

现代物理学丛书

量子力学

卷 II

(第二版)

曾谨言 著

科学出版社

438258

Z, 4

2

现代物理学丛书

量子力学

卷 II

(第二版)

曾谨言 著



科学出版社

1997

D278/31²

内 容 简 介

本书作者的《量子力学》(上、下册)出版以来,深受读者欢迎,它是国家教委第一次(1988)颁发的六本国家级高校优秀物理教材之一。根据广大读者要求和目前高校实际情况,对《量子力学》作了较大幅度改动,修改后的《量子力学》分为两卷。卷 I 作为大学本科生教材或参考书,卷 II 作为研究生教学用书或参考书。第二版中作者又作了详细地校改和调整。

量子力学的基本概念、原理和一些常用近似方法已在卷 I 中阐述。卷 II 分十章,第一章讲述量子力学与经典力学的关系。第二章介绍量子力学的第三种理论形式——Feynman 的路径积分。第九章讲述相对论量子力学。第十章讲述辐射场的量子化及其与物质的相互作用。应用量子力学处理各种问题的方法和技巧有三章:第三章的二次量子化方法(粒子数表象),第四章的散射理论(续)和第五章的角动量理论(续)。有关对称性的内容有三章:第六章讲量子体系的对称性,第七章讲氢原子和谐振子的动力学对称性,第八章讲时间反演。为配合有关章节的学习,附录 A 给出分析力学简要回顾,附录 B 给出群与群表示理论简介。为帮助初学者学习,书中给出了一些练习题和思考题,有几章的后面还附有相当数量的习题以及答案。

本书除适宜作为高校有关专业研究生的教学以外,也是物理学工作者的一本有用的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

量子力学 卷II/曾谨言著. —2版. —北京:科学出版社, 1997.7

(现代物理学丛书/周光召主编)

ISBN 7-03-006137-3

I. 量... II. 曾... III. 量子力学 IV. 0413.1

中国版本图书馆CIP数据核字(97)第13625号

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1993年3月第一版 开本:850×1168 1/32

1997年3月第二版 印张:16 1/4

1997年8月第二次印刷 字数:421 000

印数:801—3 800

定价:32.00元

《现代物理学丛书》编委会

主 编 周光召
副主编 汪德昭 谢希德
编 委 于 敏 王之江 冯 端 吴式枢
汤定元 何祚庥 李整武 张志三
苟清泉 郝柏林 葛庭燧

第一版 序 言

量子力学是在人类的生产实践和科学实验深入到微观物质世界领域的情况下，在 20 世纪初到 20 年代中期建立起来的。人们从实践中发现，在原子领域中，粒子的运动行为与日常生活经验中粒子的运动行为有质的差异，在这里我们碰到一种新的自然现象——量子现象，它们的特征要用一个普适常数——Planck 常数 h 来表征。经典物理学在这里碰到了无法克服的矛盾，量子力学的概念与规律就是在解决这些矛盾的过程中逐步揭示出来的。

但是，不能认为量子力学规律与宏观物质世界无关。事实上，量子力学的规律不仅支配着微观世界，而且也支配着宏观世界¹⁾，可以说全部物理学都是量子物理学的²⁾。已被长期实践证明的描述宏观自然现象的经典力学规律，实质上不过是量子力学规律的一个近似。一般说来，在经典物理学中不直接涉及物质的微观组成问题，因而量子效应并不显著，所以经典力学是一个很好的近似。例如，行星绕太阳的运动，与氢原子中电子绕原子核的运动相似，都受量子力学规律支配，但对于前者，量子效应是微不足道的（角动量 $mvR \gg h$ ， m 是行星质量， v 是速度， R 是轨道半径），因此，经典力学规律被证实是相当正确的。

但有一些宏观现象，量子效应也直接而明显地表现出来。例如，极低温下（ v 很小）的超导现象与超流现象；又例如，白矮星及中子星等高密度（ R 很小）的星体以及常温、常压、常密度情况下质量 m 很小的粒子系（例如，金属中的电子气），量子效应都很显著，

1) R. J. Finkelstein, *Nonrelativistic Mechanics* (1973), Introduction.

2) E. H. Wichmann, *Quantum Physics, Berkeley Physics Course, Vol 4, chap. 1* (1971, McGraw-Hill).

不能忽视。因此,经典力学与量子力学适用范围的分界线,应当根据量子效应重要与否来划分。

量子力学规律的发现,是人们对于自然界认识的深化。量子力学,特别是非相对论量子力学的基本规律与某些基本概念,从它们建立到现在的 60 多年中,经历了无数实践的考验,是我们认识和改造自然界所不可或缺的工具。由于量子力学所涉及的规律极为普遍,它已深入到物理学的各个领域,以及化学和生物学的某些领域。现在,可以说,要在物理学的任何领域进行认真的工作,没有量子力学是不可思议的。因此,量子力学已成为现代物理学的理论基础。

当然,与任何一门自然科学一样,量子力学也只是在不断发展中的相对真理。从量子力学建立以来,对它的某些基本概念以及对其基本规律的一些看法,始终存在着不同见解的争论。这需要通过进一步的科学实践以及揭示新的矛盾而逐步加以解决。这些问题在我们的课程中将不予涉及。

十年前,作者写过一本《量子力学》(上、下册,科学出版社,1981)。该书内容是针对当时国内量子力学教学实际情况而选定的。该书出版以来,受到广大读者欢迎,多次重印,仍不能满足要求。作者先后收到读者近千封热情洋溢的来信,给予了肯定和较高的评价,认为对提高我国量子力学教学水平起了积极的作用。1988年初国家教委颁发了建国以来第一次国家级高校优秀教材奖,该书是获奖的六本物理书之一。

十年来,我国量子力学教学水平有了明显提高。各高校普遍招收了研究生。作为物理及有关专业研究生的基础理论课,普遍设置了高等量子力学课。为适应这种情况,本书将分两卷出版。卷 I 作为本科生教材或参考书,而卷 II 则作为研究生教学参考书。

在撰写本书时,作者参照了国外近年来出版的一些新教材的优点,更多地反映了量子力学在有关科研前沿领域中的应用,同时还选用了同行和作者近年来所做的某些教学研究成果。

* * *

卷 II 第一章较详细地讨论了量子力学与经典力学的关系。这有助于正确了解量子力学理论本身和量子力学的发展史（特别是对早期量子论的评价以及对应原理所起的作用）。第二章讲述量子力学的第三种理论形式，即 Feynman 的路径积分理论。如果说 Heisenberg 的矩阵力学是经典力学的 Hamilton 正则形式的量子对应，Schrödinger 的波动力学则与经典力学的 Jacobi-Hamilton 方程密切相关，而 Feynman 的路径积分理论则与经典力学的 Lagrange 形式（通过作用量）有密切关系。这种理论形式特别有助于形象地展现量子力学与经典力学的关系，并易于向相对论形式推广。

第三章讲述处理全同粒子多体系的一种方便而有用的方法——二次量子化方法。在此方法中，采用了粒子数表象来描述全同粒子系的量子态，并引进粒子产生和湮灭算符来表述各种力学量。这样，全同粒子系的量子态的交换对称性将自动保证。作为应用，还介绍了处理有相互作用的全同粒子系的一种最常用的近似方法，即 Hartree-Fock 自洽场方法，它是独立粒子模型的理论基础。此外，还介绍了处理对关联的一种近似方法，即 BCS 方法和 Bogoliubov-Valatin 的准粒子概念。

第四章简单介绍散射的形式理论以及 Coulomb 散射理论，并通过对 Coulomb 散射振幅的分析简单介绍束缚能级与散射振幅的极点的关系以及 Regge 极点的概念。

第五至八章讲述对称性有关的内容。在量子力学中对称性已成为日常工作的语言。第五章着重从体系的空间旋转不变性来进一步讲述角动量，并为普遍地讲述量子体系的对称性（第六章）做准备。第六章详细讨论了量子体系的对称性与守恒量、能级简并和量子态的标记、跃迁分支比、选择定则等的密切关系，澄清了一些模糊看法，例如对称性是否一定导致守恒量和能级简并等。第七章分析了氢原子和谐振子的动力学对称性。人们熟知， n 维

各向同性谐振子具有比其几何对称性 SO_n 更高的动力学对称性 SU_n 。本章阐明了 n 维氢原子具有 SO_{n+1} 动力学对称性，并给出了波函数和能级的表示式。第八章介绍时间反演。它是一种反么正变换，具有与么正变换很不相同的性质。本章对时间反演态，时间反演不变性以及涉及时间反演态的矩阵元公式作了详细讨论。

第九章介绍作为单电子理论的 Dirac 相对论量子力学，详细讨论它的非相对论极限。第十章从实用的角度介绍了辐射场的量子化。这对非理论物理专业的读者也许是有益的。

附录 A 对分析力学作了扼要的回顾，这主要是为了便于读者了解量子力学与经典力学的关系。附录 B 从利用量子体系对称性来处理问题的角度来简要讲述群及群表示理论。这个附录可以作为物理专业学生学习群论的一个入门和引导。通过它可以了解在处理量子体系对称性时在哪些方面要用到群和群表示理论，使学习更有针对性。

为了有助于读者更深入理解有关的概念和原理，书中安排了适量的思考题和练习题。为增进读者运用量子力学处理具体问题的能力，还备了适当数量习题供读者选用，并附有答案和提示。这些习题中相当部分选自近年来国外研究生资格考试题。采用本书的读者，可同时选用《量子力学习题精选与剖析》¹⁾作为主要参考书。

应该强调，教材是给学生学习用的。教师讲课时应根据不同情况(学生水平，专业需要等)选讲本书的一部分($< 2/3$)，其余部分最好留给学生自由阅读，这有利于不同程度和兴趣的学生发展其聪明才智。教师应该明确，教学的目的主要是培养学生分析问题和解决问题的能力，而不应局限于传授具体的知识。

作 者

1991 年春于北京大学

1) 钱伯初、曾谨言，量子力学习题精选与剖析(1988，科学出版社)。

量子力学一般参考书¹⁾

- [1] Baym, G., Lectures on Quantum Mechanics (1978, Benjamin).
- [2] Bohm, D., Quantum Theory (1954, Constable and Co. London).
- [3] Cohen-Tannoudji, C., Diu, B. & Laloë, F., Quantum Mechanics, Vol. I,II (1977, John Wiley & Sons).
- [4] Das, A. & Mellissinos, A. C., Quantum Mechanics—A Modern Introduction (1986, Gordon and Breach).
- [5] Dirac, P. A. M., The Principles of Quantum Mechanics (4th ed., 1958, Oxford University Press).
- [6] Feynman, R. P. et al., The Feynman Lectures on Physics, Vol. 3, Quantum Mechanics (1965, Addison-Wesley Publishing Co.).
- [7] Landau, L. D. & Lifshitz, M. E., Quantum Mechanics, Non-relativistic Theory (1977, Pergamon Press).
- [8] Merzbacher, E., Quantum Mechanics (1970, John Wiley & Sons).
- [9] Messiah, A., Quantum Mechanics, Vol. I,II (1961, North-Holland).
- [10] Shankar, R., Principles of Quantum Mechanics (1980, Plenum Press).
- [11] Schiff, L., Quantum Mechanics (1967, 3rd edition: McGraw-Hill).
- [12] Wichmann, E. H., Berkeley Physics Course, Vol. 4, Quantum Physics (1971, McGraw-Hill).

量子力学习题参考书

- [1] 钱伯初、曾谨言,量子力学习题精选与剖析(1988,科学出版社).
- [2] Flügge, S., Practical Quantum Mechanics, Vol. I,II (1974, Springer).
- [3] ter Haar, D., Problems in Quantum Mechanics (1975, Academic Press, N. Y.).
- [4] Kogan, V. I. & Galitski, V. M., Problems in Quantum Mechanics (1963, Printice Hall).
- [5] Constantinescu, F. & Magyari, E., Problems in Quantum Mechanics (1976, Pergamon Press).

1) 以作者姓氏字母为序。

目 录¹⁾

序言	i
第一章 量子力学与经典力学的关系	1
1.1 对应原理	1
1.2 Poisson 括号	11
1.3 WKB 近似	15
1.4 中心力场中粒子的准经典近似	29
1.5 Schrödinger 方程与 Jacobi-Hamilton 方程的 关系, 力学与光学的相似性	35
习题	40
第二章 路径积分	45
2.1 传播子	46
2.2 路径积分的基本思想	50
2.3 路径积分的计算方法	54
2.4 Feynman 路径积分理论与 Schrödinger 波动方 程等价	57
2.5 路径积分理论的规范不变性, Aharonov-Bohm 效应	59
*2.6 量子理论发展历史的反思	63
第三章 二次量子化(粒子数表象)	67
3.1 粒子数表象, 粒子产生与湮灭算符	67
3.2 Bose 子单体和二体算符的表示式	74
3.2.1 单体算符	74
3.2.2 二体算符	77
3.3 Fermi 子单体和二体算符的表示式	85
3.3.1 单体算符	86

1) 标有“*”的章节或段落, 供自学选用。

3.3.2	二体算符	88
3.4	坐标表象	91
3.4.1	坐标表象	91
3.4.2	无相互作用 Fermi 气体	94
3.4.3	无相互作用无自旋粒子多体系	98
*3.5	Hartree-Fock 自洽场方法, 独立粒子模型	100
*3.6	对关联, BCS 方法, 准粒子	110
	习题	120
第四章	散射理论(续)	124
4.1	散射的形式理论	124
4.1.1	相互作用表象中态随时间的演化	124
4.1.2	微扰论展开	125
4.1.3	散射矩阵	127
4.1.4	S 矩阵的微扰论展开	128
4.1.5	散射截面	131
4.1.6	分波法	134
4.2	Coulomb 散射	139
4.2.1	抛物线坐标解法	140
4.2.2	球坐标解法	146
*4.2.3	Regge 极点	151
第五章	角动量理论(续)	154
5.1	转动算符的矩阵表示, D 函数	154
5.2	陀螺的转动	163
5.2.1	对称陀螺的转动谱的代数解法	164
5.2.2	对称陀螺的波函数	166
*5.2.3	非轴对称陀螺的转动谱	174
5.3	不可约张量 Wigner-Eckart 定理	177
5.3.1	不可约张量算符	177
5.3.2	Wigner-Eckart 定理	180
5.3.3	张量积	186
5.3.4	一阶张量的投影定理, 矢量模型	188

*5.4	张量积的矩阵元	193
*5.5	多个角动量的耦合	201
*5.5.1	3个角动量的耦合, Racah 系数, $6j$ 符号	201
*5.5.2	4个角动量的耦合, $9j$ 符号	210
第六章	量子体系的对称性	216
6.1	绪论	216
6.1.1	对称性在经典物理学中的应用	216
6.1.2	对称性在量子物理学中更深刻的内涵	219
6.2	守恒量与对称性	223
6.3	量子态的分类与对称性	237
6.3.1	量子态按对称性群的不可约表示分类	237
6.3.2	简并态的标记, 子群链	241
6.3.3	力学量的矩阵元	242
6.4	能级简并度与对称性的关系	248
6.4.1	一般讨论	248
6.4.2	一维粒子能级的简并性	251
6.4.3	二维势阱中粒子能级的简并性	261
6.4.4	轴对称变形势	266
6.5	对称性在简并微扰论中的应用	269
6.5.1	一般原则及应用举例	269
6.5.2	对称性在原子光谱分析中的应用, LS 耦合	276
第七章	氢原子与谐振子的动力学对称性	284
7.1	氢原子的动力学对称性	284
7.1.1	氢原子的经典力学描述	284
7.1.2	二维氢原子的 SO_3 动力学对称性	286
*7.1.3	三维氢原子的 SO_3 动力学对称性	289
*7.1.4	n 维氢原子的 SO_{n+1} 动力学对称性	292
7.2	谐振子的动力学对称性	308
7.2.1	各向同性谐振子的经典力学描述	308
7.2.2	各向同性谐振子的么正对称性	310
7.2.3	二维各向同性谐振子	312
7.2.4	三维各向同性谐振子	315

第八章 时间反演	321
8.1 时间反演态与时间反演算符	322
8.2 时间反演不变性	329
8.2.1 经典力学中的时间反演不变性	329
8.2.2 量子力学中的时间反演不变性	330
8.2.3 Schrödinger 方程与时间反演不变性.....	332
8.2.4 T^2 的本征值与统计性的关系.....	334
8.2.5 Kramers 简并	335
8.3 力学量的分类与矩阵元的计算	335
第九章 相对论量子力学	338
9.1 Klein-Gordon 方程.....	341
9.2 Dirac 方程	346
9.2.1 Dirac 方程的引进	346
9.2.2 电子的速度算符,电子自旋.....	350
9.2.3 α 与 β 的矩阵表示	352
*9.2.4 中微子的二分量理论	355
9.3 自由电子的平面波解	358
9.4 电磁场中电子的 Dirac 方程与非相对论极限	364
9.4.1 电磁场中电子的 Dirac 方程	364
9.4.2 非相对论极限与电子磁矩	365
9.4.3 中心力场下的非相对论极限,自旋轨道耦合	366
9.5 氢原子光谱的精细结构	370
9.5.1 中心力场中电子的守恒量	370
9.5.2 $(\hat{R}, \hat{j}^2, j_z)$ 的共同本征态.....	373
9.5.3 径向方程	374
9.5.4 氢原子光谱的精细结构	377
习题.....	394
第十章 辐射场的量子化及其与物质的相互作用	397
10.1 经典辐射场	397
10.1.1 经典电动力学简要回顾	397
10.1.2 经典辐射场的平面波展开	401
10.2 辐射场的量子化	404

10.3	多极辐射场及其量子化	408
10.3.1	经典辐射场的多极展开	408
*10.3.2	多极辐射场的量子化	414
10.4	自发多极辐射	416
附录 A	分析力学简要回顾	426
A.1	最小作用原理与 Lagrange 方程	426
A.2	Hamilton 正则方程, Poisson 括号	431
A.3	正则变换, 生成函数	436
A.4	Jacobi-Hamilton 方程	444
A.5	正则方程的积分	447
附录 B	群与群表示理论简介	452
B.1	群的基本概念	454
B.1.1	群与群结构	454
B.1.2	子群与陪集	457
B.1.3	类, 不变子群, 商群	459
B.1.4	同构与同态	460
B.2	量子体系的对称性变换群	461
B.2.1	么正变换群	461
B.2.2	置换群	466
B.3	群表示的基本定理	471
B.3.1	群表示的基本概念	471
B.3.2	有限群的表示的两条基本定理	473
B.4	特征标	481
B.4.1	特征标概念	481
B.4.2	几条重要定理	482
B.4.3	特征标的一种计算方法, 类的乘积	485
B.5	群表示的直积与群的直积	489
B.5.1	群表示的直积及其约化	489
B.5.2	群的直积及其表示	492
	常用物理常数简表	496
	索引	498

第一章 量子力学与经典力学的关系

1.1 对应原理

有关对应原理 (correspondence principle) 的系统阐述, 最早见于 Bohr 1918 年的文章¹⁾, 而正式使用对应原理这个词汇最早见于他 1920 年的文章²⁻⁴⁾。对应原理提出: 在大量子数极限情况下, 量子体系的行为将渐近地趋于与经典力学体系相同。然而应该提到, 对应原理思想的萌芽, 在 Bohr 1913 年发表的划时代的论文⁵⁾——“伟大的三部曲” (great trilogy)——中已可以明显看出(见其中第一篇论文, §3), 虽然文中并未出现对应原理这个词汇⁶⁾。1913 年 12 月, 在哥本哈根物理学会上的报告中, Bohr 又特别强调了思想的重要性⁷⁾。从 Bohr 1913 年的文章开始, 差不多整个十年中, Bohr 的思想对于原子物理学和量子理论的发展有极深刻的影响。这个时期的量子理论, 有人称之为“早期量子论” (The old quantum theory) 或称为“对应原理的量子力学” (The quantum mechanics of the correspondence principle)⁶⁾。它与 Planck-Einstein 的关于辐射的量子理论一道, 扮演了“A

-
- 1) N. Bohr, *Proc. Dan. Acad. Sc.* (1918), (8) 4, No. 1, part I, II.
 - 2) N. Bohr, *Z. Phys.*, 2 (1920), 423.
 - 3) N. Bohr, *The Theory of Spectra and Atomic Constitution* (1922, Cambridge University Press).
 - 4) J. Rud. Nielsen 编, Niels Bohr Collected Works, Vol. 3, *The Correspondence Principle (1918—1923)* (1976, North-Holland).
 - 5) N. Bohr, *Phil. Mag.*, 26 (1913), 1, 476, 857.
 - 6) F. Hund, *The History of Quantum Theory* (英译本: G. Reece 译, 1974, George G. Harap. & Co.; 中译本: 甄长荫、徐辅新译, 量子论的成长道路, 1994, 高等教育出版社).
 - 7) N. Bohr, *Fysisk Tidsskr.*, 12 (1914), 97.

provisional quantum mechanics of simple system” 的角色⁶⁾。Bohr 的早期量子论为经典物理学通往微观世界的新力学的过渡铺设了一座桥梁。1925 年德国的年轻物理学家 Heisenberg 正是通过 Bohr 的对应原理这座桥梁最终建立了微观体系的新力学——矩阵力学。Heisenberg 的矩阵力学的提出，可以认为是 Bohr 对应原理的逻辑上发展的结果⁶⁾。

不少原子物理学的教材中，在讲述 Bohr 理论时把角动量量子化条件放在很突出的地位。这可能出自教学法的考虑。但应强调，量子化条件并非 Bohr 理论中最实质性的部分。从历史事实来看，角动量量子化条件并不是 Bohr 一人的贡献⁶⁾。F. Hund 认为，Bohr 量子论的主要贡献有两点⁶⁾：

(1) 光谱学中的 Rydberg-Ritz 组合原则

$$\nu = F(n_1, \dots) - F(n_2, \dots) \quad (1)$$

是量子关系式

$$h\nu = E(n_1, \dots) - E(n_2, \dots) \quad (2)$$

的表现。

(2) 频率

$$\nu = [E(n + \tau) - E(n)]/h \quad (3)$$

当量子数很大时 ($n \gg 1$, $n \gg \tau$)，将趋于经典特征频率 $\nu(E)$ 的 τ 倍。

后一点正是对应原理的体现。Bohr 第一篇文章⁸⁾ § 3 中正是根据这个思想来推导出氢原子能级公式，并在同一节中由此而得出了圆轨道的角动量量子化条件。

Bohr 在后来写的综述文章^{1,9)}中是这样来概括他的工作的。他认为他的理论中有两条最基本的假定：

8) P. Ehrenfest, *Verh. D. Phys. Ges.*, 15 (1913), 451 一文在分析转子运动时，已提出了角动量量子化条件。更早一些，J. W. Nicholson, *Monthly Not. Astr.*, 72 (1912), 49, 139, 677, 692, 诸文中已提到，让电子的轨道角动量等于 $h/2\pi$ 。Bohr 的文章⁸⁾中就提到了 Nicholson 的工作。

9) N. Bohr, *Proc. Dan. Acad. Sc.* (1922), (8) 4. No. 1, part III.

(1) 原子能够,而且只能够稳定地存在于与分立的能量对应的一系列状态中,这些态称为定态。因此,体系能量的任何改变,包括吸收或发射电磁辐射,都必须在两个定态之间以跃迁的方式进行。

(2) 在两个定态之间跃迁时,吸收或发射的辐射频率 ν 是唯一的,其值由下式给出:

$$h\nu = E' - E'' \quad (\text{频率条件}) \quad (4)$$

这里 h 是 Planck 常数, E' 与 E'' 是所考虑的两个定态的能量 ($E' > E''$)。

换句话说,Bohr 理论最核心的思想有两条:一是原子具有能量不连续的定态概念,二是两个定态之间的量子跃迁概念和频率条件。这两条可以认为是对实验事实的理论概括,在尔后发展起来的量子力学中仍然被保留了下来。

当然,只根据这两个假定还不能把原子的分立能量确定下来。Bohr 是怎样求出氢原子能级的呢?在他的第一篇文章²⁾ §1 中得出了氢原子能级,在 §2 中利用所得到的能级公式和频率条件分析了氢原子和 He^+ 的光谱,在 §3 中则基于对应原理的思想来论证 §1 中一些做法的正确性。下面简述一下 Bohr 的思路。设电子在 Coulomb 场

$$V(r) = -\frac{\kappa}{r} \quad (5)$$

中运动(对类氢离子 $\kappa = Ze^2$)。考虑束缚态 ($E < 0$)。按经典力学,电子轨道是一个椭圆。设半长轴为 a , 半短轴为 b , 焦距 $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, 偏心率 $e = c/a$, 则电子能量 E 只依赖于半长轴的值(见本书 P.297, §7.1, 附录 1)

$$E = -\kappa/2a \quad (6)$$

电子轨道的周期 T 也只与 a 有关

$$T^2 = 4\pi^2 m a^3 / \kappa \quad (7)$$

m 为电子质量(约化质量),因此,频率