

散体极限平衡 理论基础

陈 震 编

水 利 电 力 出 版 社

散体极限平衡理论基础

陈震 编

*

水利电力出版社出版

(北京三里河路6号)

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

水利电力出版社印刷厂印刷

*

787×1092毫米 32开本 6.5印张 139千字

1987年3月第一版 1987年3月北京第一次印刷

印数0001—1790册 定价1.55元

书号 15143·6233

目 录

前言

第一章 绪论	1
§ 1.1 土的强度条件与剪切特性概说	1
§ 1.2 土体应力应变特性的塑性模型化	7
§ 1.3 散体极限平衡课题的解	8
§ 1.4 极限平衡状态的平面与空间课题	9
第二章 散体极限平衡方程组及其特征线数值解法	11
§ 2.1 极限平衡方程组	11
§ 2.2 极限平衡方程组的特征线解法	17
§ 2.3 三类边值课题	31
第三章 地基的极限荷载	37
§ 3.1 极限平衡区的图象及其力学特征	37
§ 3.2 一般条件下地基三个特征区中 θ 角与特征应力 σ 的计算	46
§ 3.3 地基的极限荷载	58
§ 3.4 按两侧挤出状态确定地基的极限荷载	78
第四章 斜坡的极限平衡状态	84
§ 4.1 斜坡的极限平衡状态及其边界条件	84
§ 4.2 斜坡极限平衡课题的数值解法	88
§ 4.3 斜坡极限平衡课题的间断解	98
第五章 挡土墙上的土压力	104
§ 5.1 挡土墙上的主动土压力	104
§ 5.2 挡土墙上的被动土压力	123
第六章 散体极限平衡课题的极限分析法	132
§ 6.1 散体极限平衡课题的正确解	132

§ 6.2	塑性体的流动法则与塑性势.....	137
§ 6.3	地基极限平衡课题的上限解.....	140
§ 6.4	斜坡极限平衡课题的上限解.....	160
§ 6.5	土压力课题的上限解.....	172
§ 6.6	极限平衡课题的下限解.....	178
§ 6.7	散体极限平衡理论简评.....	188
主要参考文献		195

第一章 绪 论

§ 1.1 土的强度条件与剪切特性概说

散体极限平衡理论又称为土的塑性平衡理论，这一理论研究散体或土体在外荷载作用下达到极限平衡状态或塑性平衡状态时的应力分布场与塑性应变速度的分布场，借以决定散体或土体在已知边界条件下的极限荷载。

在研究土体的极限平衡状态课题时，土的强度或破坏准则是个重大影响因素。

土体中任一点达到极限平衡状态的强度条件有不同的表达方式，按库伦 (C.A.Coulomb) 强度条件表示时：

$$\tau_f = c + \sigma_n \operatorname{tg} \varphi \quad (1-1)$$

式中 τ_f ——该点土的抗剪强度；

c ——土的凝聚力；

φ ——内摩擦角；

σ_n ——剪切面上的法向作用应力。

按摩尔-库伦 (Mohor-Coulomb) 强度条件表示时：

$$\sin \varphi = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3 + 2c \operatorname{ctg} \varphi} \quad (1-2)$$

式中 σ_1 、 σ_3 ——分别为某点达极限平衡状态时所受的大、小主应力。

大量试验研究指出，土的强度条件或破坏准则比起其它的破坏准则例如引伸的特列斯卡 (H.Tresca) 破坏准则与引伸的冯·米塞斯 (R.Von.Mises) 破坏准则，更接近或符合摩尔-库伦强度条件。

但是，土的上述强度条件都是根据土体剪破时之应力应变条件决定的，而土体达到剪破以前的剪切特性或应力应变特性则没有反映。实际上，在与剪切特性直接有关的土体稳定性研究中，剪破以前与剪破时的应力应变特性都是重要的。甚至，可以说，剪破以前的应力应变特性更具有实际意义。因为，实际土坡由稳定状态到剪破状态或滑动破坏是土坡应力应变状态发展的结果。开始时，稳定状态土坡的变形可能以压缩变形为主，而后则逐渐发展为以剪切变形为主，最后导致土坡的滑动破坏。因而，过去常用剪破时之应力状态决定的强度参数 c 、 φ 设计土坡，且假定滑动面上各点土的抗剪强度同时发挥作用，用抗滑阻力与滑动力之比表示土坡稳定性的方法，难以合理地具体表达土坡的稳定程度。而且，假定滑动面上各点土的抗剪强度同时发挥作用的看法也常是不符合土的实际情况的。比较合理的稳定性表示方法应该是按土坡的变形发展过程定量地估定其稳定性或安全程度。例如，可假设几种高度相同而边坡坡度不同的土坡断面，根据不同断面土坡的不同应力状态，采用相应应力状态下土体的应力应变特性指标，计算出不同断面不同应力状态下的土坡变形情况，其中包括判断出土坡达到破坏状态时的变形或使土坡失掉正常工作条件时的过大变形。以破坏状态土坡的坡度与实际设计采用的边坡坡度之比值作为实际土坡的稳定性安全系数。这样决定的安全系数与土坡变形发展情况相联系，在概念上更为合理、明确。当然，联系土坡的变形发展情况还可能采用其它形式表达土坡的安全程度。在计算不同应力状态下土坡的变形情况时需要知道不同应力状态下土的应力应变特性及其指标，其中包括剪破前的应力应变特性在内。为此，需要建立不同应力状态下土体应力应变特

性的计算模型。但是，土体不同于其它均质连续性材料，应力状态的改变常会引起其物理力学性质的显著变化，而且在其受荷过程中，常伴有体积的变化与变形。例如，硬土（密实土）在其受剪过程中有剪胀性，表现出所谓应变软化现象；松软土则表现剪缩性，发生应变硬化现象，如图1-1(a)中的实曲线所示。图中的虚线是经过能量校正后的硬土的应力应变关系。另外，土体的变形常由可恢复的所谓弹性变形与不可恢复的塑性变形所组成，如图1-1(b)所示。

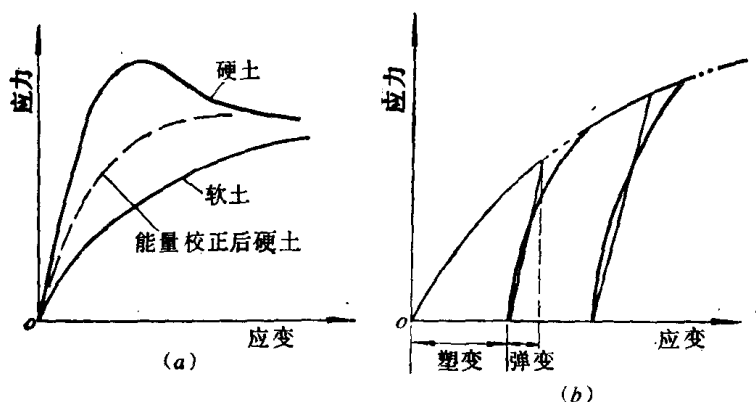


图 1-1

在图1-1(a)中，如果把土体破坏以前的应力应变发展过程（或应力路径）看作土体最后达到破坏的前期破坏过程的话，则整条应力应变曲线就可看作土体的破坏（过程）曲线或剪破曲线。这样的破坏曲线称为广义破坏曲线。如果土体是在三向主应力（大主应力 σ_1 、中主应力 σ_2 与小主应力 σ_3 ）作用下最后达到破坏，则按剪破全过程（包括前期破坏过程与剪破阶段）中不同阶段的三个主应力值可在三个主应力空间绘出相应的广义破坏曲面。广义的破坏曲面将是封闭型

的。有关这方面的研究属于土的本构理论的范畴，本书从略。

目前，在研究土的应力应变特性方面大致存在两派不同的研究方法。一派是以罗斯科 (K.H. Roscoe) 为中心，把土体视为一种连续体。另一派以罗 (P.W. Rowe) 为中心，把土体视为许多颗粒的集合体。这两派的研究方向与斯肯普顿 (A.W. Skempton)、毕肖普 (A.W. Bishop)、贝伦 (L. Bjerrum) 等人的研究有相当大的不同。罗斯科等人的研究，目前虽尚处在学术研究的进一步完善阶段，但他们的研究有可能成为揭示土的应力应变特性或本构关系的重要线索。

重塑饱和粘性土的不排水剪 (含水量不变) 试验得出不同超固结比 (OCR) 的有效应力路径，如图1-2所示。由图看出，不同OCR值的有效应力路径不同，但在剪破时都在不同 Q 点达到土的强度包线 VQ 。其中，OCR约在2.5以下的正常固结与轻超固结土的有效应力路径，基本上都达到同一点 Q 。显然，强度包线应在此土的破坏曲面上。图中的 P 点虽为正常固结应力状态，远未达到剪破条件，但按上述关于广义破坏曲面的概念，该点 P 可视为广义破坏曲面的一个边界点，应力路径 PRQ 线视为封闭型广义破坏曲面上的一条线。

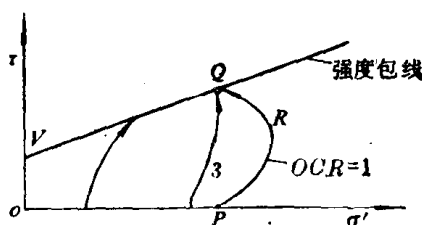


图 1-2

图1-3表示赫沃斯列夫 (H.J.Hvorslev) 对各种超固结比的重塑饱和粘性土的不排水剪切试验结果与规律性。图示规律性说明, 不同等值饱和含水量 w 的超固结粘性土, 其 $\tau, \sim \sigma'$ 关系线 TQ 、 $T'Q'$ 等相互平行, 且都与正常固结条件下的 $\tau, \sim \sigma'$ 关系线 vQ 相交于不同 Q 点。由图1-2已知, 这些 Q 点也是正常固结条件下不同应力路径 PRQ 、 $P'R'Q'$ 等与 vQ 线的接点或终点。因而, 可将不同 σ' 时正常固结条件下的应力路径 PRQ 、 $P'R'Q'$ 等与图1-3所示的不同等值饱和

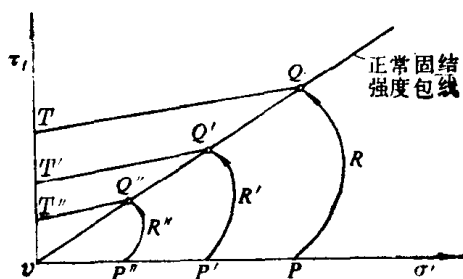


图 1-3

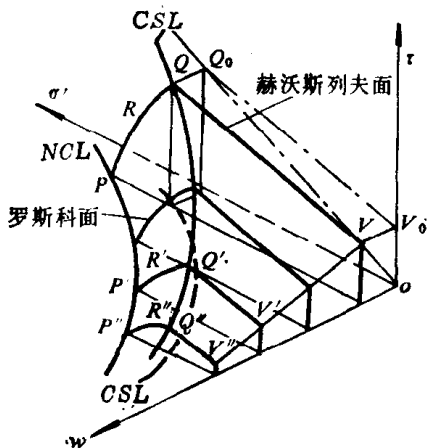


图 1-4

含水量 w 的超固结土的 $\tau, \sim \sigma'$ 关系, 一并绘在 $\tau \sim \sigma' \sim w$ 空间坐标上, 得出罗斯科屈服面与赫沃斯列夫屈服面沿空间曲线 $QQ'Q''$ 相接合形成的临界状态面, 如图1-4所示。曲线 $QQ'Q''$ 称为 $\tau \sim \sigma' \sim w$ 空间的临界状态线, 或称为 CSL 线。图中的 CSL 虚线为 CSL 实线在 $\sigma' \sim w$ 平面上的投影。 V, Q 。线为空间的 VQ 线在 $\tau \sim \sigma'$ 平面上的投影。 NCL 线为 $\sigma' \sim w$ 平面上的正常固结曲线, 图1-3中的 P, P', P'' 都在 NCL 线上。

显然, 正常固结或轻超固结土的排水剪的有效应力路

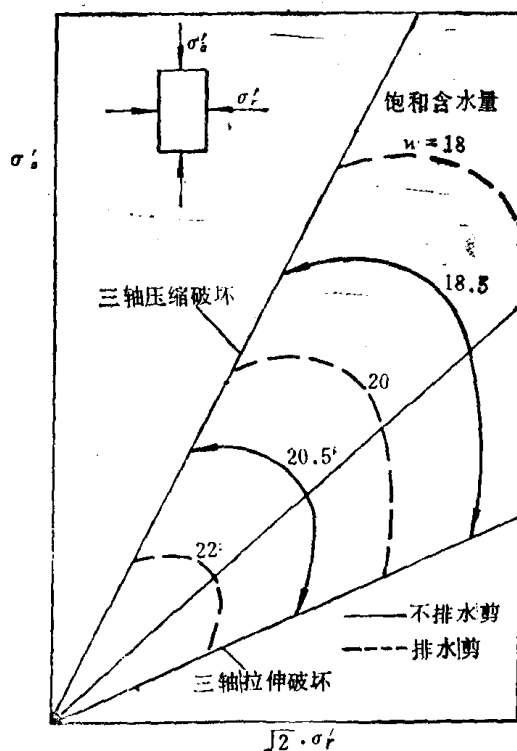


图 1-5

径，也在图 1-4 所示的罗斯科屈服面上。因为，根据很多排水剪试验有效应力路径资料整理得出的等饱和含水量曲线的形状与不排水剪的有效应力路径的形状极为相似，如图 1-5 所示。当然，在罗斯科面上，不排水剪的有效应力路径与排水剪的有效应力路径的走向规律是不同的。

可以看出，在图 1-4 所示的计算模型进一步完善之后，人们有可能把土体的稳定性问题作为变形发展问题来处理。根据不同应力状态下的变形发展情况，来估定土体的稳定性与安全程度。

上述关于临界状态面的理论或模型与其它的理论或模型一样都处在不断完善与改进的过程中，本书不作进一步讨论。土的各种本构关系模型的不断实用化对进一步全面提高极限平衡理论的计算精确性与合理性具有重要作用。

§ 1.2 土体应力应变特性的塑性模型化

土的实际应力应变关系特征如图 1-6 或图 1-2 所示。当前，极限平衡理论采用塑性理论的方法研究散体或土体的极限平衡状态问题，故散体极限平衡理论也称为土的塑性力学。采用塑性理论方法的前提是将研究对象土的应力应变特性模型化或简化为连续塑性流动体的特征。即在图 1-6 中用虚折线代替土的实际应力应变曲线，认为应力超过 A 点之后，土体进入或开始发生剪切滑动或塑性流动，土体变为理想的塑性体，而不考虑达到剪切滑动以前土体变形的影响。这也是当前散体极限平衡理论的基本假定之一。

实际计算中，图 1-6 中的 A 点位置如何确定是个比较复杂而重要的问题。一种看法认为，若土体中各点的应变均匀，可取应力应变曲线的峰值，这相应于剪切滑动变形较小即

达剪破的情况，否则，变形较大时可取终值。一般认为，可在适当的剪切滑动变形或塑性流动范围内取应力的平均值。

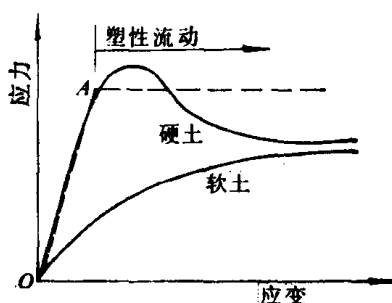


图 1-6

§ 1.3 散体极限平衡课题的解

自从克特尔 (F. Kotter) 于 1903 年首先建立了散体的平面极限平衡或塑性平衡滑线方程以来，后人企图沿着克特尔开辟的方向，探求散体极限平衡课题的严密数学解。普兰特 (L. Prandtl) 第一求得了克特尔方程在无重量条形地基极限平衡课题中的封闭解。但是，由于散体或土体性质的复杂性和实际边界条件的多变性，除极少数实际课题外，很难求得课题的严密数学解。由克特尔开创的这个学派的理论方法，一般称为滑动线法或特征线法。

苏联学者索科洛夫斯基 (В. В. Соколовский) 首先应用特征线数值解，成功地取得一系列散体极限平衡实际课题的解。后来，别列赞切夫 (В. Г. Березанцев) 等人又相继发展了这方面的理论。

近几十年来，又发展起一种称为极限分析法的求解散体极限平衡课题的新理论方法。这一理论认为，滑动线法只满足

了应力平衡条件与强度条件，没能说明极限平衡状态下散体或土体能否真正发生滑动变形问题，也没能说明滑动边界周围散体的应力状态。极限分析法引用极大极小原理，提出用极限分析的上限解法与下限解法，求课题的上限解与下限解，而极限平衡课题的真正解或严密解就上限解与下限解之间。这也是塑性理论中求解塑性课题真正解时常采用的方法之一。

在散体极限平衡理论与土力学的发展过程中，曾先后出现过各种散体极限平衡课题的近似计算方法，例如太沙基（K. Terzaghi）等人提出的稳定性计算方法等。这类方法采用散体极限平衡理论的某些已有成果，假定土体达到极限平衡状态时的滑动区形状与范围，按静力平衡原则找出与最危险滑动情况相应的极限荷载等等。这类方法在工程实践中曾发挥过很大作用，为实际设计工作提供了大量有价值的成果。这一部分内容已为大家所熟知，本书不再重复。

本书主要介绍滑动线法或特征线数值法以及极限分析法。

为了加深对散体极限平衡理论特征线解法的理解，第二章主要介绍极限平衡方程组的特征线数值法的数学力学基础，第三章到第五章介绍它在地基、斜坡、土压力课题中的应用。在此基础上，第六章介绍极限分析法的理论基础与应用。

§ 1.4 极限平衡状态的平面与空间课题

在图1-7中，应力圆A表示土体在大主应力 σ_1 与小主应力 σ_3 作用平面上达到了极限平衡状态，应力圆A与强度包线

相切，而应力圆B则表示同一土体在中主应力 σ_2 与小主应力 σ_3 作用平面上未达到极限平衡状态；应力圆C表示同一土体在大主应力 σ_1 与中主应力 σ_2 作用面上也未达到极限平衡状态。应力圆A、B、C所表示的同一土体的应力状态，称为平面极限平衡状态，是一种不完全的极限平衡状态。一般，条形地基与斜坡等的极限平衡状态均属此类型。

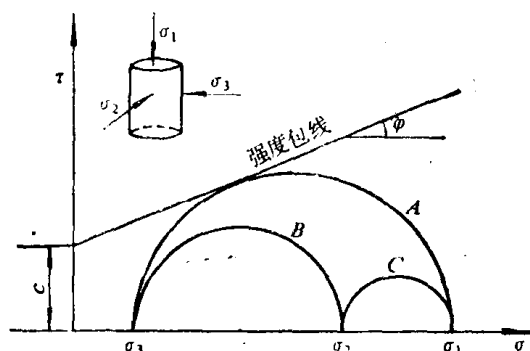


图 1-7

轴对称条件下，例如三轴压缩试验与圆形荷载地基的极限平衡状态，土体在主应力 σ_1 以及 $\sigma_2 = \sigma_3$ 条件下被剪破，属于不完全的空间极限平衡课题。完全的极限平衡状态是指在三个主应力的任何一对主应力面上都达到了极限平衡状态。

第二章 散体极限平衡方程组 及其特征线数值解法

§ 2.1 极限平衡方程组

本节主要讲述散体极限平衡状态平面课题的基本解法原理。

一、应力平衡方程组

在极限平衡状态的平面课题中，微分体积散体或土体的应力平衡方程组可按图2-1所示应力情况根据平衡法写出：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= X \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} &= Y \end{aligned} \right\} \quad (2-1)$$

式中 X 、 Y 表示散体的体积力。当散体只有重力时， $X=0$ ， $Y=\gamma$ ， γ 为散体的容重。

平衡方程组(2-1)中含有三个待求的应力分量 σ_x 、 σ_y 、 $\tau_{xy}(=\tau_{yx})$ ，需有三个有关方程才能求解。在散体极限平衡理论中，所缺的第三个方程采用强度条件来补足，而不采用适合于一般连续性物体的变形连续性方程。因为，在散体或土体内划出的任一条直线在变形后常发生折断，散体中任一点的变位实际上不一定是坐标的连续函数。从研究散体的极限平衡状态的角度看来，采用强度条件来补足第三个方程是必要的，也较为合理。因为，散体的极限平衡状态和其强度条件直接有关，而且在散体的强度与其所受应力之间存在着

比较明确的规律关系。

二、极限平衡条件及其变换

极限平衡条件就是散体或土体达到极限平衡状态时的强度条件。在极限平衡理论中，须将所采用的摩尔-库伦强度条件式变换为另一种形式，才便于方程组(2-1)的求解。

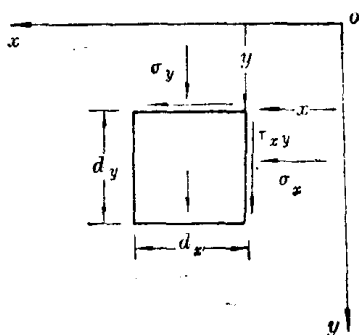


图 2-1

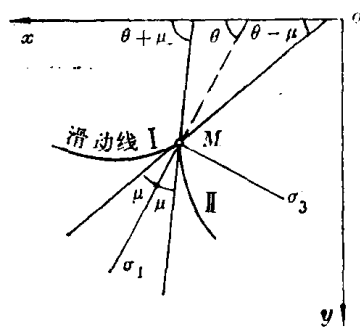


图 2-2

图2-2表示在 xy 平面上极限平衡状态散体中，任一点 M 处的主应力方向和通过该点的一对相交滑动线I与II的方向。在土力学中已经证明，通过 M 点的一对滑动线相交成 2μ 角，而 $\mu = 45^\circ - \frac{\varphi}{2}$ 。 M 点处大主应力 σ_1 的作用方向与此两滑动线方向成 μ 角，小主应力 σ_3 的作用方向与此两滑动线方向成 $(\frac{\pi}{2} + \mu)$ 与 $(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})$ 角。所研究的极限平衡状态点 M 处的分应力 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 与主应力 σ_1 、 σ_3 之间的关系式已知为：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)\cos 2\theta \\ \sigma_y &= \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) \mp \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)\cos 2\theta \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)\sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (2-2)$$

式中 θ 为大主应力 σ_1 与 x 轴的交角，在计算中规定： θ 角由 ox 轴反时针方向为正，反之为负。由式 (2-2) 看出， θ 角和所研究点的应力状态有关。

在平面极限平衡状态时，由 σ_1 与 σ_3 确定的应力圆与散体或土体的强度包线相切，如图2-3所示。在该图中将长度 o_1o_2 所代表的应力以 σ 表示，称为特征应力。显然， σ 的表达式为：

$$\sigma = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2 \sin \varphi} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) + c \cot \varphi \quad (2-3)$$

$$\text{以及} \quad \left. \begin{aligned} (\sigma_1 + \sigma_3) &= 2(\sigma - c \cot \varphi) \\ (\sigma_1 - \sigma_3) &= 2\sigma \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (2-4)$$

由式 (2-3) 看出，特性应力 σ 是一个与散体中一点的应力状态 (σ_1 、 σ_3 或 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy}) 和强度参数 c 、 φ 有关的引用应力或计算应力。在这里引用它，主要是为了便于方程组 (2-1) 的求解。

将式 (2-4) 代入方程组 (2-2) 中，推得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_x}{\sigma_y} &= \sigma(1 \pm \sin \varphi \cos 2\theta) - c \cot \varphi \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \sigma \sin \varphi \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (2-5)$$

显然，公式 (2-5) 是以分应力 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 与特征应力 σ 表示的极限平衡条件方程组。在下述内容中，用它代替摩尔-库仑强度条件式 (1-2) 比较方便。

在实际计算中，常需用到按另一直角坐标系 (n, t) 确定的以分应力 σ_n 、 σ_t 、 τ_{nt} 与特征应力 σ 所表示的极限平衡条件方程。在图2-4中， nt 坐标轴与 xy 坐标轴的夹角为 α ，不难得出：