, D_3) = \epsilon_1^H D_3 = \|\epsilon_1\| \|D_3\| \cos \beta_1 = \|\overrightarrow{OE_1}\|$$

于是, 上式乘 ϵ_1 以后就成为向量 $\overrightarrow{OE_1}$ 。同理, 可得 P_2 中另一项 $\epsilon_2 \epsilon_2^H$ 对向量 D_3 的作用, 它实际上可获得向量 $\overrightarrow{OE_2}$, 而正交基向量 ϵ_1, ϵ_2 又相互垂直, 故 $\overrightarrow{OE_1} + \overrightarrow{OE_2} = \overrightarrow{OE}$, 由此, 正交化过程

$$D_3 - P_2 D_3 = D_3 - \overrightarrow{OE} = \epsilon'_3$$

对垂直于底部平面的向量 ϵ'_3 经长度归一后, 就得到一个新的基向量 ϵ_3 。

这样, 可以将信号子空间 C 重新表示为 $\text{Span}\{\epsilon_m, m=1, 2, \dots, M\}$ 。若继续上述正交化过程, 则可以得到 $L-M+1$ 维信号子空间 C 的正交补空间 C^\perp , 即噪声子空间 $\text{Span}\{\epsilon_m, m=M+1, M+2, \dots, L+1\}$ 。

显然, U^{L+1} 空间的标准正交基组并不是唯一的, 若在上述正交过程中, 第一个基向量 ϵ_1 不用 D_1 , 而用 $D_k (k=2, 3, \dots, M)$ 长度归一来获得, 则可构成许多组标准正交基。

利用信号相关矩阵 R 的特征向量所组成的正交矩阵 Q 可以进行正交变换, 即可将 U^{L+1} 空间中的一组标准正交基变换到另一组标准正交基。若 $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{L+1}$ 为 U^{L+1} 空间中的一组标准正交基, Q 为该组标准正交基上的正交矩阵, 则有正交变换

$$[\eta_1 \ \eta_2 \ \dots \ \eta_{L+1}]^T = Q^H [\epsilon_1 \ \epsilon_2 \ \dots \ \epsilon_{L+1}]^T \quad (2.32)$$

其中, $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{L+1}$ 也为一组标准正交基, 事实上

$$\eta_l^T = Q^H [\epsilon_1 \ \epsilon_2 \ \dots \ \epsilon_{L+1}]^T, \quad l = 1, 2, \dots, L+1$$

于是

$$\begin{aligned} \eta_l^H \eta_k &= Q_l^T [\epsilon_1 \ \epsilon_2 \ \dots \ \epsilon_{L+1}]^H [\epsilon_1 \ \epsilon_2 \ \dots \ \epsilon_{L+1}] Q_k^* \\ &= Q_l^T I Q_k^* = \delta_{lk} \end{aligned}$$

式中, 利用

$$\epsilon_m^H \epsilon_n = \delta_{mn}$$

且

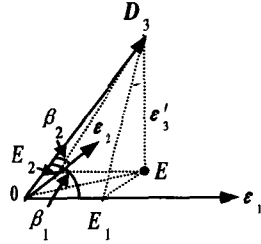


图 2.2 向量正交化处理

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}$$

由此可知, 经正交变换得到的一组新基向量也是一组标准正交基。然而, 由式(2.32)知, 若信号子空间为 $\text{Span}\{\boldsymbol{\varepsilon}_m, m=1, 2, \dots, M\}$, 经正交变换后基向量 $\boldsymbol{\eta}_l (l=1, 2, \dots, M)$ 并不都能保证落在信号子空间之内。但若先在 M 维信号子空间 C 内对一组标准正交基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_M$ 施行正交变换。此时, 正交矩阵也相应为 $M \times M$ 维。这样的变换空间 C 保证为 U^{L+1} 的不变子空间。同理, 可以施行对噪声子空间的正交变换。

信号子空间和噪声子空间的物理意义是明显的, 若一个理想的自适应系统输入无噪声, 则经统计平均所得的输入信号向量必落在信号子空间 C 内。但若系统输入有噪声时, 它就不能完全落在信号子空间内, 而它中间的噪声分量则应落在噪声子空间 C^\perp 内。

定义自适应系统输入第 k 个(信号)源和第 l 个源间的空间相关系数 α_{kl} 为

$$\alpha_{kl} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{D}_k^\top \mathbf{D}_l^*}{\|\mathbf{D}_k\| \|\mathbf{D}_l\|} \quad (2.33)$$

进而定义系统输入(信号)源的空间相关矩阵 \mathbf{B} 为

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= [\mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2 \cdots \mathbf{D}_M]^\top [\mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2 \cdots \mathbf{D}_M]^* \\ &= (L+1) \begin{bmatrix} 1 & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1M} \\ \alpha_{21} & 1 & \cdots & \alpha_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{M1} & \alpha_{M2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.34)$$

式中, $\alpha_{kl} = \alpha_{lk}^*$, 由此可知, 空间相关矩阵 \mathbf{B} 也是一个厄米特矩阵。

2.4 梯度运算

定义一个实标量函数 $\xi(\mathbf{W})$ 对向量 \mathbf{W} 的梯度

$$\begin{aligned} \nabla &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \xi(\mathbf{W})}{\partial \mathbf{W}} \\ &= \left[\frac{\partial \xi}{\partial w_{0a}} + j \frac{\partial \xi}{\partial w_{0b}} \frac{\partial \xi}{\partial w_{1a}} + j \frac{\partial \xi}{\partial w_{1b}} \cdots \frac{\partial \xi}{\partial w_{La}} - j \frac{\partial \xi}{\partial w_{Lb}} \right]^\top \end{aligned} \quad (2.35)$$

式中, w_{1a}, w_{1b} 分别是向量 \mathbf{W} 的第 l 个元素 w_l 的实部和虚部, 即 $w_l = w_{1a} + jw_{1b}$; ξ 即为 $\xi(\mathbf{W})$ 。

由定义可知, 实标量函数的梯度是一个向量, 其方向代表该函数最陡下降时 \mathbf{W} 变化方向的负向。规定一个复标量函数的梯度无定义。

如前面图 2.1 所示的自适应系统, 其输出信号(平均)功率为 \mathbf{W} 的二次型函数, 即为 $\mathbf{W}^H \mathbf{R} \mathbf{W}$, 且是一个实标量。于是, 它对向量 \mathbf{W} 的梯度为

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \mathbf{W}} (\mathbf{W}^H \mathbf{R} \mathbf{W}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{W}} \left[\sum_{k=0}^L \sum_{l=0}^L (w_k^* r_{kl} w_l) \right] \quad (2.36)$$

其中, $r_{kl} = r_{kl} + jr_{klb}$ 为相关矩阵 \mathbf{R} 的第 k 行第 l 列的元素。因为

$$w_k^* r_{kl} w_l = (w_{ka} - jw_{kb})(r_{kla} + jr_{klb})(w_{1a} + jw_{1b}) \quad (2.37)$$